

Österreichische Zeitschrift für **Vermessungswesen**

REDAKTION:

Dipl.-Ing. Dr. techn. **Hans Rohrer**
emer. o. Professor
der Technischen Hochschule Wien

Dipl.-Ing. **Karl Lego**
Präsident
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen i. R.

Hofrat Dr. phil. **Karl Ledersteger**
o. Professor
der Technischen Hochschule Wien

Nr. 4

Baden bei Wien, Ende August 1959

XLVII. Jg.

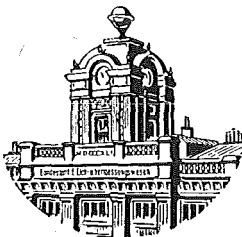
INHALT:

Abhandlungen:

- Die Stokesschen Konstanten und die Trägheitsmomente einer GleichgewichtsfigurK. Ledersteger
Die Bestimmungsstücke der Normalschnittellipse.....K. Hubeny
Eine interessante Neuerung am WILD-Repetitions-Theodolit T 1E. Berchtold

Literaturbericht, engl.-franz. Inhaltsverzeichnis.

Mitteilungsblatt zur „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen“,
redigiert von RdVD, Dipl.-Ing. Rudolf Arenberger.



Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

Baden bei Wien 1959

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen

Für die Redaktion der Zeitschrift bestimmte Zuschriften und Manuskripte sind an eines der nachstehenden Redaktionsmitglieder zu richten:

Redakteure:

- o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Rohrer*, Wien IV, Technische Hochschule
- Präsident i. R. Dipl.-Ing. Karl Lego*, Wien I, Hohenstaufengasse 17
- o. Prof. Hofrat Dr. Karl Ledersteger*, Wien IV, Technische Hochschule

Redaktionsbeirat:

- Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alois Barvir*, Graz, Technische Hochschule
- o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Friedrich Hauer*, Wien IV, Technische Hochschule
- o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Hubeny*, Graz, Technische Hochschule, Rechbauerstraße 12
- Wirkl. Hofrat Ing. Karl Neunnaier*, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3
- Dipl.-Ing. Dr. jur. Franz Schiffmann*, Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3
- Redakteur des Annoncenteles: *OKdVD. Dipl.-Ing. M. Schenk*, Wien VIII, Krotenthallergasse 3

Für die Redaktion des Mitteilungsblattes bestimmte Zuschriften sind an *Rat d.VD. Dipl.-Ing. R. Arenberger*, Wien XVIII, Schopenhauerstraße 32, zu senden.

Die Manuskripte sind in lesbarer, druckreifer Ausfertigung, die Abbildungen auf eigenen Blättern als Reinzeichnungen in schwarzer Tusche und in möglichst großem, zur photographischen Verkleinerung geeignetem Maßstab vorzulegen. Von Photographien werden Hochglanzkopien erbeten. Ist eine Rücksendung der Manuskripte nach der Drucklegung erwünscht, so ist dies ausdrücklich zu bemerken.

Die Zeitschrift erscheint sechsmal jährlich, u. zw. Ende jedes geraden Monats.

Redaktionsschluß: jeweils Ende des Vormonats.

Bezugsbedingungen: pro Jahr:

Mitgliedsbeitrag für den Verein oder die Österr. Gesellschaft	
für Photogrammetrie	S 50.—
für beide Vereinigungen zusammen	S 55.—
Abonnementgebühr für das Inland	S 72.—
Abonnementgebühr für Deutschland	DM. 15.—
Abonnementgebühr für das übrige Ausland	sfr. 15.—

Postscheck-Konto Nr. 119.093

Telephon: 45-92-83

WIR LIEFERN FÜR KANZLEIBEDARF:

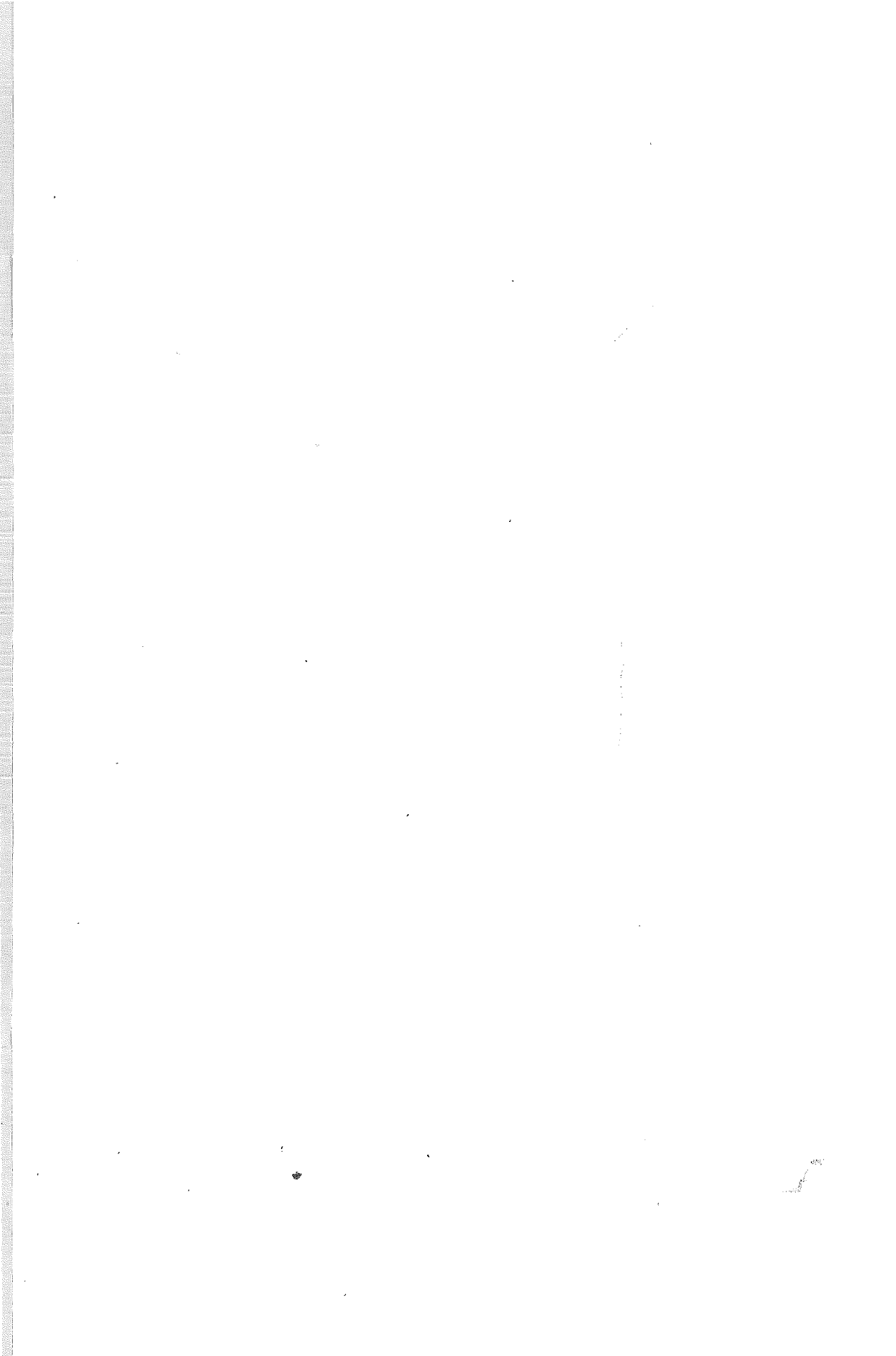
COORAPID Rechengerät
Pantographen
Koordinatographen
Polar-Kartiergeräte
Planimeter
Transporteure
Lineale
Schablonen
Maßstäbe
Reißzeuge
Rechenschieber



Rudolf & August Rost
Vermessungsinstrumente
Wien 15, Märzstraße 7
Telefon 92-32-31

WIR LIEFERN FÜR FELDBEDARF:

Theodolite
Nivellierinstrumente
Nivellierlatten
Fluchtstäbe
Winkelprismen
Gefällsmesser
Höhenmesser
Kompass
Stahlbandmaße
Libellen
Senkel



II. Dienstvorschriften

- Nr. 1: *Benennungen, Zeichen und Abkürzungen im staatlichen Vermessungsdienst.* 44 Seiten, 2. Auflage, 1956. Preis S 10.—. (Vergriffen.)
- Nr. 2: *Allgemeine Bestimmungen über Dienstvorschriften, Rechentafeln, Vordrucke und sonstige Drucksorten.* 56 Seiten, 2. Auflage, 1957. Preis S 10.—
- Nr. 8: *Die österreichischen Meridianstreifen.* 62 Seiten, 1949. Preis S 12.—
- Nr. 14: *Fehlergrenzen für Neuvermessungen.* 5. Auflage, 1958, 27 Seiten. Preis S 15.—
- Nr. 15: *Hilfstabellen für Neuvermessungen.* 2. Auflage, 1958, 39 Seiten, Preis S 15.—
- Nr. 16: *Einschaltpunkt- und Polygonnetz.* 1958, 40 Seiten, Preis S 20.—
Musterbeispiel zur Dienstvorschrift 16, 1959, 77 Seiten, Preis S 34.—
Dienstvorschrift Nr. 35 (Feldarbeiten der Vermessungstechnik bei der Bodenschätzung).
Wien, 1950. 100 Seiten, Preis S 25.—
- Nr. 46: *Zeichenschlüssel der Österreichischen Karte 1:25.000 samt Erläuterungen.*
88 Seiten, 1950. Preis S 18.—
- Technische Anleitung für die Fortführung des Grundkatasters.* Wien, 1932. Preis S 25.—
Liegenschaftsteilungsgesetz 1932. (Sonderdruck des B. A. aus dem Bundesgesetzblatt).
Preis S 1.—.

III. Weitere Publikationen

- Prof. Dr. Rohrer, *Tachymetrische Hilfstafel für sexagesimale Kreisteilung.* Taschenformat. 20 Seiten. Preis S 10.—
- Der österreichische Grundkataster.* 66 Seiten, 1948. Preis S 15.—
- Behelf für die Fachprüfung der österreichischen Vermessungsingenieure* (herausgegeben 1949)
- Heft 1: Fortführung 1. Teil, 55 Seiten, Preis S 11.—
- Heft 2: Fortführung 2. Teil, 46 Seiten, Preis S 10.—
- Heft 3: *Höhere Geodäsie,* 81 Seiten, Preis S 16.—
- Heft 4: *Triangulierung,* 46 Seiten, Preis S 9.—
- Heft 5: *Neuvermessung, Nivellement und topographische Landesaufnahme.*
104 Seiten, Preis S 20.—
- Heft 6: *Photogrammetrie, Kartographie und Reproduktionstechnik.*
70 Seiten, Preis S 15.—

KRIECHBAUM-SCHIRME

ERZEUGUNG ALLER ARTEN

VERMESSUNGS-

RUCKSACK- und

GARTEN-SCHIRME

Hauptbetrieb:

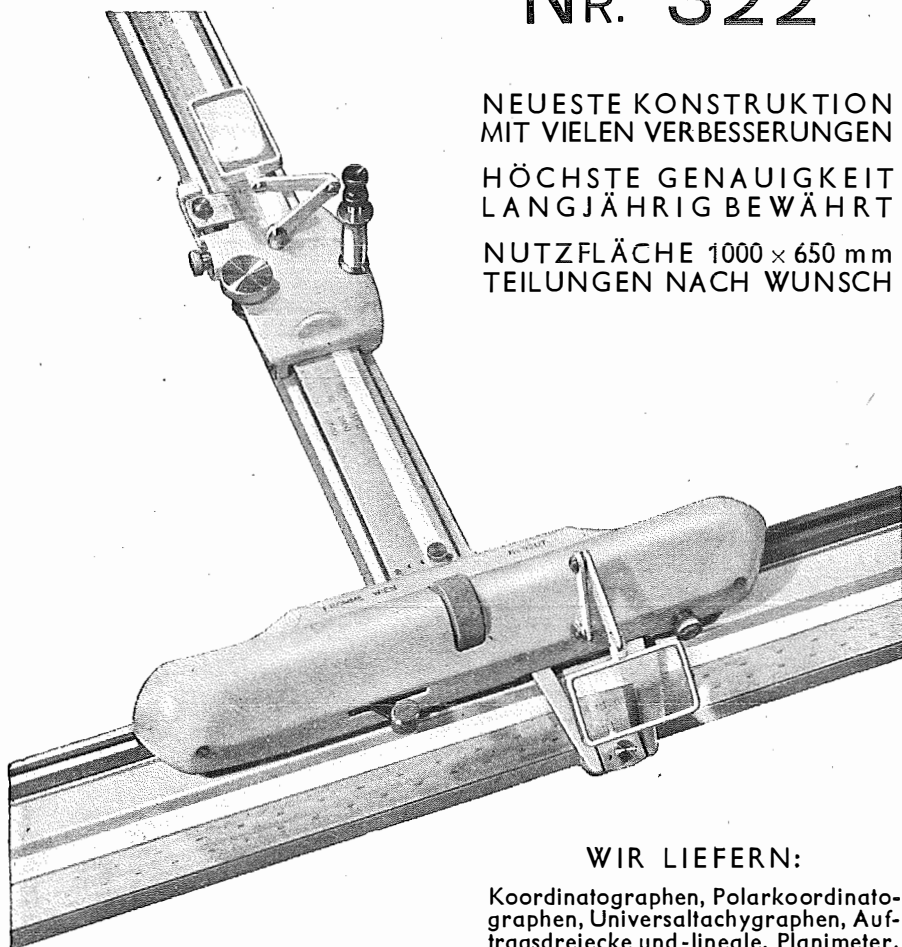
WIEN 16

Neulerchenfelderstr. 40

Telephon 45-19-38

Wir empfehlen Ihnen:

FROMME^s
**PRÄZISIONS-
KOORDINATOGRAPH
Nr. 322**



NEUESTE KONSTRUKTION
MIT VIELEN VERBESSERUNGEN

HÖCHSTE GENAUIGKEIT
LANGJÄHRIG BEWÄHRT

NUTZFLÄCHE 1000 × 650 mm
TEILUNGEN NACH WUNSCH

REPARATUREN VON
INSTRUMENTEN U. GERÄTEN

WIR LIEFERN:

Koordinatographen, Polarkoordinatographen, Universaltachygraphen, Auftragsdreiecke und -lineale, Planimeter, Gefällsmesser, Hypsometer, Schichteneinschalter, Winkelprismen, Nivellierlatten, Meßbänder, Numerierschlegel, Maßstäbe, Reißzeuge usw.

Prospekte und Anbote kostenlos

ING. ADOLF FROMME

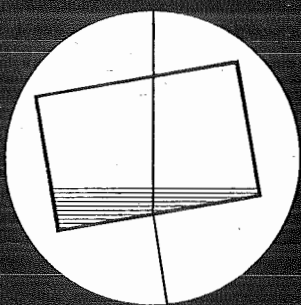
Geodätische und kartographische Instrumente, Fabrik für Zeichenmaschinen
Gegr. 1835 WIEN 18, HERBECKSTRASSE 27 Tel. 33-74-94

Neu:

Wild T1-A

**mit automatischer
Höhenkollimation**

Der Theodolit mit den letzten technischen Errungenschaften, die Ihnen leichteres, rascheres und genaueres Messen ermöglichen.

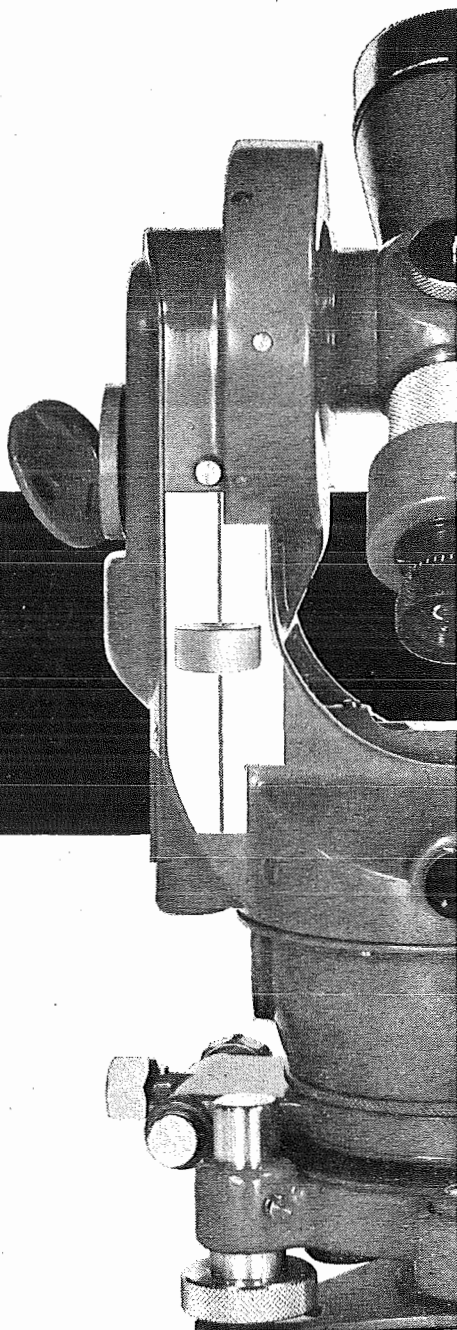


Verblüffend einfache Lösung der Automatik: Flüssigkeitsprisma ohne mechanische Teile, ohne Abnützung, ohne Störungen, ohne Reparaturen.

Nähere Einzelheiten im Prospekt
Th 154

WILD
HEERBRUGG

Wild Heerbrugg AG, Heerbrugg
Werke für Optik und Feinmechanik



Alleinvertretung für Österreich

RUDOLF & AUGUST ROST, WIEN 15, MÄRZSTRASSE 7

Telefon: 92-32-31, 92-53-53

Telegramme: Georost Wien

ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. R o h r e r
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. L e d e r s t e g e r

Nr. 4

Baden bei Wien, Ende August 1959

XLVII. Jg.

Die Stokesschen Konstanten und die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur

Von K. Ledersteger, Wien

(Veröffentlichung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung)

Zusammenfassung:

Die klassische Theorie hat auf Grund der berühmten Transformation von Radau zu dem Schluß geführt, daß die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur mit sehr großer Annäherung Stokessche Konstante und somit weitgehend unabhängig vom Dichtegesetz sind. Dieses Ergebnis schien sich empirisch vollkommen zu bestätigen. Einfache Beispiele lehren jedoch, daß die Trägheitsmomente sehr wesentlich von der Massenkonfiguration abhängen und daher niemals Integralinvarianten für verschiedene Dichtegesetze sein können. Zur Klärung des Widerspruches ist eine eingehende Analyse der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren erforderlich. Es zeigt sich, daß es zu jedem System Stokesscher Elemente höchstens eine Massenordnung im hydrostatischen Gleichgewicht gibt. Jede Gleichgewichtsfigur ist mit ihren sämtlichen physikalischen Daten eindeutig und völlig streng durch ihre Stokesschen Elemente bestimmt. Dank der Eindeutigkeit des streng individuellen Dichtegesetzes sind demnach auch die Trägheitsmomente reine Funktionen der Stokesschen Elemente, jedoch nicht Integralinvarianten für verschiedene Massenordnungen, die es gar nicht gibt. Hingegen gibt es eine lineare Reihe heterogener Gleichgewichtsfiguren, in welcher die Rotationsgeschwindigkeit, die Trägheitsmomente und die dynamische Abplattung völlig konstant sind. Die Konstanz der Trägheitsmomente ist dadurch ermöglicht, daß die zunehmende Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt durch eine beträchtliche Expansion der Figuren kompensiert wird. In dieser Reihe ändert sich die Abplattung und auch das Verhältnis von Fliehkraft zur Schwere im Äquator nur sehr gering, woraus sich die empirische Bestätigung der falschen Interpretation erklärt. Die Berechnung dieser Figurenreihe gibt erstmalig die Möglichkeit, die klassische Formel für die dynamische Abplattung zu prüfen; ihr Fehler beträgt bloß $0,6^0/00$.

Summary:

The classical theory founded on the famous transformation of Radau shows that the moments of inertia of a figure of equilibrium are „Quasi-Stokes' constants“ and therefore independent from the density distribution. This result seemed to prove from experience. Otherwise simple examples

teach that the moments of inertia essentially depend from configuration of masses and therefore never can be integral invariants for different laws of density. To clear up this contradiction an exact analysis of spheroidal equilibrium figures is necessary. For each system of Stokes' elements exists at best one figure in hydrostatical equilibrium. Each equilibrium figure with all its physical dates is evaluated exactly by its Stokes' elements. Owing to the strongly individual density distribution also the moments of inertia are pure functions of Stokes' elements but not at all integral invariants for different masses distributions. But there is a linear row of inhomogeneous figures in which the rotational angular velocity, the moments of inertia and the mechanical ellipticity are constant. The constance of moments of inertia is made possible by a considerable expansion of figures combined with the contraction of masses to centre of gravity. In this row the flattening and the ratio of the centrifugal acceleration to gravity in equator change only little by which the seeming empirical sanction of the wrong interpretation is explained. The calculation of this row the first time gives the possibility to prove the classical formula for the mechanical ellipticity: its error amounts only to 0,6 ‰.

Nach einem wichtigen Satz von Stokes, der auch als „Umkehrproblem der Potentialtheorie“ bekannt ist, gibt es zu einer vorgegebenen Masse M umschließenden Niveaufläche S unendlich viele Massenordnungen, welche diese Niveaufläche und das gesamte Außenraumpotential unverändert lassen, falls nur die Existenz einer zweiten Massenordnung dieser Eigenschaft vorausgesetzt werden darf. Diesen, von Stokes für das reine Gravitationspotential, d. h. für ruhende Massen abgeleiteten Satz konnte Poincaré auf Massen ausdehnen, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine unveränderliche Drehachse rotieren. Freilich ist damit bereits eine gewisse Einschränkung der möglichen Massenkonfigurationen verbunden. Denn da wir selbstverständlich von äußeren Kräften oder von weiteren Körpern abstrahieren, muß der Schwerpunkt in einem Inertialsystem ruhen; er kann also unmöglich an der Rotation teilhaben und muß demnach in der Rotationsachse verharren. Dennoch gibt es nach wie vor unendlich viele denkbare Massenordnungen zu einem System der sogenannten „Stokesschen Elemente“, nämlich der Masse M , der Rotationsgeschwindigkeit ω und der Niveaufläche S .

Die Niveaufläche S ist für die beim Problem der Erdfigur allein in Frage kommenden schwach abgeplatteten, sphäroidischen Figuren durch die beiden Parameter Achse a und Abplattung α des achsengleichen Rotationsellipsoides und durch die unter 45° Breite auftretende maximale Abweichung h_m von diesem Ellipsoid eindeutig gegeben: $S = (a, \alpha, h_m)$. Die fünf Stokesschen Elemente genügen nun zur eindeutigen Auflösung des Helmertschen Gleichungssystems für die Rotations-Niveausphäroide 4. Grades mit dem Potentialausdruck

$$U_4 = \frac{k^2 M}{l} \left[1 + \frac{K}{2l^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{\omega^2 l^3}{2k^2 M} \cos^2 \varphi' + \right. \\ \left. + \frac{D}{l^4} \left(\sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35} \right) \right], \quad \dots \quad (1)$$

in welchem l den Radiusvektor des Niveausphäroides, φ' die geozentrische Breite, K die durch die Gesamtmasse dividierte Differenz der Hauptträgheitsmomente

$$K = \frac{C - A}{M}, \quad \dots \quad (2)$$

also eine Massenfunktion 2. O., und schließlich D eine Massenfunktion 4. O.

$$D = \left(\frac{35}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{M} \int l^4 \left(\sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35} \right) dm \quad \dots (3)$$

bedeuten. Das Helmerische Gleichungssystem verknüpft ja 13 Parameter durch 8 Gleichungen. Es sind dies neben der Masse M drei Massengrößen: die mittlere Dichte ρ_m , die statische Abplattung K/a^2 und die Funktion $\delta = D/a^4$; drei weitere physikalische Größen: der Potentialwert W_0 , das Verhältnis ε von Fliehkraft zur Schwere am Äquator und die Rotationsgeschwindigkeit ω ; die drei Parameter der Formel für die theoretische Schwere

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 + \beta \sin^2 \varphi - \frac{\beta_4}{4} \sin^2 2\varphi \right), \quad \dots (4)$$

also die Äquatorschwere γ_0 , die Schwereabplattung β und der Koeffizient β_4 ; schließlich die drei geometrischen Bestimmungsstücke a , α und h_m . Dabei sind α , ε , β und K/a^2 Größen 2. O., β_4 und δ Größen 4. O., während h_m/a eine Größe 5. O. ist. Die Helmerischen Gleichungen sind unabhängig von dem die Massenkongfiguration bestimmenden Dichtegesetz. Mithin sind die 8 Parameter ρ_m , K/a^2 , W_0 , ε , δ , γ_0 , β und β_4 explizit unabhängig von den verschiedenen, zu denselben Stokesschen Elementen M , ω , a , α und h_m gehörigen Massenanordnungen, d. h. sie sind Integralinvarianten für alle diese Massenkongfigurationen und werden in diesem Sinne als „Stokessche Konstante“ bezeichnet.

Hier interessieren in erster Linie die Trägheitsmomente. Da die Achse a zu den Stokesschen Elementen zählt, ist mit der statischen Abplattung selbstverständlich die Differenz der Hauptträgheitsmomente $(C - A) = MK$ eine Stokessche Konstante. Für die ruhende Kugel z. B., welche die Stokesschen Elemente M , a , $\alpha = h_m = \omega = 0$ besitzt, geben die Helmerischen Gleichungen $\varepsilon = \delta = \beta = \beta_4 = K/a^2 = 0$, d. h. es ist auch $K = D = 0$ und es bleibt allein

$$\gamma_0 = \frac{k^2 M}{a^2} \quad ; \quad W_0 = \frac{k^2 M}{a} \quad \dots (5)$$

Gemäß den Definitionsgleichungen der Trägheitsmomente und wegen der Rotationssymmetrie gilt allgemein

$$\begin{aligned} A = B &= \int (x^2 + z^2) dm = \int (y^2 + z^2) dm, \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad \dots (6)$$

und daher für die Kugel

$$(C - A) = MK = \int (x^2 - z^2) dm = 0$$

oder \dots (7)

$$\int x^2 dm = \int y^2 dm = \int z^2 dm.$$

Diese drei Integrale können sich somit bei jeder möglichen Änderung der Massenkongfiguration nur jeweils um eine bestimmte Konstante b ändern, so daß K tatsächlich unverändert bleibt, während sich das Hauptträgheitsmoment C um $2b$ ändert. Wegen der in (6) zum Ausdruck kommenden vollständigen Kugelsymmetrie

müssen stets die Flächen gleicher Dichte konzentrische Kugeln sein, d. h. es kommen nur geschichtete Kugeln in Frage, wobei selbstverständlich der Schwerpunkt erhalten bleibt. Die möglichen Massenkonfigurationen beginnen also beim Massenpunkt ($C = 0$) und gehen über den homogenen Fall bis zur Flächenbelegung (C_{max}), d. h. C ist keine Stokessche Konstante, während die Massenfunktion D ebenso wie ($C - A$) stets verschwindet.

Nun läßt sich leicht zeigen, daß sämtliche homogene Ellipsoide mögliche Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse sind¹⁾. Es gibt demnach ∞^2 Maclaurinsche Ellipsoide, deren jedes durch M , a und α mit seinen sämtlichen physikalischen Daten eindeutig bestimmt ist. Das aber besagt, daß durch M und $S = (a, \alpha, h_m = 0)$ die Rotationsgeschwindigkeit ω des Maclaurinschen Ellipsoides bereits mitbestimmt ist, also die Stokesschen Elemente gar nicht willkürlich wählbar sind. Sind aber die Stokesschen Elemente M , S und ω eines homogenen, Maclaurinschen Ellipsoides widerspruchsfrei gegeben, so ist das Helmhertsche Gleichungssystem eindeutig lösbar und es sind u. a. $MK = (C - A)$ und $D = \delta a^4$ Integralinvarianten für alle zu den gegebenen Stokesschen Elementen gehörigen Massenkonfigurationen, immer vorausgesetzt, daß überhaupt eine zweite derartige Massenordnung denkbar ist. Tatsächlich sind neben dem homogenen Falle noch unendlich viele weitere Massenordnungen möglich. Um dies zu zeigen, braucht man dem Ellipsoid bloß mit der kleinen Achse eine Kugel einzuschreiben und in dieser die eingeschlossene Masse wie oben beliebig zu schichten. Bei diesem Vorgang bleibt das Außenraumpotential erhalten und die freie Oberfläche ist nach wie vor eine Niveaufläche. Auch der Schwerpunkt behält seine Lage bei. K und D ändern sich nicht, weil der von der Masse in der Kugel herrührende Anteil stets Null ist. Hingegen wird sich das Trägheitsmoment C und natürlich auch das äquatoriale Trägheitsmoment $A = B$ beträchtlich ändern; die Trägheitsmomente sind weder echte noch „Quasi“-Stokessche Konstante! Sehr wichtig ist jedoch die Feststellung, daß die konstruierten inhomogenen Figuren nicht im hydrostatischen Gleichgewicht sind; die Flächen gleicher Dichte fallen nämlich nicht mit den Niveauflächen zusammen.

Einzige Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht ist, daß die Flächen gleicher Dichte Niveauflächen sind. Denn dann ist selbstverständlich auch die freie Oberfläche eine Niveaufläche, und zwar die Fläche der geringsten Dichte, wenn wir aus Gründen der Stabilität fordern, daß die Dichte mit dem nach innen zunehmenden Druck niemals abnehmen kann. Die Bedingung, daß die freie Oberfläche gleichzeitig eine Niveaufläche ist, ist für das hydrostatische Gleichgewicht wohl notwendig, aber nicht hinreichend, wie das letzte Beispiel anschaulich lehrt. Hingegen kann im Falle der Homogenität die Gleichgewichtsbedingung dahingehend formuliert werden, daß die freie Oberfläche eine Niveaufläche sein muß. Daß es nur eine einzige Gleichgewichtsbedingung gibt, ist sehr wesentlich für die Feststellung der Mannigfaltigkeit der möglichen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren einer vorgehenden rotierenden Masse M .

¹⁾ *K. Ledersteger*: „Die möglichen Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse“, Zeitschrift f. Vermessungswesen, 84. Jahrgang 1959, Seite 73–90.

Für die möglichen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren muß jedenfalls die in der Potentialentwicklung $W = U_4 + T_4$ auftretende, allein durch Massenunregelmäßigkeiten verursachte Restfunktion T_4 verschwinden. Wir können uns also von vornherein auf die Niveausphäroide U_4 , d. h. auf die Niveauflächen mit dem Potentialausdruck (1) beschränken. Da das Helmerzsche Gleichungssystem fünf freie Parameter besitzt, gibt es eine fünffach unendliche Schar derartiger Niveausphäroide U_4 . Übrigens sind die freien Parameter weder in ihrer Kombination noch in ihren Zahlenwerten völlig frei; wir werden sie daher als „bedingt frei“ bezeichnen. Zu jeder Massenordnung, auch für solche im hydrostatischen Gleichgewicht, gehören unendlich viele äußere Niveauflächen. Daher kann es für eine vorgegebene gedachte Masse M höchstens ∞^3 sphäroidische Gleichgewichtsfiguren geben. Andererseits sind sämtliche Ellipsoide homogene Gleichgewichtsfiguren dieser Masse. Es ist also selbstverständlich, daß sich für $h_m \neq 0$ an die Maclaurinsche Ellipsoide ebenso dicht heterogene Gleichgewichtsfiguren anschließen. Mithin muß es für eine gegebene Masse tatsächlich ∞^3 sphäroidische Gleichgewichtsfiguren geben. Man kann auch so überlegen: die möglichen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren können aus der vierfach unendlichen Schar der Niveausphäroide der gegebenen Masse M durch die Gleichgewichtsbedingung herausgehoben werden. Könnte nämlich die Gleichgewichtsbedingung allgemein mathematisch formuliert und als 9. Gleichung dem Helmerischen System angeschlossen werden, so hätte dieses wirklich für eine gegebene Masse ∞^3 Lösungen. Auch auf diese Weise erkennt man, daß es nur eine einzige Gleichgewichtsbedingung geben kann. Speziell ein Ellipsoid ist Gleichgewichtsfigur, wenn die Maclaurinsche Bedingung

$$\frac{\omega^2}{2 \pi k^2 \rho} = \frac{(3 + \gamma_1^2) \arctg \eta - 3 \eta}{\eta^3} = \frac{8}{15} a - \frac{4}{35} a^2 - \frac{16}{105} a^3 \dots \dots (8)$$

erfüllt ist, in welcher η die zweite Exzentrizität $\eta^2 = (a^2 - c^2) : c^2$ bedeutet. Da jetzt neben M noch $h_m = 0$ vorgegeben ist, hat das Helmerische Gleichungssystem ∞^2 Lösungen, d. h. sämtliche Ellipsoide sind mögliche Maclaurinsche Ellipsoide, wie bereits erwähnt wurde.

Auch für die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren enthalten mithin die Stokesschen Elemente bereits eine Überbestimmung. Denn durch M und $S = (a, \alpha, h_m)$ ist eindeutig eine Gleichgewichtsfigur mit ihren sämtlichen physikalischen Daten bestimmt, d. h. ω darf nicht mehr willkürlich gewählt werden. Dies schließt jedoch nicht aus, daß dieselbe Fläche S eine äußere Niveaufläche anderer Gleichgewichtsfiguren mit verschiedenen Werten von ω ist. Sei ein beliebiges System Stokesscher Elemente gegeben. Dann läßt sich leicht zeigen, daß es unter den unendlich vielen zugehörigen Massenordnungen im allgemeinen auch eine Massenordnung im hydrostatischen Gleichgewicht geben muß. Denn für alle zugehörigen Massenordnungen bleiben K und D als Stokessche Konstante Integralinvarianten, während andererseits durch M, K, D und ω eindeutig eine Gleichgewichtsfigur gegeben ist, sofern in Anbetracht des bedingten Charakters der Parameter überhaupt eine physikalisch denkbare Lösung möglich ist.

Zu jedem System Stokesscher Elemente gibt es also unter den sonstigen unendlich vielen Massenordnungen wenn überhaupt so nur eine Massenordnung

im hydrostatischen Gleichgewicht derart, daß die Fläche S entweder freie Oberfläche oder äußere Niveaulfläche ist. Neben den Stokesschen Konstanten sind für diese Massenordnung auch die beiden Trägheitsmomente $A = B$ und C eindeutig bestimmt. Die Voraussetzung der Sätze von Stokes und Poincaré, daß es nämlich überhaupt eine zweite Massenordnung gibt, ist für Gleichgewichtsfiguren eben nicht erfüllt und der Begriff der Stokesschen Konstanten als Integralinvarianten für alle möglichen Massenordnungen verliert hier seinen Sinn. Die Trägheitsmomente sind abermals weder echte noch Quasi-Stokessche Konstante, sondern im Falle der Gleichgewichtsfiguren eindeutig dank der Eindeutigkeit der Massenkongfiguration. Bei dieser Argumentation muß aber nochmals darauf aufmerksam gemacht werden, daß wir es stets nur mit bedingt freien Parametern zu tun haben. Im vorliegenden Falle der Wahl von M und S kommt dies z. B. darin zum Ausdruck, daß h_m jedenfalls beschränkt ist.

Aus dem soeben bewiesenen Satz läßt sich eine wichtige Folgerung ziehen. Jedes Rotationsellipsoid ($a, \alpha, h_m = 0$) ist mögliche Gleichgewichtsfigur einer homogenen Masse mit ganz bestimmter Winkelgeschwindigkeit ω . Zu diesen Stokesschen Elementen gibt es keine zweite Massenkongfiguration im hydrostatischen Gleichgewicht. Wählt man aber zu dem Ellipsoid eine andere Winkelgeschwindigkeit, so läßt jedes derartige neue System Stokesscher Elemente überhaupt keine physikalisch mögliche Lösung zu. Also kann ein Rotationsellipsoid unmöglich Gleichgewichtsfigur einer heterogenen Massenordnung sein. Die einzig möglichen Niveauellipsoide sind die homogenen Maclaurinschen Ellipsoide. Die Lösung des Stokesschen Problemles für das Rotationsellipsoid nach Pizzetti und Somigliana ist zwar potentialtheoretisch einwandfrei, beruht aber auf einer physikalischen Fiktion, welche ihre Berechtigung als praktisch brauchbare Näherungslösung verliert, wenn die hypothesenfreie Bestimmung der Normalfigur der Erde gelungen ist, und zwar auch dann, wenn sich dabei h_m noch so gering herausstellen sollte.

Wir sehen also, daß die Trägheitsmomente niemals Stokessche Konstante sind, was in krassem Widerspruch zu dem klassischen Ergebnis steht, demzufolge die Trägheitsmomente Quasi-Stokessche Konstante sind, die weitgehend unabhängig sind vom Dichtegesetz. Damit sind wir vor die Aufgabe gestellt, den wahren Kern der klassischen Überlegungen herauszuschälen. Für diese Untersuchung ist es von Vorteil, sich an dem Studium der homogenen, Maclaurinschen Ellipsoide zu orientieren, weil für diese auch die Trägheitsmomente und damit die dynamische Abplattung d formelmäßig festliegen, welche im Helmertschen Gleichungssystem natürlich fehlen.

Die Maclaurinschen Ellipsoide der gegebenen gedachten Erdmasse M wurden in der oben zitierten Arbeit¹⁾ eingehend diskutiert. Wegen $0 \leq a < \infty$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ können sie durch die Punkte der (a, α) -Ebene repräsentiert werden. Aus ihnen lassen sich lineare Reihen herausgreifen, wenn jeweils irgendein physikalischer Parameter festgehalten wird. So kann z. B. die Reihe (ω) jener Ellipsoide berechnet werden, die ihre Umdrehung in einem Sterntag vollziehen; oder man findet die Reihe (C) der Figuren, welche mit dem tatsächlichen Erdkörper das Hauptträgheitsmoment C gemeinsam haben. Wegen $C = 0,4.Ma^2$ ist in dieser Reihe auch a konstant, d. h. sie bildet sich als eine Parallele zur α -Achse ab. Ebenso kann auch

die Reihe (K) mit konstanter Differenz der Trägheitsmomente ($C-A$) berechnet werden. Für die folgende Überlegung ist dabei die Tatsache wichtig, daß sich in der Reihe (C) die Rotationsgeschwindigkeit von Figur zu Figur mit K und in der Reihe (K) ähnlich mit C ändert, während sich in der Reihe (ω) C und K fortwährend gesetzmäßig ändern. Man kann diese Reihen auch paarweise zum Schnitt bringen und erhält in den Schnittpunkten eindeutige Maclaurinsche Ellipsoide, was ja auch selbstverständlich ist, weil jedes derartige Ellipsoid ebenso wie durch a und α auch durch zwei passend gewählte physikalische Parameter bestimmt werden kann.

Ähnlich lassen sich jetzt die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren durch die Punkte eines dreidimensionalen „geometrischen“ Koordinatensystems mit den Achsen a , α und h_m darstellen, wobei sich zeigt, daß sie durchwegs nur auf einer Seite der (a, α) -Ebene liegen, d. h. stets $h_m < 0$ ist. Weil jede heterogene Gleichgewichtsfigur durch M und drei weitere Parameter bestimmt ist, erhält man wiederum lineare Reihen, wenn man zwei Parameter festhält. Jede dieser Reihen beginnt in einer der soeben erwähnten homogenen Schnittfiguren und endet bei stetig fortschreitender Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt schließlich in irgendeiner Grenzfigur. Alle Reihen, die durch je zwei physikalische Parameter des tatsächlichen Erdkörpers bestimmt sind, schneiden sich dann in der Normalfigur der Erde, dem sogenannten Normalsphäroid, welches am besten durch M , W_0 , C und ω definiert wird.

Wir lenken unsere Aufmerksamkeit auf die lineare Reihe (ω , C). Nebenbei bemerkt, gehört diese Reihe zu jenen mit konstantem Drehimpuls oder Rotationsmoment ωC , welche möglicherweise für die Entwicklungsgeschichte der Erde von Bedeutung sind und in diesem Sinne als „genetische Reihen“ bezeichnet werden sollen. Andere derartige Reihen findet man, wenn man den gegebenen Drehimpuls mit einem zweiten physikalischen Parameter verknüpft. Die Reihe (ω , C) ist jedenfalls möglich; die durch die zunehmende Massenkonzentration bedingte Verminderung von C wird durch eine fortschreitende Expansion der Figuren kompensiert. Aus der Konstanz von

$$\int x^2 dm = \int y^2 dm$$

folgt wegen

$$(C - A) = MK = \int (x^2 - z^2) dm = \frac{C}{2} - \int z^2 dm$$

sofort

$$\int z^2 dm = \frac{C}{2} - MK. \quad . . . (9)$$

Weil nun eine Änderung von K eine Änderung von $\int z^2 dm$ und damit notwendigerweise eine Änderung von ω nach sich ziehen würde, muß in der Reihe auch K konstant sein. Mithin sind die Reihen (ω , C) und (ω , K) identisch und in der ganzen Reihe beide Trägheitsmomente C und $A = B$ und damit auch die dynamische Abplattung

$$d = (C - A) : C \quad . . . (10)$$

konstant. Dies ist für die hypothesenfreie Bestimmung des Normalsphäroides von

fundamentaler Bedeutung, weil die dynamische Abplattung mit großer Genauigkeit aus der Präzessionskonstanten abgeleitet werden kann²⁾. Trotz der Konstanz der Trägheitsmomente ändert sich in dieser Reihe das Dichtegesetz, d. h. die Abhängigkeit der Dichte vom jeweiligen Äquatorradius a_i der aufeinanderfolgenden inneren Niveaulächen, sehr stark. Es liegt hier also scheinbar eine vollständige Unabhängigkeit der Trägheitsmomente vom Dichtegesetz vor. Dennoch hat dies nichts mit dem Begriff einer Stokesschen Konstanten zu tun. Es handelt sich ja gar nicht um ein System Stokesscher Elemente M , ω und S , sondern eben um die durch M , ω und C definierte Reihe von Gleichgewichtsfiguren S . Hierin liegt die schiefe Auffassung der Trägheitsmomente als Quasi-Stokesscher Konstanten begründet.

Um dies zu beweisen, müssen wir die klassischen Gedankengänge im Lichte der vorstehenden Betrachtungen verfolgen, ohne allerdings die mathematischen Entwicklungen vollständig wiederzugeben.

Wir setzen zunächst eine äußere Niveauläche S einer beliebigen Konfiguration der Masse M voraus, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert. Geht man von den Definitionsgleichungen (6) der im allgemeinen verschiedenen Hauptträgheitsmomente aus, so ergibt sich durch Multiplikation mit $4\pi k^2$ gemäß der Poissonschen Gleichung

$$4\pi k^2 \rho = 2\omega^2 - \Delta W \quad . . . (11)$$

leicht

$$4\pi k^2 C = 4\pi k^2 \int_{\dot{M}} \rho (x^2 + y^2) d\tau = 2\omega^2 \int_{\dot{M}} (x^2 + y^2) d\tau - \int_{\dot{M}} \Delta W (x^2 + y^2) d\tau.$$

Führt man dann in den zweiten Greenschen Satz die Funktionen W und $(x^2 + y^2)$ ein

$$\iint_S [\Delta W (x^2 + y^2) - W \Delta (x^2 + y^2)] d\sigma = \iint_S \left[\frac{\partial W}{\partial n} (x^2 + y^2) - W_S \frac{\partial}{\partial n} (x^2 + y^2) \right] d\sigma$$

und beachtet

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n}; \quad \Delta (x^2 + y^2) = 4;$$

$$\int_{\dot{M}} \Delta (x^2 + y^2) d\tau = \int_S \frac{\partial}{\partial n} (x^2 + y^2) d\sigma = 4 \int_{\dot{M}} d\tau,$$

so folgt

$$4\pi k^2 C = \int_S g (x^2 + y^2) d\sigma + 4 \int_{\dot{M}} (W_S - W) d\tau + 2\omega^2 \int_{\dot{M}} (x^2 + y^2) d\tau. \quad . (12)$$

Analoge Gleichungen ergeben sich für die beiden anderen Trägheitsmomente und man kann drei Differenzen bilden, z. B.³⁾

$$4\pi k^2 (C - A) = \int_S g (x^2 - z^2) d\sigma + 2\omega^2 \int_{\dot{M}} (x^2 - z^2) d\tau. \quad . . . (13)$$

²⁾ K. Ledersteger: „Die geometrischen und physikalischen Daten des Normalsphäroides der Erde“, Sitz. Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Klasse, 1959, Seite 23–39.

³⁾ R. Wave: „Figures planétaires et géodésie“, Paris 1932, Seite 43.

Da mit der Niveaufläche S und dem Außenraumpotential auch die Schwereverteilung g auf S festliegt, lehrt (13) tatsächlich, daß die Differenzen der Trägheitsmomente echte Stokessche Konstante sind. Sind die Stokesschen Elemente so gewählt, daß S die freie Oberfläche der einzig möglichen Gleichgewichtsfigur ist, wobei natürlich überdies Rotationssymmetrie ($A = B$) vorausgesetzt werden muß, so kann man wohl sagen, daß auch in diesem Spezialfall die Differenz ($C - A$) vom Dichtegesetz $\rho_i = f(a_i)$ unabhängig ist. Doch bedeutet dies nicht mehr die Möglichkeit verschiedener Massenanordnungen, also verschiedener zugehöriger Dichtegesetze, sondern bloß, daß ($C - A$) eine Funktion der Stokesschen Elemente ist. Wirklich ist mit der freien Wahl von M und $S = (a, \alpha, h_m)$ eine Gleichgewichtsfigur mit ihren sämtlichen physikalischen Daten eindeutig festgelegt. Das Dichtegesetz der Figur ist, auch wenn seine mathematische Formulierung auf Schwierigkeiten stoßen sollte, ebenso wie z. B. ihre Rotationsgeschwindigkeit und ihre Trägheitsmomente völlig bestimmt. Bei Beschränkung auf Gleichgewichtsfiguren sind die Stokesschen Konstanten nicht mehr Integralvarianten für verschiedene mögliche Massenanordnungen, sondern ganz im Sinne der ursprünglichen Wavreschen Definition bloße Funktionen der Stokesschen Elemente, mithin explizit unabhängig von dem, die Gleichgewichtsfigur aufbauenden eindeutigen Dichtegesetz.

Für jede der ∞^3 sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren der vorgegebenen Masse M ist die Dichte eindeutig in Funktion der Äquatorradien a_i der inneren Niveauflächen, welche sich schalenartig umschließen, bestimmt. Die Funktion $\rho_i = f(a_i)$ braucht keineswegs stetig zu sein; sicher darf aber ρ_i mit wachsendem a_i niemals zunehmen. Für die ∞^2 homogenen, Maclaurinschen Ellipsoide nimmt das Dichtegesetz seine einfachste Form an: $\rho = \rho_m$; jede Schar volumgleicher Ellipsoide ist durch dasselbe ρ_m charakterisiert. Nicht so einfach liegen die Verhältnisse bei den heterogenen Figuren. Denn da die sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren durch drei geometrische Parameter gekennzeichnet sind, muß es unter ihnen stets ∞^2 volumgleiche Figuren geben. Es gibt also bereits ∞^2 Dichteverteilungen, die auf den gleichen Mittelwert ρ_m führen. Bemerkenswert ist dabei, daß die linearen Reihen (ω, W_0) durch eine weitgehende, jedoch nicht völlig strenge Volumgleichheit ausgezeichnet sind⁴⁾. Jede sphäroidische Gleichgewichtsfigur hat also ihr individuelles Dichtegesetz, entsprechend ihrer streng eindeutigen Massenanordnung. Ausgehend vom Falle der Homogenität entstehen die heterogenen Gleichgewichtsfiguren durch irgendwelche fortschreitende Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt, welche selbst wieder auf die verschiedenartigste Weise mit einer Expansion oder Kontraktion der Figur verbunden sein kann. Die weite Spanne von der Homogenität bis zur völligen Massenkonzentration im Schwerpunkt ist natürlich keine lineare Reihe.

Wo in jeder, durch zwei physikalische Parameter bestimmten linearen Reihe die zweite Grenze der reellen Gleichgewichtsfiguren liegt, bedarf noch einer schwierigen mathematischen Analyse. In der Reihe (ω, W_0) können wir ohne Ansatz der Gleichgewichtsbedingung bis zum Massenpunkt fortschreiten⁴⁾. Der tiefere Grund

⁴⁾ K. Ledersteger: „Die gravimetrische Methode zur Bestimmung der Erdfigur“, Sitzungsber. d. Bayer. Adka. d. Wiss., Math.-nat.-KL., München. 1958, Seite 117–136.

hierfür liegt darin, daß jede Lösung des Helmerischen Gleichungssystems im allgemeinen gerade eine Massenkonfiguration im Gleichgewicht entspricht, für welche die gegebene oder berechnete Niveaulfläche $S = (a, \alpha, h_m)$ freie Oberfläche oder äußere Niveaulfläche ist, und daß das zugehörige „Sphäroid der größten Massenkonzentration“ wegen der dem Massenpunkt zukommenden Größen $K = D = 0$ aus dem Helmerischen System eindeutig berechnet werden kann. Somit kann die heterogene Reihe (ω, W_0) über ihre gar nicht bekannte wirkliche Grenzfigur hinaus bis zum Sphäroid der größten Massenkonzentration fortgesetzt werden. Dies müßte selbstverständlich auch bei anderen linearen Reihen möglich sein, sofern nicht ein von Null verschiedener Wert von K oder D festgehalten werden soll. Doch empfiehlt es sich nicht, wie üblich das Volumen des Sphäroides des rotierenden Massenpunktes, der selbst eine Fiktion ist, noch fiktiv mit Flüssigkeitsmasse der Dichte Null ausgefüllt zu denken. Denn dies müßte dann auch für alle übrigen Figuren jenseits der reellen Grenzfigur gelten; alle ∞^4 Lösungen des Helmerischen Gleichungssystems für die gegebene Masse M wären gleichberechtigt, d. h. alle Systeme Stokesscher Elemente im Widerspruch zur Gleichgewichtsbedingung frei wählbar. Man kann das Ergebnis auch so formulieren: das Fehlen der Gleichgewichtsbedingung im Helmerischen System hat zur Folge, daß sich als Lösungen nicht nur die ∞^3 sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren, sondern auch jeweils die ganze Schar der äußeren Niveaulflächen ergibt. Jede Figur S mit einem von Null verschiedenem h_m ist im allgemeinen äußere Niveaulfläche von unendlich vielen Massenkonfigurationen im hydrostatischen Gleichgewicht mit verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten und speziell für einen ganz bestimmten Grenzwert von ω die freie Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur.

Bei Vernachlässigung des Quadrates der Abplattung ist es verhältnismäßig leicht, die klassischen Näherungsausdrücke für die Masse und die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur abzuleiten, wobei wir im wesentlichen der ausgezeichneten Darstellung bei Lense⁵⁾ folgen. Wir setzen für die inneren Niveaulflächen die Polargleichung

$$l = a(1 - \alpha \cos^2 \psi)$$

an, welche mit dem Legendreschen Polynom $P_2(\cos \psi) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \psi - 1)$ in

$$l = a \left[1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{2}{3} \alpha P_2(\cos \psi) \right] = r \left[1 - \frac{2}{3} \alpha P_2(\cos \psi) \right] \quad \dots (14)$$

übergeht, wobei jetzt $r = a \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right)$ der Radius der mit dem Sphäroid volumgleichen Kugel ist. Die Gleichgewichtsbedingung besagt nun, daß die Flächen gleicher Dichte mit den Niveaulflächen zusammenfallen oder daß die Dichte ρ eine reine Funktion von a oder von r ist.

Die Massenpunkte haben die Koordinaten

$$x = l \sin \psi \cos \lambda; \quad y = l \sin \psi \sin \lambda; \quad z = l \cos \psi \quad \dots (15)$$

⁵⁾ J. Lense: „Kugelfunktionen“, Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Bd. 23, Leipzig 1950, Seite 214–226.

und das Volumenelement ist daher $l^2 \sin \psi \, d\psi \, d\lambda \, dl$. Schreibt man abkürzend das über die Einheitskugel erstreckte Integral

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \sin \psi \, d\psi = \int d\tau$$

so findet man für die Masse des Sphäroides

$$\begin{aligned} M &= \int \rho \, d\tau = \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^2 \, dl = \int d\sigma \int_0^{r_0} \rho l^2 \frac{\partial l}{\partial r} \, dr = \frac{1}{3} \int d\sigma \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial l^3}{\partial r} \, dr = \\ &= \frac{1}{3} \int d\sigma \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \left(1 - 2 \alpha P_2 \right) \right] \, dr = 4 \pi \int_0^{r_0} \rho r^2 \, dr, \quad \dots (16) \end{aligned}$$

weil wegen der bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunktionen das über die Einheitskugel erstreckte Integral von P_2 verschwindet. Die oberen Integralgrenzen in (16) sind mit dem Index 0 versehen, um anzudeuten, daß sie für die Oberfläche gelten.

Wir wenden uns den Trägheitsmomenten zu und finden unmittelbar

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \int \rho (x^2 + y^2 + z^2) \, d\tau = 2 \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^4 \, dl \\ A + B - C &= 2 \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^2 z^2 \, dl, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^2 (l^2 + z^2) \, dl \\ C &= \int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^2 (l^2 - z^2) \, dl. \end{aligned}$$

folgt. Mit

$$z^2 = l^2 \cos^2 \psi = \frac{l^2}{3} \left[1 + 2 P_2 (\cos \psi) \right]$$

wird

$$\int_0^{l_0} \rho l^2 z^2 \, dl = \frac{1}{3} (1 + 2 P_2) \int_0^{l_0} \rho l^4 \, dl$$

und weiter mit (14)

$$\int_0^{l_0} \rho l^4 \, dl = \int_0^{r_0} \rho l^4 \frac{\partial l}{\partial r} \, dr = \frac{1}{5} \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial l^5}{\partial r} \, dr = \frac{1}{5} \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial}{\partial r} \left[r^5 \left(1 - \frac{10}{3} \alpha P_2 \right) \right] \, dr.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich, abermals wegen $\int P_2 d\sigma = 0$,

$$\int d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^4 dl = 4\pi \int_0^{r_0} \rho r^4 dr$$

und

$$\int P_2 d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^4 dl = -\frac{2}{3} \int P_2^2 d\sigma \int_0^{r_0} \rho \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^5) dr.$$

Beachtet man noch die ebenfalls aus den Integraleigenschaften der Kugelfunktionen folgende Relation

$$\int P_2^2 d\sigma = \frac{4\pi}{5},$$

so wird schließlich:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{3} \int (2 + P_2) d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^4 dl = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_0} \rho r^4 dr - \frac{8\pi}{45} \int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^5) dr, \\ C &= \frac{2}{3} \int (1 - P_2) d\sigma \int_0^{l_0} \rho l^4 dl = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_0} \rho r^4 dr + \frac{16\pi}{45} \int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^5) dr. \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

Wie in (13) ganz allgemein bewiesen wurde, ist die Differenz der Trägheitsmomente eine echte Stokessche Konstante. Es muß daher auch der aus (17) im Falle des hydrostatischen Gleichgewichtes folgende Ausdruck

$$C - A = \frac{8\pi}{15} \int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^5) dr \quad \dots (18)$$

eine reine Funktion der Stokesschen Elemente M , $S = (a, \alpha, h_m)$ und ω sein. Wäre $\omega = 0$, dann hätten wir die ruhende, homogene oder beliebig geschichtete Kugel vor uns. Die Fläche S wäre ebenso wie alle inneren Niveaulächen eine Kugelfläche, d. h. es wäre stets $\alpha = 0$ und

$$A = B = C = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_0} \rho r^4 dr. \quad \dots (19)$$

Der Wert dieses Integrales hängt aber sehr wesentlich vom angenommenen Dichtegesetz $\rho = \rho(r)$ ab, d. h. das Integral ist weit entfernt von einer Stokesschen Konstanten. (19) gilt völlig streng. Hingegen muß nochmals betont werden, daß bei den Zusatzgliedern in (17) und damit auch in (18) das Quadrat der Abplattung vernachlässigt ist.

Mit demselben Grade der Annäherung läßt sich für die Gleichgewichtsfiguren eine Beziehung herleiten, welche die Abplattung der inneren Niveaulächen in Funktion des mittleren Radius r liefert, wenn die Dichte als Funktion von r gegeben ist. Es ist dies die berühmte Differentialgleichung von Clairaut

$$\frac{d^2\alpha}{dr^2} + 2 \frac{\rho r^2}{\mu} \frac{d\alpha}{dr} + 2\alpha \left(\frac{\rho r}{\mu} - \frac{3}{r^2} \right) = 0. \quad \dots (20)$$

Hierin bedeutet

$$\mu = \int_0^r \rho r^2 dr, \quad \dots (21)$$

d. h. gemäß (16) die durch 4π dividierte, von der laufenden Niveaufläche r eingeschlossene Teilmasse. Hat diese Teilmasse die mittlere Dichte D , so ist auch

$$\mu = \frac{r^3}{3} D, \quad \dots (21a)$$

also

$$\frac{d\mu}{dr} = \rho r^2 = D r^2 + \frac{r^3}{3} \frac{dD}{dr},$$

d. h. es besteht folgende Beziehung zwischen der Dichte ρ beim Radius r und der mittleren Dichte D innerhalb dieses Radius:

$$\rho = D + \frac{r}{3} \frac{dD}{dr}. \quad \dots (22)$$

Wegen der nach außen niemals zunehmenden Dichte ist die Ableitung dD/dr wesentlich negativ.

In der neuen Variablen D lautet die Clairautsche Differentialgleichung

$$\left[r^2 \frac{d^2\alpha}{dr^2} + 6r \frac{d\alpha}{dr} \right] D + 2 \left[r^2 \frac{d\alpha}{dr} + \alpha r \right] \frac{dD}{dr} = 0. \quad \dots (20a)$$

Zur weiteren Transformation führen wir mit Radau⁶⁾ die Größe

$$\lambda = \frac{r}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr}. \quad \dots (24)$$

ein und erhalten:

$$\left[r \frac{d\lambda}{dr} + \lambda^2 + 5\lambda \right] D + 2r(1 + \lambda) \frac{dD}{dr} = 0 \quad \dots (20b)$$

oder

$$\frac{d}{dr} \left(D \sqrt{1 + \lambda} \right) + \frac{5\lambda + \lambda^2}{2r\sqrt{1 + \lambda}} D = 0. \quad \dots (20c)$$

Differenziert man jetzt den Ausdruck $r^5 D \sqrt{1 + \lambda}$ nach r :

$$5r^4 D \sqrt{1 + \lambda} + r^5 \frac{d}{dr} \left(D \sqrt{1 + \lambda} \right),$$

so findet man unter Benützung von (20c) leicht:

$$\frac{d}{dr} \left(r^5 D \sqrt{1 + \lambda} \right) = 5r^4 D \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{10}\lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda}} \right). \quad \dots (25)$$

⁶⁾ R. R. Radau: „Sur le loi des densités à l'intérieur de la terre“, Academie Sciences, Paris, Comptes rendus, Bd. C, 1885, Seite 972.

Bezeichnet man den Bruch rechterhand kurz mit $F(\lambda)$, so erkennt man sofort, daß

$$F(\lambda) = 1 + \frac{1}{40} \lambda^2 - \frac{3}{40} \lambda^3 \dots \quad \dots (26)$$

noch für verhältnismäßig große Werte von λ nahe bei 1 liegt.

Wir müssen daher zunächst die Funktion λ diskutieren. Für den Wert λ_0 an der Oberfläche einer sphäroidischen Gleichgewichtsfigur finden wir aus den Helmerischen Gleichungen

$$\frac{3K}{a^2} \sim (2\alpha - \varepsilon) \text{ oder } \alpha \sim \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{3K}{2a^2}; \quad \varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} \sim \frac{\omega^2 a^3}{k^2 M}$$

durch Differentiation

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{da} - \frac{3K}{a^3}; \quad \frac{d\varepsilon}{da} = \frac{3\varepsilon}{a},$$

also

$$a \frac{d\alpha}{da} = \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{3K}{a^2} = \frac{5}{2} \varepsilon - 2\alpha$$

und im Hinblick auf (24)

$$\lambda_0 = \frac{5}{2} \frac{\varepsilon_0}{\alpha_0} - 2. \quad \dots (27)$$

Für jedes homogene Maclaurinsche Ellipsoid gilt nun $\varepsilon = \frac{4}{5} \alpha + \dots$, d. h. mit dem gewünschten Genauigkeitsgrad $\lambda_0 = 0$. Übrigens sind die inneren Niveauflächen des homogenen Ellipsoides homothetische und konzentrische Ellipsoide ($\lambda = 0$), während andererseits für jede sphäroidische Gleichgewichtsfigur die Abplattung der äußeren Niveauflächen mit zunehmender Erhebung über die freie Oberfläche allmählich anwächst, was natürlich durch die Zunahme der Fliehkraft im Äquator bedingt ist. Wie schon erwähnt, können wir nur in der Reihe (ω, W_0) der sogenannten „benachbarten Geoide“ das zugehörige Sphäroid der größten Massenkonzentration angeben, für welches das in der Reihe fast gänzlich konstante $\varepsilon = 2\alpha + \dots$ ist, so daß sich $\lambda_0 = 3$ ergibt. Demnach stellt λ_0 ein Charakteristikum der Massenverdichtung gegen den Schwerpunkt dar. Für das aus der mechanischen Abplattung abgeleitete Normalsphäroid der Erde ⁷⁾ ist $\varepsilon = 34\,6782 \cdot 10^{-8}$ und $\alpha = 1:297,346 = 33\,6309 \cdot 10^{-8}$, also $\lambda_0 = 0,57785$, woraus $F(\lambda_0) = 0,99388$ folgt.

Auch im Innern jeder sphäroidischen Gleichgewichtsfigur wird λ mit zunehmendem Radius r von 0 bis zum Oberflächenwert λ_0 anwachsen, d. h. es ist stets $(d\alpha/dr) \geq 0$. Die Funktion $F(\lambda)$ wächst dabei zuerst von 1 bis zum Maximalwert 1,00074 bei $\lambda = 1/3$ an, um sodann bis auf 0,8 für $\lambda = 3$ abzunehmen. Speziell für das Normalsphäroid der Erde ist der Minimalwert von $F(\lambda)$ an der Oberfläche 0,99388, so daß wir mit guter Näherung für die Integration von (25) $F(\lambda) = 1$ setzen dürfen. Hierin ist der große Vorteil der Radauschen Transformation gelegen.

⁷⁾ K. Ledersteiger: „Die geometrischen und physikalischen Daten des Normalsphäroides der Erde“, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Klasse, 1959, Seite 23–39.

Nunmehr schreiten wir an die Berechnung des Hauptintegrals von (17). Wir führen mittels (22) an Stelle von ρ die neue Variable D ein und wenden dann im zweiten Summanden partielle Integration an:

$$\int_0^{r_0} \rho r^4 dr = \int_0^{r_0} D r^4 dr + \frac{1}{3} \int_0^{r_0} r^5 dD = \int_0^{r_0} D r^4 dr + \\ + \frac{1}{3} \left[r^5 D \Big|_0^{r_0} - 5 \int_0^{r_0} D r^4 dr \right] = \frac{1}{3} D_0 r_0^5 - \frac{2}{3} \int_0^{r_0} D r^4 dr.$$

Andererseits folgt aus (25), wenn man $F(\lambda) = 1$ setzt, das Integral

$$r^5 D \sqrt{1 + \lambda} \Big|_0^{r_0} = r_0^5 D_0 \sqrt{1 + \lambda_0} = 5 \int_0^{r_0} D r^4 dr$$

und damit

$$\int_0^{r_0} \rho r^4 dr = \frac{1}{3} D_0 r_0^5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} D_0 r_0^5 \sqrt{1 + \lambda_0} = \frac{1}{3} \rho_m r_0^5 \left[1 - \frac{2}{5} \sqrt{1 + \lambda_0} \right],$$

wenn man bedenkt, daß D_0 die mittlere Dichte ρ_m des Gesamtkörpers darstellt. Führt man noch den Wert (27) für λ_0 ein, so ergibt sich endgültig

$$\int_0^{r_0} \rho r^4 dr = \frac{1}{3} \rho_m r_0^5 \left[1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5 \epsilon_0}{2 \alpha_0} - 1} \right]. \quad \dots (28)$$

Zusammen mit

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_m a^2 c = \frac{4}{3} \pi \rho_m r_0^3$$

und der Helmerischen Gleichung

$$\frac{K}{a^2} \sim \frac{2}{3} \left(\alpha_0 - \frac{\epsilon_0}{2} \right) \sim \frac{C - A}{M r_0^2}$$

folgt schließlich aus (17) und (18) für das Hauptträgheitsmoment C :

$$C = \frac{2}{3} M r_0^2 \left[1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5 \epsilon_0}{2 \alpha_0} - 1} + \frac{2}{3} \left(\alpha_0 - \frac{\epsilon_0}{2} \right) \right] \quad \dots (29)$$

und für den Reziprokwert der dynamischen Abplattung

$$\frac{C}{C - A} = \frac{1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5 \epsilon_0}{2 \alpha_0} - 1}}{\alpha_0 - \frac{\epsilon_0}{2}}. \quad \dots (30)$$

Da ϵ eine Stokessche Konstante ist, ist damit gezeigt, daß die Trägheitsmomente selbst reine Funktionen der Stokesschen Elemente sind. Man hat sie deshalb und im Hinblick auf die Vernachlässigung der Größen von der Ordnung des Quadrates der Abplattung sowie wegen der Näherung $F(\lambda) = 1$ als „Quasi-Stokessche Konstante“ bezeichnet. In Wahrheit aber sind die Trägheitsmomente durch die Gesamtmasse M und die Gestalt S der freien Oberfläche eindeutig und streng bestimmt und man darf nicht den irrigen Schluß ziehen, daß es sich dabei um Integralinvarianten für verschiedene mögliche Massenanordnungen handelt.

Diese schiefe Auffassung wurde dadurch begünstigt, daß man mit Hilfe von (30) oder unter bestimmten Annahmen für das Dichtegesetz die geometrische Abplattung α aus der genaueren dynamischen Abplattung herleiten wollte. Hat man nämlich bloß das Normalsphäroid der Erde im Sinne, so liefert (30) mit festgehaltenem $\epsilon_0 = 34\,6782 \cdot 10^{-8}$ zu versuchsweise angenommenen, verschiedenen geometrischen Abplattungen die zugehörige dynamische Abplattung:

1: $\alpha = 299,00$; $C : (C - A) = 307,51$
298,00	306,23
297,49	305,59
297,00	304,96
296,00	303,69
295,00	302,43

In diese kleine Tabelle wurde auch die Abplattung 1:297,49 aufgenommen, welche auf den derzeit besten Wert⁸⁾ für die dynamische Abplattung führt.

Die erwähnte, scheinbar sehr weitgehende Unabhängigkeit der zusammengehörigen Wertepaare α und $(C - A)$: C vom Dichtegesetz ist in Wirklichkeit darauf zurückzuführen, daß wir es bei Variation von α mit verschiedenen Figuren der Reihe $(\omega, K) = (\omega, C)$ zu tun haben, in welcher mit den Trägheitsmomenten auch die dynamische Abplattung völlig konstant ist und in der die zunehmenden Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt mit einer sehr beträchtlichen Expansion der Figuren, hingegen mit einer auffallend geringen Zunahme der geometrischen Abplattung verbunden ist. Es sei dies durch die Berechnung der Figuren mit den gleichen Abplattungswerten wie in der vorhergegangenen Tabelle erwiesen.

Mit den aus der dynamischen Abplattung 1:305,59 abgeleiteten Ausgangswerten⁷⁾

$$\begin{aligned} M &= 5976,267 \cdot 10^{24} \text{ g} ; K = 44\,327,7 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 ; \\ \omega &= 7\,292\,116 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}, \text{ also} \\ \omega^2 &= 5\,317\,496 \cdot 10^{-15} \text{ sec}^{-2}, \end{aligned}$$

zu denen speziell für das Normalsphäroid der Erde noch

$$\alpha = 6\,378\,290 \text{ m} ; \beta_4 = + 2752 \cdot 10^{-8}$$

tritt, lassen sich vorerst das homogene Ausgangsellipsoid der Reihe (ω, K) und das Normalsphäroid gegenüberstellen:

⁸⁾ E. C. Bullard: „The Figure of the Earth“, Monthly Notices Royal Astron. Society, Geophys. Suppl., vol. 5, no. 6, 1948.

homogenes Ellipsoid	Normalsphäroid
$\alpha \left\{ \begin{array}{l} = 1:305,088 \\ = 32\,7774 \cdot 10^{-8} \end{array} \right.$	1:297,346 $33\,6309 \cdot 10^{-8}$
$a = 5\,819\,390 \text{ m}$	6 378 290 m
$h^m = 0$	- 2,09 m
$\varepsilon = 26\,3069 \cdot 10^{-8}$	$34\,6782 \cdot 10^{-8}$
$W_0 = 6\,849\,902 \cdot 10^{-5}$	$6\,263\,818 \cdot 10^{-5}$
$\rho m = 7,263$	5,517
$K/a^2 = 13\,0894 \cdot 10^{-8}$	$10\,8960 \cdot 10^{-8}$
$\delta = +1612 \cdot 10^{-8}$	+ 1177 $\cdot 10^{-8}$
$\gamma_0 = 1076,357 \text{ gal}$	978,037 gal
$\beta = 32\,8852 \cdot 10^{-8}$	$52\,9268 \cdot 10^{-8}$
$\beta_4 = +1612 \cdot 10^{-8}$	+ 2752 $\cdot 10^{-8}$
$C:(C-A) = 305,09$	305,40
$q = 0,40000$	0,33 297

Man sieht hieraus, daß die Achse a vom homogenen Ellipsoid bis zum Normalsphäroid um 558 900 m zunimmt, während die Abplattung bloß um $8535 \cdot 10^{-8}$ anwächst. Die geringste Veränderlichkeit zeigt die Größe δ , welche auf diesem weiten Wege nur um $435 \cdot 10^{-8}$ abnimmt. Lineare Interpolation von δ vermag daher die im Helmertschen Gleichungssystem fehlende Gleichgewichtsbedingung zu ersetzen und wir erhalten für die obigen runden Reziprokwerte der Abplattung folgende Gleichgewichtsfiguren:

Gleichgewichtsfiguren der Reihe $(\omega, K) = (\omega, C)$ in der weiteren Umgebung des Normalsphäroides der Erde

1: α	299	298	297	296	295
α	$33\,4448 \cdot 10^{-8}$	$33\,5570 \cdot 10^{-8}$	$33\,6700 \cdot 10^{-8}$	$33\,7838 \cdot 10^{-8}$	$33\,8983 \cdot 10^{-8}$
a	6 312 121 m	6 352 863 m	6 391 165 m	6 427 444 m	6 462 085 m
h_m	- 1,90 m	- 2,02 m	- 2,13 m	- 2,24 m	- 2,34 m
ε	$33\,6058 \cdot 10^{-8}$	$34\,2638 \cdot 10^{-8}$	$34\,8902 \cdot 10^{-8}$	$35\,4905 \cdot 10^{-8}$	$36\,0701 \cdot 10^{-8}$
W_0	$6\,329\,217 \cdot 10^{-5}$	$6\,288\,787 \cdot 10^{-5}$	$6\,251\,252 \cdot 10^{-5}$	$6\,216\,114 \cdot 10^{-5}$	$6\,182\,933 \cdot 10^{-5}$
ρm	5,692	5,583	5,483	5,391	5,305
K/a^2	$11\,1256 \cdot 10^{-8}$	$10\,9834 \cdot 10^{-8}$	$10\,8521 \cdot 10^{-8}$	$10\,7300 \cdot 10^{-8}$	$10\,6152 \cdot 10^{-8}$
δ	+ 1228 $\cdot 10^{-8}$	+ 1197 $\cdot 10^{-8}$	+ 1167 $\cdot 10^{-8}$	+ 1139 $\cdot 10^{-8}$	+ 1112 $\cdot 10^{-8}$
γ_0	998,791 gal	985,935 gal	974,073 gal	963,033 gal	952,664 gal
β	$50\,4368 \cdot 10^{-8}$	$51\,9666 \cdot 10^{-8}$	$53\,4168 \cdot 10^{-8}$	$54\,8010 \cdot 10^{-8}$	$56\,1328 \cdot 10^{-8}$
β_4	+ 2620 $\cdot 10^{-8}$	+ 2701 $\cdot 10^{-8}$	+ 2778 $\cdot 10^{-8}$	+ 2852 $\cdot 10^{-8}$	+ 2922 $\cdot 10^{-8}$
$C:(C-A)$	305,34	305,37	305,41	305,45	305,49
q	0,33 999	0,33 564	0,33 163	0,32 790	0,32 439

Zur Berechnung der kleinen Tabelle sei noch kurz bemerkt: die Figuren ergeben sich wesentlich bequemer, wenn an Stelle der Abplattung die Achse gegeben ist. Es wurden daher äquidistante Figuren mit einem Achsenabstand von 50 km berechnet; dementsprechend mußte die Interpolation von δ mit den Achsenwerten erfolgen. Durch Verdichtung der erhaltenen Reihe mittels zweimaliger Interpolation in die Mitte konnten die zweiten Differenzen so klein gemacht werden, daß die gewünschten Figuren mit den runden Reziprokwerten der Abplattung sicher linear interpoliert werden konnten. Es zeigte sich, daß die Änderungen von Achse und Abplattung in der Reihe keineswegs proportional verlaufen. Während für die Spanne vom homogenen Ausgangsellipsoid bis zum Normalsphäroid einer Änderung des Reziprokwertes der Abplattung um eine Einheit eine durchschnittliche Änderung der Achse um 70 km entspricht, sinkt dieser Durchschnittswert für den Bereich der Tabelle bereits auf 37,5 km ab. Somit hätte die Interpolation von δ mit den Abplattungswerten etwas andere Ergebnisse geliefert; doch kann der Unterschied einige Einheiten der 7. Dezimale nicht übersteigen.

Die verhältnismäßig kleine Zunahme der Abplattung von 1:299 bis 1:295 ist mit einer Achsenvergrößerung von 150 km verbunden. Man erkennt, welcher gewaltiger Fortschritt in der Massenkonzentration erforderlich ist, um trotz dieser beträchtlichen Expansion der Figuren das Trägheitsmoment C ungeändert zu lassen. So und nur so ist die behauptete weitgehende Unabhängigkeit der Trägheitsmomente vom Dichtegesetz zu verstehen. Die berechnete Figurenreihe eröffnet ferner auch die Möglichkeit, die Güte der Formel (30) einwandfrei zu prüfen. In ihr ist ja die dynamische Abplattung in Funktion von α und ϵ gegeben. Mit den zusammengehörigen Wertepaaren dieser Größen müßte sie stets 305,59 liefern. Wegen der Vernachlässigungen ergeben sich aber etwas kleinere Beträge, die außerdem mit wachsender Abplattung langsam zunehmen. Für das Normalsphäroid ist der Fehler 0,19, also nur $0,620/100$. Da schließlich für das homogene Ellipsoid das Trägheitsmoment C durch die Formel $C = 0,4 \cdot Ma^2$ bestimmt ist, sind in der letzten Zeile der Tabelle die Faktoren q gemäß dem allgemeinen Ansatz $C = q Ma^2$ ausgewiesen.

Mit der Figurenreihe (ω , C) dürfte das so paradox anmutende klassische Resultat von den Trägheitsmomenten als Quasi-Stokesschen Konstanten auf seine wahre Ursache zurückgeführt sein. Wohl sind die Trägheitsmomente im Falle des hydrostatischen Gleichgewichtes eindeutige Funktionen der Stokesschen Elemente dank der Eindeutigkeit der zugehörigen Massenkonfiguration. Niemals aber sind sie Stokessche Konstante im Sinne von Integralinvarianten für alle zu einem System Stokesscher Elemente gehörigen unendlich vielen Massengruppierungen. Hingegen ändert sich in der genannten Reihe die Abplattung auffallend gering und auch ϵ in dem uns interessierenden Bereich der Tabelle nur um knapp $25 \cdot 10^{-5}$. Man versteht somit, daß auch die unberechtigte Anwendung der Formel (30) die weitgehende Unabhängigkeit vom Dichtegesetz klar zum Ausdruck bringen mußte. Doch dies hat, wie wohl zur Genüge gezeigt wurde, überhaupt nichts mit dem Wavreschen Begriff der Stokesschen Konstanten zu tun.

Die Bestimmungsstücke der Normalschnittellipse

Von Karl Hubeny, Graz

Auf einem Rotationsellipsoid sei ein Punkt P_0 gegeben; durch diesen verlaufend wird unter dem Azimut α eine Normalschnittebene angenommen. Wir stellen die Frage nach den Bestimmungsstücken der Normalschnittellipse.

Zunächst sei mit dem Ursprung im Mittelpunkt M des Rotationsellipsoids ein Koordinatensystem x, y, z angenommen, welches wir nach Abb. 1 so orientieren, daß seine xz -Ebene mit der Meridianebene durch P_0 zusammenfällt; die z -Achse enthält die Rotationsachse des Ellipsoids. Weiters verlegen wir — der Punkt P_0 sei durch geographische Koordinaten φ_0, λ_0 gegeben — die Ebene $\lambda = 0$ ebenfalls in die xz -Ebene, so daß sich mit den Bestimmungsstücken a und e des Rotationsellipsoids (große Halbachse und 1. Exzentrizität), ausgedrückt durch den Parameter φ , für P_0 die cartesischen Koordinaten

$$x_0 = \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = \frac{a}{W_0} (1 - e^2) \sin \varphi_0 \quad . . . (1)$$

ergeben. In diese Formeln ist die bekannte Hilfsfunktion $W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$ eingeführt.

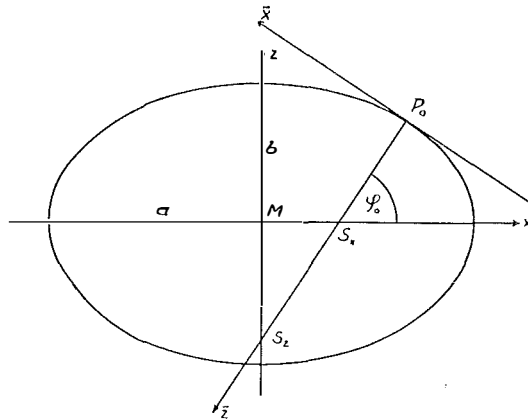


Abb. 1

Im Punkt P_0 denken wir uns die Tangente an die Meridianellipse, in die wir die \bar{x} -Achse eines zweiten Koordinatensystems $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ mit dem Ursprung in P_0 legen. Die Orientierung dieses Systems wählen wir so, daß die positive \bar{z} -Achse in das Innere des Rotationsellipsoids, die positive \bar{x} -Achse gegen den Pol hin zeigt.

Zwischen den Koordinaten x, y, z und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ eines in beiden Systemen gegebenen Punktes P bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -(x - x_0) \sin \varphi_0 + (z - z_0) \cdot \cos \varphi_0 \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= -(z - z_0) \sin \varphi_0 - (x - x_0) \cdot \cos \varphi_0 \quad . . . (2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x &= x_0 - \bar{x} \sin \varphi_0 - \bar{z} \cos \varphi_0 \\y &= \bar{y} \\z &= z_0 - \bar{z} \sin \varphi_0 + \bar{x} \cos \varphi_0 .\end{aligned} \quad . . . (3)$$

Als Vorbereitung für die weitere Rechnung bestimmen wir die Koordinaten des Schnittpunktes S_x der \bar{z} -Achse, d. h. der Flächennormalen durch P_0 , mit der x -Achse des Koordinatensystems x, y, z . Indem wir dazu in (2) für x_0 und z_0 die Werte aus (1) eingetragen und weiter $x = z = 0$ setzen, finden wir für den Ursprung M des Koordinatensystems x, y, z , d. h. für den Mittelpunkt des Rotationsellipsoids, die Koordinaten im quergestrichenen System mit

$$\begin{aligned}\bar{x}_M &= e^2 \frac{a}{W_0} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\ \bar{y}_M &= 0 \\ \bar{z}_M &= a \cdot W_0 .\end{aligned} \quad . . . (4a, b, c)$$

Der Ausdruck (4a) gibt den Normalabstand des Ellipsoidmittelpunktes von der Flächennormalen durch P_0 , der Ausdruck (4c) den Normalabstand des Ellipsoidmittelpunktes von der Meridiantangente in P_0 oder allgemeiner von der Tangentenebene in P_0 an. Der geozentrische Radius R_g müßte sich demnach aus

$$R_g^2 = \bar{x}_M^2 + \bar{z}_M^2 = \frac{a^2}{W_0^2} (e^4 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 + W_0^4)$$

ergeben, was mit dem bekannten Wert

$$R_g^2 = \frac{a^2}{W_0^2} (1 - 2 e^2 \sin^2 \varphi_0 + e^4 \sin^2 \varphi_0) \quad . . . (5)$$

tatsächlich übereinstimmt.

Der gesuchte Abstand des Schnittpunktes S_x der \bar{z} -Achse mit der x -Achse vom Ellipsoidmittelpunkt M ist nun mit

$$\overline{MS_x} = \frac{\bar{x}_M}{\sin \varphi_0} = x_{S_x} = e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \quad . . . (6)$$

gegeben; als weiteres Ergebnis finden wir auch den Abstand des Ellipsoidmittelpunktes vom Schnittpunkt S_z der Flächennormalen durch P_0 mit der z -Achse aus

$$\overline{MS_z} = \overline{MS_x} \operatorname{tg} \varphi_0 = \bar{z}_{S_z} = -e^2 \frac{a}{W_0} \sin \varphi_0 \quad . . . (7)$$

$$\operatorname{sgn} z_{S_z} = -\operatorname{sgn} z_0 .$$

Wir gehen nunmehr zur Betrachtung der Normalschnitte durch P_0 über. Ein unter Azimut α durch P_0 verlaufender Normalschnitt wird bekanntlich durch eine Ebene erzeugt, die die Flächennormale in P_0 enthält und mit der $\bar{x}\bar{z}$ -Ebene den Winkel α einschließt. Die Schnittspur dieser Ebene mit der $\bar{x}\bar{y}$ -Ebene weist daher — wir betrachten das Ellipsoid von außen — in der $\bar{x}\bar{y}$ -Ebene gleichfalls das Azimut α auf. Die Normalschnittebene schneidet ferner die xy -Ebene (Äquatorebene des Rotationsellipsoids) nach einer Schnittspur, die durch den Punkt S_x unter einem Winkel ψ gegen die x -Achse verläuft (Abb. 2). Dieser Winkel ist leicht anzugeben;

für einen von P_0 ausgehenden und durch einen Punkt \bar{x}, \bar{y} verlaufenden Normalschnitt ist nämlich

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\sin \varphi_0} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \cdot \sin \varphi_0 ;$$

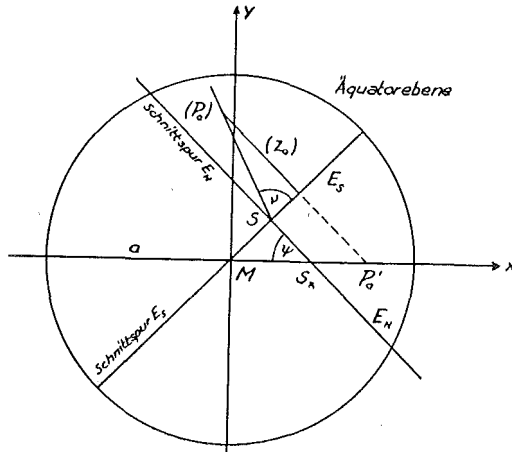


Abb. 2

da aber das Azimut des Normalschnittes mit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

gegeben ist, erhält man

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi_0 . \quad . . . (8)$$

Ebenso kann man den Neigungswinkel ν der Normalschnittebene gegen die Äquatorebene leicht ermitteln. Dieser ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{z_0}{(x_0 - MS_N) \cdot \sin \psi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\sin \psi} ;$$

woraus mit (8)

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_0}}{\sin \alpha \cos \varphi_0} \quad . . . (9a)$$

und

$$\sin \nu = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_0} , \quad \cos \nu = \cos \varphi_0 \sin \alpha \quad . . (9b, c)$$

erhalten wird. Aus (8) folgt übrigens noch

$$\sin^2 \psi = \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_0}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_0} \quad \text{und} \quad \cos^2 \psi = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_0} . \quad (10a, b)$$

Auch die eben vorangegangenen Rechnungen können wir als Vorbereitung zur eigentlichen Lösung der gestellten Aufgabe ansehen; wir haben damit einige notwendige Hilfsgrößen erhalten.

Hinsichtlich der geometrischen Eigenschaften des Normalschnittes können wir zunächst festhalten, daß die Schnittfigur natürlich eine Ellipse sein muß. Sym-

metrieebene dieser Ellipse ist eine durch die Rotationsachse z senkrecht zur Normalschnittebene E_N verlaufende Ebene E_S ; in der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen liegt die kleine Achse der Schnittellipse. Da nun jede Normalschnittebene E_N ebenso wie jede zugeordnete Ebene E_S durch den Punkt S_z verläuft, müssen die Schnittgeraden dieser Ebenen ebenfalls durch diesen Punkt verlaufen, woraus der für die Lösung der Aufgabe wichtige Satz folgt:

Die kleinen Achsen der Schnittellipsen aller durch einen Punkt P_0 verlaufenden Normalschnitte schneiden die z -Achse des Rotationsellipsoids in einem und demselben Punkt, nämlich im Schnittpunkt S_z der Flächennormalen durch P_0 mit der z -Achse.

Da nun die Ebene E_S das Rotationsellipsoid nach einem Meridian schneidet, haben wir zur Bestimmung der kleinen Halbachse b_α der Normalschnittellipse lediglich die Meridianellipse mit einer Geraden zu schneiden, die mit der x -Achse den Winkel ν einschließt und die durch den Punkt S_z verläuft. Wir erhalten damit zwei Schnittpunkte, deren Abstand gleich ist $2 b_\alpha$, d. h. der doppelten kleinen Halbachse der Schnittellipse.

Die Gleichung der Meridianellipse in einem in der Ebene E_S angenommenen Koordinatensystem x, z ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 ;$$

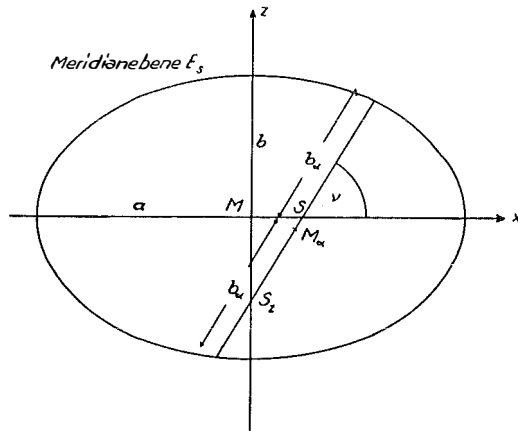


Abb. 3

setzen wir für den Augenblick $z_0 = -e^2 \frac{a}{W_0} \sin \varphi_0$,

so hat die Schnittgerade die Gleichung

$$z - z_0 = x \cdot \operatorname{tg} \nu .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Auflösung nach x und z für die Koordinaten der beiden Schnittpunkte

$$x_{b_\alpha} = e^2 \frac{a}{W_0} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \pm \frac{b \cdot \cos \varphi_0 \sin \alpha}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2}} \quad \dots (11)$$

und

$$z_{b_\alpha} = -e^2(1-e^2) \cdot \frac{a}{W_0} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin^2 \alpha}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \pm \frac{b \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2}}; \quad \dots (12)$$

konjugierte Koordinatenwerte weisen im zweiten Glied jeweils das gleiche Vorzeichen auf.

Die beiden ersten Teile der vorstehenden Ausdrücke sind offenbar die Koordinaten des Mittelpunktes M_α der Normalschnittellipse, und zwar sind diese auf das vorläufige Koordinatensystem x, z in der Ebene E_S bezogen. Indem wir in (11) den ersten Ausdruck mit $\cos(90 - \psi)$ und $\sin(90 - \psi)$ multiplizieren und den ersten Teil von (12) unverändert übernehmen, erhalten wir im ursprünglichen Koordinatensystem x, y, z die Koordinaten des Mittelpunktes M_α der Normalschnittellipse mit

$$\begin{aligned} x_{M_\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ y_{M_\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \alpha \sin \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ z_{M_\alpha} &= -e^2(1-e^2) \frac{a}{W_0} \cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin^2 \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (13a, b, c)$$

Die kleine Achse b_x der Normalschnittellipse ergibt sich durch Division des zweiten Terms von (11) durch

$$\cos \nu = \cos \varphi_0 \sin \alpha$$

oder durch Division des zweiten Terms von (12) durch

$$\sin \nu = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_0}$$

mit

$$b_\alpha = \frac{b}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2}}. \quad \dots (14)$$

Zur Berechnung der großen Halbachse a_α der Normalschnittellipse haben wir nur mehr einen kleinen Schritt zu tun. Die große Halbachse muß die Ebene E_S senkrecht durchstoßen; da diese aber normal zur Äquatorebene angenommen wurde, muß die große Halbachse in einer Parallelebene zur Äquatorebene liegen. Diese letztere enthält den Mittelpunkt der Normalschnittellipse und muß daher nach (13c) für einen positiv vorausgesetzten Wert φ_0 um den Betrag z_{M_α} unter der Äquatorebene liegen. Die Helmertsche Bemerkung darüber (Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie I, Seite 137) ist offenbar etwas unklar gefaßt; man kann daraus entnehmen, daß die große Halbachse in der Äquatorebene liege, was aber unrichtig ist.

Nach den obigen Bemerkungen hat man, um die große Halbachse zu erhalten, das Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

mit der Ebene

$$z = z_{M_\alpha}$$

(siehe (13c)) zu schneiden. Man erhält dadurch den Radius $r_{p\alpha}$ des Parallelkreises, in dessen Ebene die große Halbachse liegt, mit

$$r_{p\alpha}^2 = a^2 \left(1 - \frac{e^4 (1 - e^2) \cos^4 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^4 \alpha}{W_0^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha)^2} \right). \quad \dots (15)$$

Schneidet man diesen Kreis mit einer Geraden, die im Abstand

$$x = e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin \alpha \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}$$

(siehe (11)) vom Kreismittelpunkt verläuft, so erhält man mit der Länge der entstandenen Kreissehne die doppelte große Halbachse. Nach einfacher Rechnung folgt so das Ergebnis

$$a_\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}} \cdot \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2}}. \quad \dots (16)$$

Mit (14) und (16) ist die Normalschnittellipse gegeben, deren 1. Exzentrizität nach

$$e_\alpha^2 = \frac{a_\alpha^2 - b_\alpha^2}{a_\alpha^2}$$

mit

$$e_\alpha^2 = e^2 \frac{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \quad \dots (17)$$

berechnet werden kann. Man kann übrigens die Formeln (14), (16) und (17) leicht auf ihre Richtigkeit überprüfen, es muß nämlich für $\alpha = 0$ in jedem Falle und für $\alpha = 90^\circ$, $\varphi_0 = 90^\circ$ sowie für $\alpha = 0^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$, $a_\alpha = a$, $b_\alpha = b$ und $e_\alpha = e$ folgen; weiters muß sich für $\alpha = 90^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$ $a_\alpha = b_\alpha = a$ ergeben, was, wie leicht zu sehen ist, tatsächlich der Fall ist.

Nachdem im vorigen Form und Größe der Normalschnittellipse berechnet wurde, suchen wir als letzten Schritt deren Lage gegenüber der Schnittpur der Normalschnittebene in der $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -Ebene. Wir denken uns dazu das Koordinatensystem $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ um die \bar{z} -Achse um den Winkel α verdreht, so daß ein Koordinatensystem ξ, η, ζ entsteht, dessen ξ -Achse die Schnittpur der Normalschnittebene in der $\bar{x}\bar{y}$ -Ebene ist.

Die Koordinaten des Mittelpunktes M_α der Normalschnittellipse, bezogen auf das Koordinatensystem x, y, z , haben wir in (13) angegeben. Nach den Formeln (2) transformieren wir diese zunächst in das System $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \bar{x}_{M_\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos^2 \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ \bar{y}_{M_\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \alpha \sin \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ \bar{z}_{M_\alpha} &= a \cdot W_0 \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \left(1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2} \right). \end{aligned} \quad (18a, b, c)$$

Auf das System ξ, η, ζ transformiert, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\xi_{M\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ \eta_{M\alpha} &= 0 \\ \zeta_{M\alpha} &= \bar{z}_{M\alpha}\end{aligned}\quad (19a, b, c)$$

Die weitere Betrachtung geschieht in der Normalschnittebene, d. h. in der ξ, ζ -Ebene dieses Koordinatensystems. Dessen Ursprung liegt natürlich in P_0 , seine ξ -Achse ist Tangente an die Normalschnittellipse, wobei die Koordinaten des Mittelpunktes der Ellipse aus (19a, c) gegeben sind. Um die Lage der Ellipse anzugeben, haben wir noch den Winkel zu bestimmen, den z. B. die Richtung ihrer großen Achse mit der ξ -Achse einschließt (Abb. 4). Denkt man sich durch P_0 die Einheitskugel und durch diesen Punkt neben der Flächennormalen in P_0 die Parallelen zur x -Richtung und zur Richtung der Schnittspur der Normalschnittebene mit der xy -Ebene (diese ist parallel zur Richtung der großen Halbachse der Schnittellipse), so entsteht ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck mit den Seiten $180^\circ - \varphi_0$, ψ und $90^\circ + \delta$, wenn mit δ die Neigung der großen Halbachse gegen die ξ -Achse bezeichnet wird. Der Seite ψ liegt der Winkel α , der Seite $90^\circ + \delta$ der rechte Winkel des Dreiecks gegenüber. Es folgt daraus

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{ctg} \varphi_0 \cos \alpha; \quad \dots (20)$$

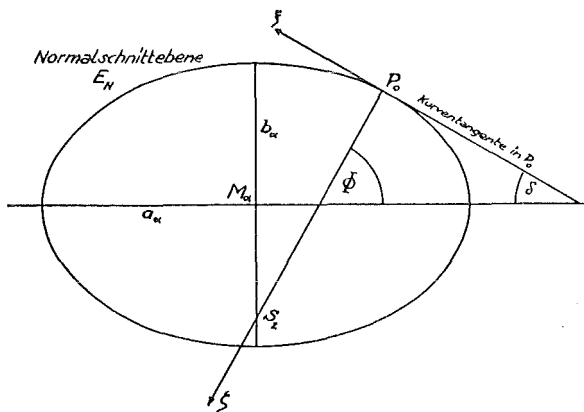


Abb. 4

zweckmäßig wird man jedoch die Ergänzung von δ auf 90° , nämlich den Winkel Φ , den die Flächennormale in P_0 , d. h. die ζ -Achse mit der Richtung der großen Halbachse einschließt und der aus

$$\operatorname{ctg} \Phi = \operatorname{ctg} \varphi_0 \cos \alpha \quad \dots (21)$$

gegeben ist, weiter verwenden. Mit (19), (20) und (21) ist nunmehr auch die Orientierung der Normalschnittellipse in der ξ, ζ -Ebene, also in der Normalschnittebene, vollständig gegeben.

Für den praktischen Gebrauch der Formeln (14), (16) und (17) dürften sich Reihenentwicklungen derselben als bequemer erweisen. Indem wir auf die einzelnen Faktoren dieser Formeln den binomischen Satz anwenden, erhalten wir die Ergebnisse

$$\begin{aligned}
b_\alpha = b \left[& 1 + e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{2 W_0^2} \right) \right. \\
& + e^4 \cos^4 \varphi_0 \sin^4 \alpha \left(1 - \frac{1}{2 W_0^2} - \frac{1}{8 W_0^4} \right) \\
& + e^6 \cos^6 \varphi_0 \sin^6 \alpha \left(1 - \frac{1}{2 W_0^2} - \frac{1}{8 W_0^4} - \frac{1}{16 W_0^6} \right) \\
& + e^8 \cos^8 \varphi_0 \sin^8 \alpha \left(1 - \frac{1}{2 W_0^2} - \frac{1}{8 W_0^4} - \frac{1}{16 W_0^6} - \frac{5}{128 W_0^8} \right) \\
& \left. + \dots \right] \dots (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_\alpha = a \left[& 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{W_0^2} \right) \right. \\
& + \frac{1}{8} e^4 \cos^4 \varphi_0 \sin^4 \alpha \left(3 - \frac{2}{W_0^2} - \frac{1}{W_0^4} \right) \\
& + \frac{1}{16} e^6 \cos^6 \varphi_0 \sin^6 \alpha \left(5 - \frac{3}{W_0^2} - \frac{1}{W_0^4} - \frac{1}{W_0^6} \right) \\
& + \frac{1}{128} e^8 \cos^8 \varphi_0 \sin^8 \alpha \left(35 - \frac{20}{W_0^2} - \frac{6}{W_0^4} - \frac{4}{W_0^6} - \frac{5}{W_0^8} \right) \\
& \left. + \dots \right] \dots (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_\alpha^2 = e^2 \left[& (1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha) \cdot (1 + e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha + e^4 \cos^4 \varphi_0 \sin^4 \alpha + \right. \\
& \left. + e^6 \cos^6 \varphi_0 \sin^6 \alpha + e^8 \cos^8 \varphi_0 \sin^8 \alpha + \dots) \right] \dots (24)
\end{aligned}$$

Ebenso wie aus den Ausgangsformeln ersieht man aus den obigen Ausdrücken, daß gegenüber den Achsen der Meridianellipse die kleine Achse stets eine stärkere Veränderung erfährt, als dies bei der großen Achse der Fall ist, denn der erste Term des Klammerausdruckes in (23) ist bereits von der Größenordnung e^4 , während der entsprechende Teil von (22) noch die Größenordnung e^2 aufweist. Zuzufolge $\frac{1}{W^2} > 1$ ergeben sich übrigens für sämtliche Ausdrücke in der eckigen Klammer der Formel (23) nach deren Berechnung negative Vorzeichen; von den singulären Fällen abgesehen, ist stets $b_\alpha > b$, $a_\alpha < a$ und daher $e_\alpha^2 < e^2$.

Obwohl nicht mehr zum eigentlichen Thema gehörend, soll noch die Frage aufgeworfen und behandelt werden, in welchen Punkten ein im Punkt P_0 unter dem Azimut α angenommener Normalschnitt das Azimut $\alpha = \frac{\pi}{2}$ aufweist. Dies ist zweifellos in jenen Punkten der Fall, in denen die Tangente an die Schnittellipse parallel zur xy -Ebene verläuft, also im höchsten und tiefsten Punkt derselben. Diese beiden Punkte liegen, wie wir früher ausgeführt haben, in einer durch die z -Achse senkrecht zur Normalschnittebene verlaufenden Ebene E_3 ; diese hat gegenüber

dem in der xz -Ebene liegenden Punkt P_0 einen Längenunterschiede $l = 90^\circ - \psi$. Es ist also nach (8) mit

$$\operatorname{ctg} l = \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \alpha \quad . . . (25)$$

der Längenunterschied der Meridianebene E_S , in der der höchste und der tiefste Punkt der Schnittkurve liegt, gegen den Ausgangspunkt P_0 gegeben. Da der Gleichung (25) sowohl l als auch $l \pm 180^\circ$ genügt, sind diese beiden Werte die Längenunterschiede der beiden Extrempunkte gegen P_0 .

Die rechtwinkligen Koordinaten des höchsten und des tiefsten Punktes der Schnittellipse haben wir, bezogen auf ein in der Ebene E_S angenommenes Koordinatensystem xz , in (11) und (12) bereits angegeben.

Nun ist für eine durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

gegebene Ellipse bekanntlich der Schnittwinkel φ der Kurvennormalen in einen Punkt x, z mit der x -Achse aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{b^2} \frac{z}{x} \quad . . . (26)$$

gegeben; trägt man hierin aus (11) und (12) die Koordinatenwerte ein, so sind mit den beiden sich ergebenden Lösungen die geographischen Breiten der Extrempunkte der Schnittfigur gegeben. Indem wir der einfachen Anschreibung halber die Formeln (9) heranziehen, erhalten wir aus (26) mit (11) und (12)

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{1}{1-e^2} \cdot \frac{-e^2(1-e^2) \cos^2 \nu \sin \varphi_0 \pm \sin \nu \sqrt{(1-e^2)(W_0^2 - e^2 \cos^2 \nu)}}{e^2 \cos \nu \sin \nu \sin \varphi_0 \pm \cos \nu \sqrt{(1-e^2)(W_0^2 - e^2 \cos^2 \nu)}} \quad (27)$$

Die Benützung der jeweils gleichen Vorzeichen ergibt die beiden Extremwerte der geographischen Breite für den Verlauf der Schnittellipse.

Abschließend sei noch mit einigen Worten auf die zu dem behandelten Thema bereits vorliegende und mir bekannt gewordene Literatur eingegangen. H. Schmehl entwickelte in [1] einen mit der Formel (13c) übereinstimmenden Ausdruck für den Abstand der großen Halbachse der Schnittellipse von der Äquatorebene und weist auch auf die irrtümliche Auffassung Helmer's über deren Lage hin. M. Näbauer beschäftigt sich in [2], allerdings von einer anderen Problemstellung ausgehend, mit demselben Thema, wobei Formeln angegeben werden, die nach entsprechender Umformung — Näbauer geht in der Benützung der beiden Exzentrizitäten nicht sehr konsequent vor — mit den Formeln (14), (16), (17) und (27) übereinstimmen. Näbauer formuliert u. a. auch den Satz: Eine das Ellipsoid schneidende Ebene ergibt dann und nur dann einen Normalschnitt, wenn sie die z -Achse innerhalb des Bereiches $z = \pm \frac{e^2 a}{1-e^2}$ schneidet; es ist dies jener Bereich, innerhalb dessen alle Flächennormalen des Rotationsellipsoids die z -Achse schneiden. Der in den vorhergegangenen

Zeilen der vorliegenden Arbeit ausgesprochene Satz, nach dem die kleine Achse der Normalschnittellipse stets durch den Schnittpunkt der z -Achse mit der Flächennormalen im Ausgangspunkt des Normalschnittes hindurchgehen muß, besagt im Grunde zunächst dasselbe, ergänzt jedoch die Näbauer'sche Feststellung hinsichtlich der möglichen Lage der Schnittfigur und hat damit allgemeinere Bedeutung. Weitere Untersuchungen finden sich in [3].

Literatur:

[1] *H. Schmehl*: Über den Normalschnitt eines Erdellipsoids, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1937, S. 645.

[2] *M. Näbauer*: Normalschnitt und Gegennormalschnitt auf dem Erdellipsoid, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1944, S. 2.

[3] *Cimbálik* und *Andersen*, zitiert in Jordan-Eggert-Kneißl, Handbuch der Vermessungskunde, IV/2, § 138.

Eine interessante Neuerung am WILD-Repetitions-Theodolit T 1

Von *E. Berchtold*, Heerbrugg

Ein Theodolit mit Höhenkreis, aber ohne Höhenkreislibelle, galt lange Zeit als ungeeignet für genaue Messungen, weil — im Gegensatz zum Horizontalkreis — am Höhenkreis unmittelbar Winkel und nicht bloß Richtungen abgelesen werden. Der eine Schenkel dieses Winkels ist die Ziellinie des Fernrohrs, der andere entweder die Richtung nach dem Zenit oder die in der Vertikalebene der Ziellinie verlaufende Horizontale.

Weil die Lotrichtung durch die Stehachse des auf dem Stativ aufgestellten Instrumentes nicht zuverlässig genug definiert ist, benützt man eine besondere Libelle, die Höhenkreislibelle, mit der vor dem Ablesen des Höhenkreises der Höhenkreisindex in die für die Winkelablesung richtige Lage gebracht wird.

Seit es Nivellierinstrumente mit automatischer Waagrechtstellung der Ziellinie gibt, sucht man nach Lösungen, auch die Höhenkreislibelle eines Theodoliten durch eine automatisch wirkende Vorrichtung zu ersetzen. Es war naheliegend, dazu ein pendelnd aufgehängtes Prisma zu verwenden.

Im Wild-Repetitions-Theodolit T1 wurde aber eine viel einfachere Lösung verwirklicht, die darin besteht, in den Strahlengang des Höhenkreismikroskopes ein durchsichtiges Gefäß mit einer glasklaren Flüssigkeit derart einzuschalten, daß die vom Höhenkreis kommenden Lichtstrahlen die Flüssigkeit durchsetzen. Steht das Instrument senkrecht, so sind der ebene Boden des Gefäßes und die Oberfläche der Flüssigkeit waagrecht und der Hauptstrahl des Ablesemikroskopes geht ungebrochen durch. Neigt sich das Instrument um einen Winkel α , so bleibt nur die Oberfläche der Flüssigkeit waagrecht, der Boden des Gefäßes hingegen steht schief. Die Flüssigkeit bildet daher einen Keil, der die Lichtstrahlen nach dem Brechungsgesetz ablenkt. Ist n der Brechwert der Flüssigkeit, so wird die Ablenkung des Hauptstrahls $(n - 1) \alpha$. Die Abstände im Strahlengang sind so bemessen, daß durch diese Ablenkung der von der Instrumentenneigung herrührende Fehler des Höhenwinkels korrigiert wird.

Das Fernrohr kann natürlich mit der Richtung, nach welcher die Stehachse und somit auch der Boden des Gefäßes geneigt sind, jeden beliebigen Winkel einschließen. Die Komponente dieser Neigung in Richtung des Fernrohres bewirkt die für die korrekte Ablesung des Höhenwinkels nötige seitliche Verschiebung der Striche des Höhenkreisbildes; die Querkomponente hingegen hat eine die Ablesung nicht beeinflussende Verlängerung oder Verkürzung der Teilstriche zur Folge. Eine übermäßige Änderung der Strichlänge weist auf eine Stehachsenschiefe hin, die man korrigieren wird, bevor sie sich schädlich auswirkt.

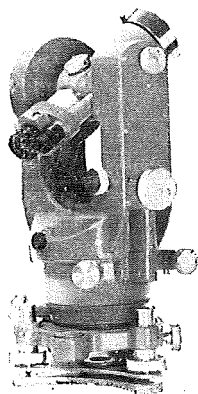


Abb. 1

Der neue Repetitions-Theodolit Wild T1-A

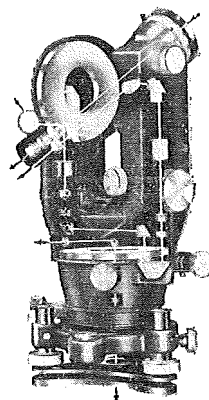


Abb. 2

Anordnung der optischen Elemente im T1-A

Der Brechwert einer Flüssigkeit ändert aber mit der Temperatur. Im vorliegenden Fall nimmt ($n - 1$) für 1° Temperaturzunahme um ca. $10/100$ ab. Rechnet man mit einem Neigungsfehler der Stehachse von einer Bogenminute — entsprechend einem Libellenausschlag von 4 Intervallen beim Drehen der Alhidade um 180° — so tritt bei einem Temperaturunterschied von 40° gegenüber der Justiertemperatur ein Justierfehler von $40/100$ von $60'' - 2'',4$ auf. Das kann bei einer Kreisablesung mit Schätzung auf $6''$ ohne weiteres vernachlässigt werden. Man wird aber darauf achten, bei extremen Temperaturen das Instrument auf mindestens $1'$ genau zu horizontieren, was jeder gute Beobachter ohnehin tut.

Bei einem pendelartig aufgehängten Prisma ist eine besondere Dämpfungseinrichtung nötig, um die unvermeidlichen Schwingungen rasch abzubremesen. Beim Flüssigkeitsregler wird die Dämpfung durch die Viscosität der verwendeten Flüssigkeit ohne zusätzliche Einrichtung erhalten, und weil sich keine mechanischen Teile bewegen, ist auch keine Abnutzung zu befürchten.

Der T1 mit automatischer Einstellung des Höhenkreisindex wird mit T1-A bezeichnet, wobei der Buchstabe A auf die Automatik hinweist. Im übrigen blieb der bewährte Theodolit unverändert, erlaubt aber bedeutend rascheres Messen der Höhenwinkel und schließt die Fehler aus, die bei Nichtbeachtung der Libelle entstehen konnten.

Die störenden Einflüsse der Sonnenbestrahlung auf die Libellenblase sind beim T1-A natürlich vermieden, und es ist auch für genaue Messungen nicht mehr nötig, bei schönem Wetter stets einen Schirm zu benutzen.

Kleine Mitteilungen

Deutsche Hochschulnachrichten

Seine Magnilizenz, *Prof. Dr.-Ing. habil., Dr. E. h. Max Kneißl*, Vizepräsident der Bayrischen Akademie der Wissenschaften, Vorstand des Geodätischen Institutes, wurde für ein weiteres Jahr zum Rektor der Technischen Hochschule München gewählt.

Prof. Dr.-Ing. habil. Gerhard Lehmann, Vorstand des Institutes für Photogrammetrie, wurde für das Studienjahr 1959/60 zum Prorektor und für das Studienjahr 1960/61 zum Rektor der Technischen Hochschule Hannover gewählt.

Wir wünschen den bekannten deutschen Geodäten ein erfolgreiches Amtsjahr!

44. Deutscher Geodätentag Trier 1959

Der diesjährige Deutsche Geodätentag findet in der Zeit vom 23. bis 26. September 1959 in Trier, der schönen zweitausendjährigen Stadt an der Mosel, statt. Die Tagung wird in einem festlichen Rahmen abgehalten und bringt eine Reihe von wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Veranstaltungen, wie aus der nachstehenden Tagungsfolge entnommen werden kann:

Mittwoch, 23. September. 9 Uhr. Eröffnung der Behördenausstellung im „Kurfürstlichen Palais“. — Eröffnung der Firmenausstellung im „Vereinshaus Trevisis“. — 10.30 Uhr. Eröffnung des 44. Deutschen Geodätentages durch den Vorsitzenden des DVW, Regierungsdirektor Dr. phil. H. Röhrs, und Festvortrag des Regierungsdirektors Max Lambert, Ministerium des Inneren, Rheinland-Pfalz, „Technik und Verwaltung“. — 16.30 Uhr: Ordentliche Hauptversammlung des DVW.

Donnerstag, 24. September. Vorträge: 9 Uhr: Reg.-Baudirektor Dethard Freiherr von dem Bussche-Haddenhausen, deutscher Geschäftsführer der Int. Mosel-Ges. m. b. H., „Wirtschaftliche und technische Fragen des Moselausbaues“. — 10.30 Uhr: Reg.-Direktor Dr. Adam von der Weiden, Landesvermessungsamt Rheinland-Pfalz, „Umfang und Laufendhaltung topographischer Darstellungen in neuen amtlichen Karten 1:1000 und kleiner“. — Besichtigungen: 14 Uhr: Fahrt nach Bernkastel und Besichtigung der Stadt oder um 15 Uhr: Führung durch die Stadt Trier.

Freitag, 25. September 1959. Vorträge: 9 Uhr: Oberregierungsvermessungsrat Wilhelm Schirmer, Min. f. Landv., Weinbau u. Forsten, Rheinland-Pfalz, „5 Jahre Luftbildmessungen in der Flurbereinigung Rheinland-Pfalz; Erfahrung und Ausblick“. — 10.30 Uhr: Direktor Alphons Eyschen, Direktor der Luxemburgischen Katasterverwaltung, „Die Flurbereinigung in Luxemburg.“ — Besichtigungen: 14.30 Uhr: Besichtigung einer im Bau befindlichen Staustufe in der Nähe von Trier oder Besichtigung der im Bau befindlichen Saueraltasperre in Rosport (Luxemburg) oder Besichtigung von Weinbergsunlegungen. — 15 Uhr: Führungen durch Trier. — 20 Uhr: Gesellschaftsabend.

Samstag, 26. September 1959. 10.30 Uhr: Große Luxemburg-Rundfahrt mit Besichtigung der Stadt Luxemburg.

Es wäre sehr zu begrüßen, wenn möglichst viele österreichische Kollegen am 44. Deutschen Geodätentag teilnehmen würden.

Rohrer

Literaturbericht

Zeitschriftenschau

Die hier genannten Zeitschriften liegen, wenn nicht anders vermerkt, in der Bibliothek des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen auf.

I. Geodätische Zeitschriften

Allgemeine Vermessungsnachrichten, Berlin 1959: *Nr. 6. Ritter*, Bogengestaltung und Entwurf im neuzeitlichen Straßenbau (Fortsetz. in *Nr. 7*). — *Collins*, Probleme der Stadtplanung. — *Kemmann*, Höhenbestimmung von FP-Pfeilern im Zuge von Längsnivellements. — *Slawik*, Naturwissenschaftliche und technische Publizistik. — *Nr. 7. Faber*, Zur Praxis der Klothoidenabsteckung. — *Gigas*, Einige Gedanken über die Zusammenarbeit von Bund und Län-

dem im Vermessungswesen. — *Pinkwart*, Zum 25jährigen Bestehen des Gesetzes über die Neuordnung des Vermessungswesens.

Bildmessung und Luftbildwesen, Berlin 1959: Nr. 2. *Gotthardt*, Gemeinsame Lageeinpassung mehrerer Modelle mittels verketteter Helmerttransformation. — *van Gent*, Der Wild-Autograph A 7-K. — *Brucklacher*, Die Photogrammetrie im Rahmen der 2. Kartographischen Konferenz der Vereinten Nationen für Asien und den Fernen Osten. — Berichtigung zum Aufsatz Dr. Helmut Schmid „Eine allgemeine analytische Lösung für die Aufgabe der Photogrammetrie“.

Der Fluchtstab, Düsseldorf 1959: Nr. 5/6. *Reuß*, Verfahrensmuster für die Aufnahme bestehender Hochspannungsfreileitungen (Schluß). — *Heyink*, Erkundungsarbeiten für die polygonometrische Bestimmung von TP (A) (Fortsetzung). — *Weih*, Fortführung des Liegenschaftskatasters in Wohnsiedlungsgebieten. — *von Hofe*, Ingenieurschulen und Technische Hochschulen als Träger der Ausbildung des Ingenieur Nachwuchses.

Geodetický a kartografický obzor, Praha 1959: Nr. 6. *Malivánek* und *Morch*, Grundprinzipien und Probleme der Technologie bei der Aufnahme von Karten großer Maßstäbe. — *Mikšovský*, Schichtgravur der Kartenoriginale. — *Válka*, Reduktion der mit Stahlbandmaß nicht horizontal gemessenen Längen. — *Karský*, Über die Bestimmung des Interpolierungsargumentes. *Pokora*, Über die Durchführung wirtschaftstechnischer Bodenumlegungen in Form von Gesamtprojekten. — Nr. 7. *Wittinger*, Ausbau des Geodätischen Observatoriums auf dem Pecný. — *Boguszak* und *Šlitr*, Bemerkungen zur Darstellung des Geländes durch Höhenlinien. — *Šilar*, Bestimmung des Halbmessers eines Eisenbahnbogens.

Geodetski list, Zagreb 1959: Nr. 4–6. *Mende*, Beitrag zur Frage der Reduktion der beobachteten Schwerkraftwerte (Schluß). — *Aganovič*, Die Konstruktion der Diagramme für die Sonnenhöhe und Azimut. — *Jenko*, Die Untersuchung des optischen Mikrometers an den Wild'schen Universaltheodoliten. — *Jemrič*, Rückblick auf die Entwicklung von geodätischen Instrumenten. — *Hadži Vasilev*, Die luftbildphotogrammetrischen Arbeiten in Mazedonien. — *Šefček*, Umlegung.

Geodézia és Kartográfia, Budapest 1959: Nr. 2. *Tarczy-Hornoch*, Umrechnung zwischen den Gauss-Krüger-Streifen mit Hilfe dreier Anschlußpunkte. — *Hazay*, Die mechanischen Prinzipien der Ausgleichung. — *Iljin-Tyhomirov*, Das Schlitz-Entzerrungsgerät FTStsch. — *Nikischow*, Erfahrungen bei der Kartierung der Landwirtschaft in der UdSSR. — *Homoródi*, Über die Fragen unseres neuen Projektionssystems. — *Hönyi*, Transformationen zwischen zwei Koordinatensystemen auf Grund geometrischer Beziehungen. — *Tóth*, Automatische Nivellierinstrumente. — *Regöczy*, Die Maßeinheiten. — *Hrenko*, Über einzelne morphologische und Reliefformationen unserer Landschaften. — *Vitályos*, Detailpunktaufnahmen mit simultanem Vorwärtseinschneiden.

Geodezja i Kartografia, Warszawa 1959: Nr. 1–2. *Włodarczyk*, Nouvelle triangulation de Pologne. (Genèse, technique et l'organisation d'exécution.) — *Pierścinek* und *Jarosinski*, Analyse de précision de la triangulation complémentaire et de détail. — *Wloczewski* und *Kiepurski*, Aspects économiques des réseaux de triangulation complémentaire et de détail.

Przegląd Geodezyjny, Warszawa 1959: Nr. 5. *Bychawski*, Ein Blick in die Zukunft des Geodäsieinstrumentenbaues. — *Rogulski*, Elektronik und Automatik im Dienste der Photogrammetrie. — *Kuckiewicz*, Wie ist die Präzisionspolygonisierung in die sog. paralaktische Polygonisierung umgewandelt worden? — *Janusz*, Die Frage der Zuglänge in der technischen Polygonisierung. — *Wójcik*, Zeichnungsstoffe aus Plastikmassen. — *Dabrowski*, Zur Frage der Lagerung von Plänen und Mappen (Fortsetzung in Nr. 6). — *Skolimowski*, Das Studium der Geodäsie an der Londoner Universität. — Nr. 6. *Wloczewski* und *Krajewski*, Das polnische Ausfüllungs- und Verdichtungs-triangulationsnetz. — *Lukasiewicz*, Analyse der Ausführung von Präzisionspolygonisierungsnetzen. — *Dimow*, Gruppenartige Ausgleichung des Nivellementsnetzes nach den Bindungsbeobachtungen. — *Zill*, Der Kataster in der Deutschen Demokratischen Republik.

Revue des Géomètres-Experts et Topographes Français, Paris 1959: Nr. 6. *Muller*, Implantation d'un quadrillage par coordonnées polaires. — *Rosset*, Un nouvel appareil de topographie souterraine. — Nr. 7. *Ollivier*, Le nouveau Théodolite répéteur WILD TI-A.

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Winterthur 1959: Nr. 6. *Ansermet*, Sur le calcul de réseaux hyperdéterminés à mesures

linéaires. — *Tschapnow*, Genauigkeit der bedingten Ausgleichung mit Unbekannten, zwischen denen Bedingungsungleichungen bestehen. — Nr. 7. *Schmidheini*, Grundlagen der elektrooptischen und elektronischen Distanzmessung. — *Berchtold*, Eine interessante Neuerung am WILD-Repetitions-Theodolit T-1.

Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, Gravenhage 1959: Nr. 2. *Van Wely*, Coordinatographie et papier. — *Van der Meulen*, Le théodolite nouveau Th-3 de Zeiss.

Vermessungstechnik, Berlin 1959: Nr. 4. *Bursa*, Die Ausmaße des Erdellipsoids aus den europäischen astronomisch-geodätischen Netzen. — *Weise*, Streckenmessung mit dem Invarband. — *Thum*, Zur Untersuchung der Genauigkeit der topographischen Karte 1:25000 (und Nr. 5). — *Ulrich*, Die Beziehungen zwischen Aufnahmeverfahren und Messungsmethode in der Topographie. — *Rasche*, Die Orientierung von Luftbildaufnahmen durch Bildvergleich zur Verbesserung der graphischen Bildtriangulation. — *Dittrich*, Über den Einsatz der Erdbildmessung für die Massenaufmessung im Braunkohlentagebau. Nr. 5. — *Neubert*, Rationelles Messen von Längen geringer, mittlerer, hoher und höchster Genauigkeit. — *Kratky*, Die absolute Orientierung eines Modells im Stereoplanigraphen von Zeiss-Jena. — *Haack*, Das geographische Milieu als Grundlage der gesetzmäßigen Generalisierung. — *Balmert*, Untersuchungen des Einflusses des Beobachters, der Temperatur und des Zustandes der Atmosphäre auf die optische Präzisionsdistanzmessung.

Vermessungstechnische Rundschau, Hamburg 1959: Nr. 6. *Kriegel*, Kataster-Aufstellung mittels Lochkarten (Forts. in Nr. 7). — *Wendt*, Zum Einsatz des Kreisellipsoiden. — *Wiegand*, „Wirtschaftlichkeit im Vermessungswesen — wie wir sie sehen“ (Forts. in Nr. 7). — *Wittke*, Z60 — eine elektronische Steuerung für Koordinatentisch. — *Wittke*, Vor und Rückwärtsschnitt auf der IBM-650. — Nr. 7. *Behr*, Zur Grenzanerkennung. — *Camphausen*, Eine neue Polygonzugtafel, bei der man nicht blättern muß. — *Kümmritz*, Schnitt zwischen Gerade und Kreis. — *Wittke*, LGP-30, ein Rechenautomat mit Germanium-Dioden. — *Preyß*, Vorrichtungen zur Ziellinien-Stabilisierung.

Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1959: Nr. 6. *Kurandt*, 25 Jahre Vermessungsgesetz. — *Gary*, Berechnung der Meßlänge bei frei durchhängenden Bandmaßen. — *Kempin*, Ein Beitrag zur Berechnung der Pizetti- und Helmertprojektion aus Schweremessungen. — *Burkert*, Vorschläge für elektronische Flächenermittlungen. — Nr. 7. *Plößl*, 50 Jahre volle Verstaatlichung des Fortführungsvermessungsdienstes in Bayern. — *Osthoff*, Zur Genauigkeit der Bodenschätzung im Flurbereinigungsverfahren. — *Drodofsky*, Systematische Fehler im Nivellement. — *Cvetkov*, Anwendungen der Fehlertheorie auf Probleme der ebenen Geometrie. — *Hallert*, Ein Schema für die Lösung von Normalgleichungen.

II. Andere Zeitschriften

Mathematik-Technik-Wirtschaft, Wien 1959: Nr. 2. *Höllrigl*, Anwendung des Lochkartenverfahrens auf die Fortführung des österreichischen Katasterschriftoperates.

Abgeschlossen am 31. Juli 1959.

Zeitschriftenschau zusammengestellt im amtlichen Auftrag von Bibliotheksleiter *K. Gartner*.

Contents:

- K. Ledersteger*: Stokes' Constants and the Moments of Inertia of a Figure of Equilibrium.
K. Hubeny: The Evaluation Elements of the Normal Section Ellipse.
E. Berchtold: An Interesting Innovation on Wild-Repetition Theodolit T 1.

Sommaire:

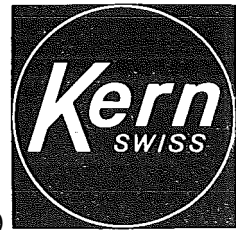
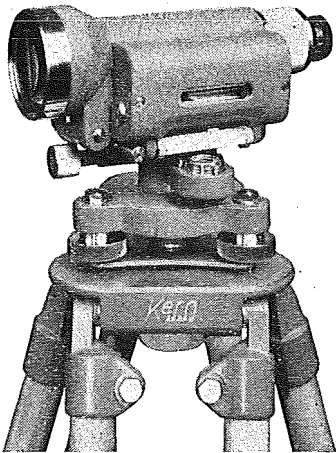
- K. Ledersteger*: Les constantes de Stokes et les moments d'inertie d'une figure d'équilibre.
K. Hubeny: Les éléments de détermination d'une section normale à l'ellipse.
E. Berchtold: Une innovation intéressante au théodolite répétiteur de Wild.

Anschriften der Mitarbeiter dieses Heftes:

- Prof. Dr. K. Ledersteger*, Technische Hochschule Wien IV, Karlsplatz 13.
Prof. Dr. K. Hubeny, Technische Hochschule Graz, Rechbauerstraße 12.
Dipl.-Ing. E. Berchtold, H. Wilds Geodätische Instrumente, Heerbrugg, Schweiz.



NK 3 — das Ingenieur-Nivellierinstrument für anspruchsvolle technische Nivellements. — Die Koinzidenzlibelle ist unmittelbar neben der Lattenteilung im Gesichtsfeld des äusserst leistungsfähigen Fernrohres sichtbar. — Mit dem Planplattenmikrometer und der Invarlatte ist eine weitere Genauigkeitssteigerung erreichbar.



Kern & Co. AG, Aarau (Schweiz)

Verlangen Sie den ausführlichen Prospekt.
**Kern-Vermessungsinstrumente: Weltruf durch
technische Vollkommenheit und Präzision**

Alleinverkauf für Österreich

Dr. Wilhelm Artaker, Wien 3, Reisnerstraße 6 Ruf 73-15-86 Serie

Österreichischer Verein für Vermessungswesen
Wien VIII, Friedrich Schmidt-Platz 3

I. Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen

- Sonderheft 1: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag.* 198 Seiten, Neuauflage, 1948, Preis S 18.—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), *Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme.* 40 Seiten, 1935. Preis S 24.—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 3: Ledersteger, *Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid.* 140 Seiten, 1948. Preis S 25.—.
- Sonderheft 4: Zaar, *Zweimedienphotogrammetrie.* 40 Seiten, 1948. Preis S 18.—.
- Sonderheft 5: Rinner, *Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie.* 45 Seiten, 1948. Preis S 18.—.
- Sonderheft 6: Hauer, *Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene.* 31 Seiten. 1949. (Vergriffen.)
- Sonderh. 7/8: Ledersteger, *Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplace'schen Widersprüche.* 59+22 Seiten, 1949. Preis S 25.—.
- Sonderheft 9: *Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich.* 56 Seiten, 1949. Preis S 22.—.
- Sonderheft 11: Mader, *Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung.* 74 Seiten, 1951. Preis S 25.—.
- Sonderheft 12: Ledersteger, *Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen.* 140 Seiten, 1951. Preis S 35.—.
- Sonderheft 13: Hubeny, *Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoides.* 208 Seiten, 1953. Preis S 60.—.
- Sonderheft 14: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag.* 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120.—.
- Sonderheft 15: Mader, *Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern.* 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28.—.
- Sonderheft 16: *Theodor Scheimpflug — Festschrift.* Zum 150jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln. Preis S 60.—.
- Sonderheft 17: Ulbrich, *Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Stau Mauern und Großbauwerken.* 72 Seiten mit 40 Abbildungen und einer Luftkarten-Beilage. Preis S 48.—.
- Sonderheft 18: Brandstätter, *Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung.* 94 Seiten mit 49 Abb. und Karten und 2 Kartenbeilagen, 1957. Preis S 80.— (DM. 14.—).
- Sonderheft 19: *Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich, 4. bis 9. Juni 1956.*
- Teil 1: *Über das staatliche Vermessungswesen,* 24 Seiten, 1957. Preis S 28.—.
- Teil 2: *Über Höhere Geodäsie,* 28 Seiten, 1957. Preis S 34.—.
- Teil 3: *Vermessungsarbeiten anderer Behörden,* 22 Seiten, 1957. Preis S 28.—.
- Teil 4: *Der Sachverständige — Das k. u. k. Militärgeographische Institut.* 18 Seiten, 1958. Preis S 20.—.
- Teil 5: *Über besondere photogrammetrische Arbeiten.* 38 Seiten, 1958. Preis S 40.—.
- Teil 6: *Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie.* 42 Seiten, 1958. Preis S 42.—.

Neuwertige Doppel-Rechenmaschinen „Brunsviga“ und „Thales GEO“

sowie
einfache Rechenmaschinen für etwa die Hälfte des Neuwertes lieferbar.

Gewährleistung 1 Jahr. Günstige Angebote in Vorführmaschinen.
Referenzen aus österreichischen Fachkreisen.

F. H. FLASDIECK. Wuppertal-Barmen, Hebelstraße 3, Deutschland

Offizielle österreichische amtliche Karten der Landesaufnahme

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen
in Wien VIII, Krotenthallergasse 3 / Tel. 33-46-31

Es werden folgende Kartenwerke empfohlen:

Für Amtszwecke sowie für Wissenschaft und Technik

Die Blätter der

Österreichischen Karte 1:25.000, bzw. der
Alten österreichischen Landesaufnahme 1:25.000
Österreichische Karte 1:50.000, bzw. die
Provisorische Ausgabe der Österreichischen Karte 1:50.000
Generalkarte von Mitteleuropa 1:200.000
Übersichtskarte von Mitteleuropa 1:750.000
Plan von Salzburg 1:15.000
Arbeitskarten 1:200.000 und 1:500.000 von Österreich
Politische Karte der Republik Österreich 1:500.000

Zum Zusammenstellen von Touren und Reisen

Karte der Republik Österreich 1:500.000, mit Suchgitter und Index
Karte der Republik Österreich 1:500.000, hypsometrische Ausgabe
Verkehrs- und Reisekarte von Österreich 1:600.000

Für Auto-Touren

die Straßenkarte von Österreich 1:500.000 in zwei Blättern,
mit Terrain-darstellung, Leporellofaltung

sowie für Motorrad- und Radfahrer

die Straßenübersichtskarte von Österreich 1:850.000 in Form
eines praktischen Handbüchleins

Für Wanderungen

die Blätter der Wanderkarte 1:50.000 mit Wegmarkierungen

Die Karten sind in sämtlichen Buchhandlungen und in der amtlichen Verkaufsstelle Wien VIII, Krotenthallergasse 3, erhältlich.

Auf Wunsch werden Übersichtsblätter kostenlos abgegeben.

Neuerscheinungen

von offiziellen Karten der Landesaufnahme

Österreichische Karte 1:50.000

71 Ybbsitz
91 St. Johann in Tirol
92 Lofer
121 Neukirchen am Großvenediger
156 Muhr
170 Mathon
190 Leibnitz
191 Kirchbach in Steiermark

Preise der Kartenwerke:

je Blatt S

Österreichische Karte 1:25.000	
1/8 Blätter (Aufnahmeblätter)	7.—
1/4 Blätter (Halbsektionen)	10.—
Zeichenerklärung 1:25.000	2.—
Österreichische Karte 1:50.000 ohne Wegmarkierung	7.50
Österr. Karte 1:50.000 mit Wegmarkierung (Wanderkarte)	8.50
Prov. Ausgabe der Österr. Karte 1:50.000 ohne Wegmarkierung	4.—
Prov. Ausgabe der Österr. Karte 1:50.000 mit Wegmarkierung (Wanderkarte)	5.—

Dieses Kartenwerk umfaßt insgesamt 213 Blattnummern.

Hievon sind bisher erschienen:

56 Blätter Österreichische Karte 1:50.000 mit Schichten in Mehrfarbendruck sowie 155 Blätter als provisorische Ausgabe der Österreichischen Karte 1:50.000 in Zweifarbendruck (schwarz mit grünem Waldaufdruck).

Die Blätter 39, 40, 41, 42, 57, 60, 105, 106 sind mit Schichtenlinien und Schummerung, alle anderen Blätter mit Schichtenlinien und Schraffen versehen. Das Blatt 27 ist auf dem Blatte 45, das Blatt 194 auf dem Blatte 168 als Übergriff ohne Auslandsdarstellungen aufgedruckt.

Zu beziehen durch alle Buchhandlungen und in der amtlichen Verkaufsstelle des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Landesaufnahme), Wien 8, Krotenthallergasse 3

Neuerscheinungen des österr. Wasserkraftkatasters

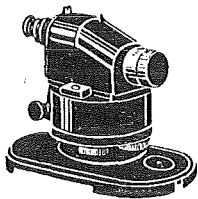
Im Zuge der Bearbeitung des neuen österr. Wasserkraftkatasters ist erschienen:

Drau I, Doppelband, Preis S 500.—

Die bisher erschienenen Bände sind durch den Kartenverlag des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Landesaufnahme in Wien bzw. durch den Buchhandel zu beziehen.



Na



*Schneller,
bequemer und
genauer messen!*

INGENIEUR-NIVELLIER Bauart Na
mit automatischer Horizontierung
der Ziellinie

mit astronomischem oder terrestrischem Fernrohr. Die besondere Ausbildung des Pendels gestattet, die Ziellinie mit einer Genauigkeit von etwa 1'', d. h. etwa 1 mm auf 200 m, horizontal zu halten.

*

PRÄZISIONS-THEODOLITE
mit automatischem Höhenindex

SEKUNDEN-THEODOLIT Bauart Tu

für Triangulation ab II. Ordnung, Feinpolygonierung und astronomische Ortsbestimmung. Kreisablesung nach der Koinzidenzmethode direkt bis zu 2^{cc} bzw. 1'', Schätzung bis zu 0,2^{cc} bzw. 0,1''.

Die Präzision unserer Serienfertigung garantiert eine gleichbleibend extrem hohe Kreisgenauigkeit.

*

TACHYMETER-THEODOLIT
Bauart Tt

für Kataster- und Ingenieurvermessungen. Mikrometerablesung an je einer Kreisstelle direkt bis zu 1^c bzw. 20''; Kreisklemme.

Unterlagen über unser vielseitiges Herstellungsprogramm geodätischer und geophysikalischer Instrumente stehen gern zur Verfügung.

*

Vertretung für Österreich:

NORMA . FABRIK ELEKTRISCHER MESSGERÄTE GmbH
WIEN XI/79, FICKEYSSTRASSE 1-11