

# Österreichische Zeitschrift

für

# Vermessungswesen

REDAKTION:

Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Rohrer

emer. o. Professor  
der Technischen Hochschule Wien

Hofrat Dr. phil., Dr. techn. h. c., Dr.-Ing. E. h.

Karl Ledersteger

o. Professor  
der Technischen Hochschule Wien

Hochschuldozent Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn.

Josef Mitter

Vorstand der Abteilung Erdmessung  
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen

Nr. 4

Ende August 1971

59. Jg.

INHALT:

**Abhandlungen:**

- Über die Äquivalenz von Lösungen des geodätischen Randwertproblems ... E. Ecker  
Ableitung differentieller Beziehungen in Vektoren- bzw. Matrizen Schreibweise  
in der astronomisch-geodätischen Ortsbestimmung ..... H. Lichtenegger  
Bemerkungen zum Querfehler in Zugmitte bei einem Polygonzug mit Zwischenorientierungen ..... J. Zeger

Mitteilungen, Literaturbericht, engl.-franz. Inhaltsverzeichnis  
Mitteilungsblatt zur „Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen“,  
redigiert von Dipl.-Ing. Friedrich Blaschitz



Herausgegeben vom

**ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN**

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

Baden bei Wien 1971

# Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen

Für die Redaktion der Zeitschrift bestimmte Zuschriften und Manuskripte sind an eines der nachstehenden Redaktionsmitglieder zu richten:

## Redakteure:

*o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Rohrer*, A 1040 Wien IV, Techn. Hochschule  
*o. Prof. Hofrat Dr. phil., Dr. techn. eh. Karl Ledersteger*, A 1040 Wien IV, Techn. Hochschule

*Hochschuldozent Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter*, A 1080 Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3

## Redaktionsbeirat:

*o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alois Barvir*, A 1040 Wien IV, Techn. Hochschule  
*o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Friedrich Hauer*, A 1040 Wien IV, Techn. Hochschule  
*o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Hubeny*, A 8020 Graz, Techn. Hochschule, Rechbauerstraße 12

*Prof. Ing. Dr. techn. eh. Karl Neumaier*, Präsident i. R. des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, A 1040 Wien IV, Techn. Hochschule

Für die Redaktion des Mitteilungsblattes und Annoncenteeiles bestimmte Zuschriften sind an *Dipl.-Ing. Friedrich Blaschitz*, A 1082 Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3, zu senden.

Die Manuskripte sind in lesbarer, druckreifer Ausfertigung, die Abbildungen auf eigenen Blättern als Reinzeichnungen in schwarzer Tusche und in möglichst großem, zur photographischen Verkleinerung geeignetem Maßstab vorzulegen. Von Photographien werden Hochglanzkopien erbeten. Ist eine Rücksendung der Manuskripte nach der Drucklegung erwünscht, so ist dies ausdrücklich zu bemerken. Bei Vorlage von Rasterklischees: Umschlag 42er Raster, Text 54er Raster

Die Zeitschrift erscheint sechsmal jährlich, u. zw. Ende jedes geraden Monats.

**Redaktionsschluß:** jeweils Ende des Vormonats.

Auflage: 1090 Stück

## Bezugsbedingungen: pro Jahr

Mitgliedsbeitrag für den Österr. Verein für Vermessungswesen S 100,—  
Konto 119093

Mitgliedsbeitrag für die Österr. Gesellschaft für Photogrammetrie S 100,—  
Konto 131994

Abonnementgebühr für das Inland ..... S 130,— und Porto

Abonnementgebühr für Deutschland ..... DM 28,— und Porto

Abonnementgebühr für das übrige Ausland S 168,— od. sfr 28,— und Porto

Einzelheft . . . S 25,— Inland bzw. DM 5,— oder ö. S 32,— Ausland

Anzeigenpreis pro  $\frac{1}{4}$  Seite 125×205 mm S 1100,— einschl. Anzeigensteuer

Anzeigenpreis pro  $\frac{1}{2}$  Seite 125×100 mm S 660,— einschl. Anzeigensteuer

Anzeigenpreis pro  $\frac{1}{4}$  Seite 125× 50 mm S 440,— einschl. Anzeigensteuer

Anzeigenpreis pro  $\frac{1}{8}$  Seite 125× 25 mm S 330,— einschl. Anzeigensteuer

Prospektbeilagen bis 4 Seiten ..... S 660,— einschl. Anzeigensteuer

Postscheck-Konto Nr. 119.093

Telephon: 42 92 83

**COMPTE RENDU OFFICIEL  
DU  
DIXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL  
DES GÉOMÈTRES**

Wien

24. August bis 1. September 1962

188 Seiten mit 19 Abbildungen, 19,8 × 25,7 cm, broschiert S 120,—

- 25 Seiten Organisation der FIG und die Delegierten der Mitgliedstaaten
- 16 Seiten Liste der Teilnehmer am X. Kongreß und deren Anschriften
- 49 Seiten Organisation, Programm, Ausstellung und Ansprachen beim X. Kongreß
- 79 Seiten Bericht des Generalsekretärs der FIG über die Zeit vom 1. Jänner 1960 bis 31. Dezember 1963
  - Bericht über die 4 Sitzungen des Comité Permanent
  - Erste und zweite Generalversammlung der FIG am 25. 8. und 1. 9. 1962
  - Alle Berichte in Deutsch, Englisch und Französisch abgefaßt
- 19 Seiten Verzeichnis der National-, Präsidial- und Spezialberichte
  - Verzeichnis der Autoren dieser Berichte

Zu beziehen durch den Österreichischen Verein für Vermessungswesen, A 1180  
Wien, Schopenhauerstraße 32

**S O N D E R H E F T 25**

der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen

**PROCEEDINGS**

of the International Symposium

Figure of the Earth and Refraction

Vienna, March 14<sup>th</sup> — 17<sup>th</sup> 1967

By Order of the Austrian Geodetic Commission published by

Karl Ledersteger

Under the Joint Sponsorship of Gimrada, AfcrI

and Geodetic Institute, Uppsala University

**First Conference (SSG 16): The Normal Spheroid and the Figure of the Earth**

Part I: The Normal Spheroid and the Regularization of the Earth's Crust

Part II: The Figure of the Earth and the External Gravity Field

Part III: Gravity Anomalies, Deviations of the Vertical,

Observations (Methods and Results)

**Second Conference (SSG 23): Recent Research on Atmospherical**

**Refraction for Geodetic Purposes**

Part I: Problems of Atmospherical Refractive Index and its Influence upon Electro-optical Distance Measurements

A: Refraction Effect on Optical Distance Measurements

B: Refraction Effect on Distance Measurements, Using Radio Wave Propagation

Part II: Refraction Effect on the Determination of Directions

A: Use of Relationships Between Different Effects of Refractive Index

B: Errors and Sources of Errors

C: Refraction in Connection with Spatial Geodesy

Part III: Elimination of Refraction from Geodetic Angular Measurements Nivellitic Refraction. Conformal Theory of Refraction

Insgesamt 55 Referate; Umfang 342 Seiten mit Abbildungen und Tabellen.

Preis öS 370,— bzw. DM 64,—.

Herausgeber: Österreichische Kommission für Internationale Erdmessung

Verleger: Österreichischer Verein für Vermessungswesen

## Neuwertige Doppelrechenmaschinen,

einfache Kurbel- sowie elektr. halb- und vollautomatische Rechenmaschinen  
BRUNSVIGA usw. lieferbar.

Generalüberholungen von BRUNSVIGA- u. THALES-Maschinen mit neuer Garantie.

Lieferung evtl. durch PKW!

F. H. FLASDIECK, D 5600 Wuppertal-Barmen, Futterstr. 17, Ruf 59 50 00

## Österreichischer Verein für Vermessungswesen

A 1180 Wien XVIII, Schopenhauerstraße 32

### Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen

Sonderheft 20: H. G. Jerie, *Weitere Analogien zwischen Aufgaben der Mechanik und der Ausgleichsrechnung*. 24 Seiten mit 14 Abbildungen, 1960. Preis S 32,— (DM 5,50).

Sonderheft 21: Mader, *Die zweiten Ableitungen des Newton'schen Potentials eines Kugelsegments — Topographisch berechnete partielle Geoidhebungen. — Tabellen zur Berechnung der Gravitation unendlicher, plattenförmiger, prismatischer Körper*. 36 Seiten mit 11 Abbildungen, 1960. Preis S 42,— (DM 7,50).

Sonderheft 22: Moritz, *Fehlertheorie der Graphisch-Mechanischen Integration — Grundzüge einer allgemeinen Fehlertheorie im Funktionenraum*. 53 Seiten mit 6 Abbildungen, 1961. Preis S 52,— (DM 9,—)

Sonderheft 23: Rinner, *Studien über eine allgemeine, voraussetzungslose Lösung des Folgebildanschlusses*. 44 Seiten, 1960. Preis S 48,— (DM 8,—)

Sonderheft 24: *Hundertjahrfeier der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung 23. bis 25. Oktober 1963*. 125 Seiten mit 12 Abbildungen, 1964. Preis S 120,— (DM 20,—)

Sonderheft 25: *Proceedings of the International Symposium Figure of the Earth and Refraction; Vienna, March 14<sup>th</sup>—17<sup>th</sup>, 1967*. 342 Seiten mit 150 Abbildungen, 1967. Preis S 370,— (DM 64,—).

### OEEPE, Sonderveröffentlichungen

Nr. 1: Rinner, *Analytisch-photogrammetrische Triangulation eines Teststreifens der OEEPE*. 31 Seiten, 1962. Preis S 42,—.

Nr. 2: Neumaier und Kasper, *Untersuchungen zur Aerotriangulation von Überweitwinkelaufnahmen*, 4 Seiten, 2 Seiten Abbildungen, 1965. Preis S 10,—.

Nr. 3: Stickler und Waldhäusl, *Interpretation der vorläufigen Ergebnisse der Versuche der Kommission C der OEEPE aus der Sicht des Zentrums Wien*, 4 Seiten, 8 Tabellen, 1967. Preis S 20,—.

Alte Jahrgänge der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen liegen in der Bibliothek des Österreichischen Vereines für Vermessungswesen auf und können beim Österreichischen Verein für Vermessungswesen bestellt werden.

#### Unkomplette Jahrgänge:

à 20,— S; Ausland 4,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 1 bis 5 ..... 1903 bis 1907  
7 bis 12 ..... 1909 bis 1914  
17 ..... 1919  
19 ..... 1921

#### Komplette Jahrgänge:

à 40,— S; Ausland 8,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 6 ..... 1908  
13 bis 16 ..... 1915 bis 1918  
18 ..... 1920  
20 bis 35 ..... 1922 bis 1937  
36 bis 39 ..... 1948 bis 1951

à 72,— S; Ausland 15,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 40 bis 49 ..... 1952 bis 1961

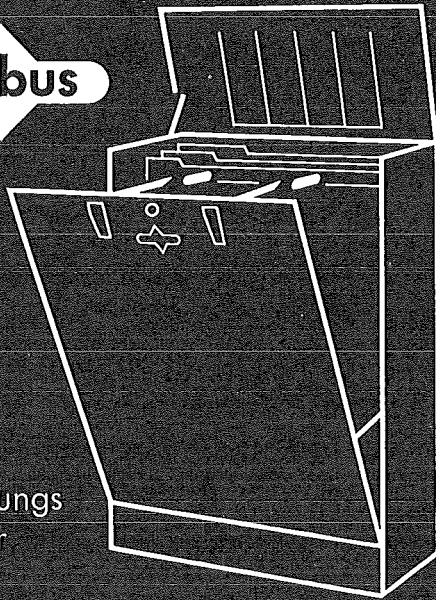
à 100,— S; Ausland 20,— sfr bzw. DM u. Porto

Jg. 50 bis 53 ..... 1962 bis 1965

à 130,— S; Ausland 28,— sfr bzw. DM u. Porto

ab Jg. 54 ..... ab 1966

**möbus**



Zeichnungs  
Ordner

### übersichtlich

Jede Zeichnung ist an ihrem gekennzeichneten Platz sofort auffindbar und einzeln mit einem Griff leicht zur Seite herausnehmbar.

### denkbar einfach

Mit Öffnen der abklappbaren Vorderwand kann zugleich jede gewünschte Zeichnung entnommen werden — das Einordnen ist ebenso einfach.

### platzsparend

Auf nur einem halben Quadratmeter Grundfläche können zum Beispiel bis 1000 Zeichnungen im Format DIN A0 untergebracht werden.

### blattschonend

Mechanische Beschädigungen des Zeichnungsgutes werden vermieden, da die Zeichnungen — jede für sich — hintereinander hängen.

Alleinhersteller  
für Österreich

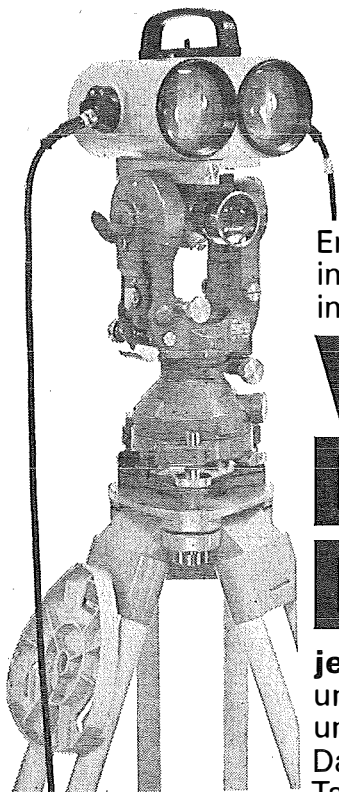
**RUDOLF & AUGUST ROST**

1151 WIEN, MÄRZSTRASSE 7  
Tel. (02 22) 92 32 31, 92 53 53

# Das Festpunktfeld

Gesammelte Vorträge  
der ersten Fachtagung  
für Vermessungswesen  
in Wien 1966  
140 Seiten mit 58 Ab-  
bildungen u. Tabellen,  
Preis S 120,- (DM 20,-)

Zu beziehen durch den Österreichischen Verein für Vermessungswesen,  
A 1180 Wien, Schopenhauerstraße 32



Erfahrungen von etwa 1500  
im Einsatz stehenden Geräten stecken  
im **neuen Modell** des

# WILD DISTOMAT DI 10

**jetzt** mit großer Reichweite von **2000 m**  
und passend auf Wild-Theodolite T1A, T16  
und T2.

Das bewährte, ideale Meßsystem für  
Tachymetrie, Absteckung und  
Polygonierung.

**Spart** Zeit, Arbeit, Geld.  
**Steigert** Genauigkeit, Leistung, Gewinn.  
**Bewährt** seit drei Jahren im weltweiten Einsatz.  
**Garantiert** Service durch erfahrene Fachleute in allen  
fünf Kontinenten.

Verlangen Sie bitte ausführlichen Prospekt.

**WILD**  
HEERBRUGG

Wild Heerbrugg AG  
CH-9435 Heerbrugg/Schweiz

50  
JAHRE  
ANS  
VERTRIEB  
1921  
1971  
WILD HEERBRUGG

Verlangen Sie Prospekte und Angebote von der  
ALLEINVERTRETUNG FÜR ÖSTERREICH

## RUDOLF & AUGUST ROST

1151 WIEN XV, MÄRZSTRASSE 7 (Nähe Westbahnhof und Stadthalle)  
TELEFON: (02 22) 92 32 31, 92 53 53, TELEGRAMME: GEOROST-WIEN

WIENER MESSE: Messegelände, jetzt Halle M, Stand 1272  
(Eingang Südseite links)

# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

**Österreichischen Verein für Vermessungswesen**

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer  
o. Prof. Hofrat Dr. phil., Dr. techn. h. c., Dr.-Ing. E. h. K. Ledersteger und  
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

---

Nr. 4

Baden bei Wien, Ende August 1971

59. Jg.

---

## Über die Äquivalenz von Lösungen des geodätischen Randwertproblems

Von *Erhart Ecker*, Berlin

### Zusammenfassung

Für das geodätische Randwertproblem existieren im wesentlichen zwei verschiedene Lösungen, entsprechend den Zugängen über die Formulierung und Lösung einer Integralgleichung einerseits und die analytische Fortsetzung der Schwereanomalien andererseits. Zwei für die unterschiedlichen Zugänge typische Lösungen werden in dieser Arbeit auf ihre gliedweise Äquivalenz untersucht und ein rechnerischer Äquivalenzbeweis für die ersten vier Glieder der Lösungsreihen gegeben.

### 1. Die beiden Lösungen von Brovar und Moritz

In diesem Abschnitt werden die beiden Lösungen des geodätischen Randwertproblems von Brovar und Moritz gegenübergestellt, um im 3. Abschnitt für die ersten vier Glieder der Lösungsreihen die Äquivalenz zeigen zu können. Daß diese Äquivalenz bestehen muß, wurde schon von Moritz festgestellt, denn beide Lösungen, so unterschiedlich sie gewonnen sind, stellen asymptotische Reihen derselben Funktion bezüglich desselben Parameters dar und müssen daher gliedweise äquivalent sein (Duschek, S. 26). Da in beiden Lösungsansätzen die planare Approximation eingeführt ist, müssen sich die Glieder der Lösungsreihen auch nur in planarer Approximation entsprechen.

*Die Brovarsche Lösung:* Anfangs der Sechzigerjahre hat Brovar das geodätische Randwertproblem im Anschluß an Molodensky über Formulierung und Lösung von Integralgleichungen in etlichen Variationen dargestellt. Wir beziehen uns hier auf die im Endergebnis einfachste Lösung (Brovar, S. 237–240), die folgende Gestalt hat:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^B, \quad \dots (1)$$

$$T_n^B = S(G_n) + \sum_{\nu=1}^p \binom{-1/2}{\nu} \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{(h-h_P)^{2\nu}}{l_0^{2\nu+1}} G_{n-2\nu} d\sigma, \quad \dots (2)$$

$$G_0 = \Delta g, \quad \dots (3')$$

$$G_n = \sum_{\nu=0}^q \binom{-3/2}{\nu} \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{(h-h_P)^{2\nu+1}}{l_0^{2\nu+3}} G_{n-2\nu-1} d\sigma -$$

$$\sum_{\nu=1}^p (-1)^\nu \tan^{2\nu} \beta G_{n-2\nu} d\sigma, \quad \dots (3)$$

Hierin ist  $S(f)$  das Stokessche Integral, angewandt auf  $f$ , also

$$S(f) = \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} \int_{\sigma} f S(\psi) d\sigma,$$

$p$  der ganzzahlige der beiden Werte  $n/2$ ,  $(n-1)/2$  und  $q$  der ganzzahlige der beiden Werte  $(n-1)/2$ ,  $(n-2)/2$ . Alle anderen Bezeichnungen, wie  $T$ ,  $\Delta g$ ,  $h$ ,  $l_0$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $S(\psi)$  usw. entsprechen dem Buch „Physical geodesy“ von Heiskanen und Moritz.

*Die Moritzsche Lösung:* Moritz hat Ende der Sechzigerjahre eine Lösung des geodätischen Randwertproblems aus einem heuristischen Ansatzpunkt hergeleitet (Moritz, 1969, S. 18–22). Er schrieb eine Taylorreihe für die Fortsetzung der Schwereanomalien vom Geoid ( $\Delta g^*$ ) auf die Topographie ( $\Delta g$ ) an und formalisierte sie durch  $\Delta g = U(\Delta g^*)$ . Durch den der Fortsetzung nach unten entsprechenden Umkehransatz  $\Delta g^* = D(\Delta g)$  bekam er aus  $\Delta g^* = D[U(\Delta g^*)]$  die Operatoridentität  $DU = I$ , aus der er mithilfe der Molodenskyschen Methode,  $h$  durch  $kh$  zu ersetzen und nach Potenzen von  $k$  zu sammeln, den die Fortsetzung nach unten bewirkenden Operator  $D$  aus  $U$  bestimmte. Durch Anwendung der Stokeschen Formel auf  $\Delta g^* = D(\Delta g)$  erhält er das Störpotential  $T^*$  auf dem Geoid und durch Fortsetzung nach oben das Störpotential  $T$  auf der Topographie.

Das Ergebnis dieser Vorgangsweise (Moritz, 1969, S. 22) bei Fortsetzung der Schwereanomalien auf das Niveau des Punktes, in dem die Stokessche Formel angewandt wird, läßt sich durch folgende Gleichungen zusammenfassen:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^M, \quad \dots (4)$$

$$T_n^M = S(g_n), \quad \dots (5)$$

$$g_0 = \Delta g, \quad \dots (6')$$

$$g_n = - \sum_{k=1}^n z^k L_k (g_{n-k}), \quad z = h - h_A. \quad \dots (6)$$

Hierin ist  $h$  die Höhe des laufenden Punktes im Stokesschen Integral, während  $h_A$  die Höhe des Aufpunktes ist, in dem das Stokessche Integral zur Anwendung kommt. Für die linearen Operatoren  $L_n$  gilt



$$L_0 = I,$$

$$L_1(f) = \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \int \frac{f - f_P}{l_0^3} d\sigma, \quad \dots (7)$$

$$L_n(f) = \frac{1}{n} L_1 [L_{n-1}(f)] = \frac{1}{n!} L_1^n (f). \quad \dots (8)$$

Die Formeln (5), (6) lassen sich noch, wie sich allgemein zeigen läßt, im Hinblick auf die Ausrechnung vereinfachen. Ersetzt man die Rekursion in (6) durch

$$\bar{g}_0 = \Delta g, \bar{g}_n = - \sum_{k=1}^n h^k L_k (\bar{g}_{n-k}), \quad \dots (9)$$

so kann man die ursprünglichen  $g_n$  durch

$$g_0 = \bar{g}_0, g_n = - \sum_{k=1}^n (h^k - h_A^k) L_k (\bar{g}_{n-k}) \quad \dots (10)$$

darstellen. Dies kann man wie folgt deuten: durch  $\bar{g} = \sum \bar{g}_n$  wird ja, entsprechend der Tatsache, daß das Moritzsche Verfahren in planarer Approximation als Taylorreihe deutbar ist, gerade die Fortsetzung der Schwereanomalien auf das Geoid vollzogen. Die restlichen Terme von (10) von der Form

$$\sum_{k=1}^n h_A^k L_k (\bar{g}_{n-k})$$

müssen also zwangsläufig für die Fortsetzung von  $\bar{g}$  ins Aufpunktsniveau  $h_A$  verantwortlich sein.

Bilden wir nun  $T_n^M$  nach (5), so finden wir unter Verwendung von (10) und  $S(h_s^k f) = h_A^n S(f)$ , sowie den in planarer Approximation gültigen Formeln (Moritz, 1969, S. 10)

$$S[L_1(f)] = L_1[S(f)] = -f, \quad \dots (11)$$

die wir natürlich auch in der Form  $S[L_n(f)] = S[\frac{1}{n} L_1 L_{n-1}(f)] = -\frac{1}{n} L_{n-1}(f)$  anwenden können,

$$T_n^M = S(\bar{g}_n) - \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k} L_{k-1} (\bar{g}_{n-k}). \quad \dots (12)$$

Darin kann der zweite Term vereinfacht werden, indem man aus der Summe das Glied für  $k = 1$  herausnimmt, es mittels (9) als Summe schreibt und mit der nun ab 2 laufenden Summe zusammenzieht. Zwar ist die sich so ergebende Darstellung

$$T_n^M = S(\bar{g}_n) + \sum_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k}) h^k L_{k-1} (\bar{g}_{n-k}) - h \Delta g \delta_{n,1} \quad \dots (13)$$

ein wenig komplizierter als (12), aber für die Ausrechnung praktischer. Schließlich

benötigen wir für den Äquivalenzbeweis noch  $L_1(T_n^M)$ ; aus (13) ergibt sich hierfür mit (11)

$$L_1(T_n^M) = -\bar{g}_n + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) L_1[h^k L_{k-1}(\bar{g}_n - k)] - L_1(h\Delta g) \delta_{n,1}, \dots (14)$$

Damit sind wir mit der allgemeinen Umformung der Moritzschen Lösung am Ende und schreiben die ersten vier Terme an. Zunächst erhalten wir aus (9) die  $\bar{g}_n$ :

$$\begin{aligned} \bar{g}_0 &= \Delta g, \\ \bar{g}_1 &= -hL_1(\Delta g), \\ \bar{g}_2 &= hL_1[hL_1(\Delta g)] - h^2L_2(\Delta g), \dots (15) \\ \bar{g}_3 &= -hL_1\{hL_1[hL_1(\Delta g)]\} + hL_1[h^2L_2(\Delta g)] + h^2L_2[hL_1(\Delta g)] - h^3L_3(\Delta g) \end{aligned}$$

Damit folgt aus (14)

$$\begin{aligned} L_1(T_0^M) &= -\Delta g, \\ L_1(T_1^M) &= hL_1(\Delta g) - L_1(h\Delta g), \\ L_1(T_2^M) &= \frac{1}{2}h^2L_1^2(\Delta g) - hL_1[hL_1(\Delta g)] + \frac{1}{2}L_1[h^2L_1(\Delta g)], \dots (16) \\ L_1(T_3^M) &= \frac{1}{6}h^3L_1^3(\Delta g) - \frac{1}{2}h^2L_1^2[hL_1(\Delta g)] - \frac{1}{2}hL_1[h^2L_1^2(\Delta g)] \\ &\quad + hL_1\{hL_1[hL_1(\Delta g)]\} + \frac{1}{3}L_1[h^3L_1^2(\Delta g)] - \frac{1}{2}L_1\{h^2L_1[hL_1(\Delta g)]\}. \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir die Brovarsche Lösung einer ähnlichen Behandlung unterziehen, um schließlich im 3. Abschnitt die Äquivalenz der Glieder bis  $n = 3$  zeigen zu können.

## 2. Umformung der Brovarschen Lösung

Um in die durch die Überschrift angekündigte Materie einsteigen zu können, müssen wir einige weitere Operatoren, Integralsätze und Operatorbeziehungen anführen. Im weiteren werden wir uns damit beschäftigen, wie man diese Kenntnisse anwenden kann, um Integrale mit  $1/l_0^{2n+1}$  im Integranden in Linearkombinationen von  $L_k$ -Operatoren umzuformen. Dies wird uns schließlich die Umformung der Brovarschen Lösung gestatten.

*Einige Operatoren:* Der durch (8) und (7) definierte Operator  $L_2 = \frac{1}{2}L_1^2$  kann in planarer Approximation durch den tangentialen Anteil  $\Delta_2$  des Laplaceoperators  $\Delta$  ausgedrückt werden. Für  $\Delta_2$ , wirksam auf der Kugel  $r = R$ , gelten folgende Darstellungen:

$$\Delta_2 = \frac{1}{R^2} \left( \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right), \dots (17)$$

$$= \frac{1}{R^2} \left( \cot \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right), \dots (17')$$

$$\doteq \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}, \quad \dots (17'')$$

worin  $\vartheta$ ,  $\lambda$  und  $\psi$ ,  $\alpha$  zwei Paare sphärischer Polarkoordinaten und  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  topozentrische Koordinaten auf der Kugel  $r = R$  sind, mit  $\bar{x}$  nach Süden,  $\bar{y}$  nach Osten und  $\bar{z}$  nach oben.

In planarer Approximation gilt nun  $L_1^2 + \Delta_2 = \Delta$ , und daraus folgt in bezug auf eine auf  $r = R$  gegebene Flächenfunktion die Beziehung

$$\Delta_2 = -L_1^2 = -2L_2. \quad \dots (18)$$

Nun gibt es für Flächenfunktionen einen Integralsatz (Mc Connell, S. 189; Moritz, 1968, S. 8), der für die Kugel spezialisiert die Gestalt

$$-\iint_{\sigma} D(U, V) d\sigma = \iint_{\sigma} U \Delta_2 V d\sigma = \iint_{\sigma} V \Delta_2 U d\sigma$$

hat. Hierin ist  $D$  ein Operator, der in topozentrischen Koordinaten durch

$$D(U, V) = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} \frac{\partial V}{\partial \bar{y}} \quad \dots (19)$$

definiert ist. In Zusammenhang mit dem Integralsatz brauchen wir den Operator  $D$  aber nicht, denn von der Integralformel nützen wir nur das rechte Gleichheitszeichen aus; berücksichtigt man  $\Delta_2 = -2L_2$ , so kann man die Integralformel in der Form

$$\iint_{\sigma} U L_2 V d\sigma = \iint_{\sigma} V L_2 U d\sigma \quad \dots (20)$$

schreiben. Diese Formel wird für die Umformung der Brovarschen Lösung grundlegend sein. Man kann sie auch direkt leicht bestätigen, wenn man  $U, V$  als in konvergente Kugelflächenfunktionsreihen entwickelbare Funktionen voraussetzt und für  $L_2 = \frac{1}{2} L_1^2$  die Beziehung (Heiskanen und Moritz, S. 39 (1–102))

$$f = \Sigma f_n \quad \Rightarrow \quad L_1(f) = -\frac{1}{R} \Sigma n f_n \quad \dots (21)$$

verwendet.

Aus (17''), (18) und (19) leitet man leicht folgende, für spätere Anwendungen nützliche Beziehungen her:

$$L_1^2(UV) = U L_1^2(V) + V L_1^2(U) - 2D(U, V), \quad \dots (22)$$

$$D(U^n, V) = n U^{n-1} D(U, V), \quad \dots (23)$$

$$U D(V, V) = -\frac{1}{2} L_1^2(UV^2) + U L_1^2(UV) - \frac{1}{2} U^2 L_1^2(V); \quad \dots (24)$$

letztere dient insbesondere zur Umformung von Gliedern wie  $G_k \tan^2 \beta$ , denn es kann für  $\tan^2 \beta = D(h, h)$  geschrieben werden, wie man sogleich einsieht, wenn man für die Topographie im topozentrischen System die Gleichung  $\bar{z} - h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  ansetzt und die maximale Geländeneigung  $\beta$  als Winkel zwischen der Flächennormale und der  $\bar{z}$ -Achse mit Hilfe des Gradienten bestimmt.

*Abwälzung der Potenzen von  $1/l_0$ :* In der Brovarschen Lösung kommen Integrale der Form

$$\frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \int \frac{(h - h_P)^{2n+1}}{l_0^{2n+3}} G_k d\sigma$$

vor. Wir müssen nun versuchen, die Potenzen von  $l_0$  mit Hilfe der Integralformel (20) so abwälzen, daß am Schluß

$$\frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \int \frac{1}{l_0^3} \partial [(h - h_P)^{2n+1} G_k] d\sigma$$

steht; dabei ist  $\partial$  irgendein Differentialoperator, der sich aus der Abwälzung bestimmen muß und der irgendwie aus  $L_k$ -Operatoren zusammengesetzt sein muß, um auf eine mit der Moritzschen Lösung vergleichbare Darstellung zu kommen.

Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir zuerst versuchen,  $1/l_0^n$  mit Hilfe der  $L_2$ -Operatoren auf  $1/l_0$  oder  $1/l_0^3$  zurückzuführen. Zunächst findet man mittels (17') aus  $l_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2}$

$$\Delta_2 \left( \frac{1}{l_0^n} \right) = \frac{n^2}{l_0^{n+2}} - \frac{n(n-2)}{4R^2 l_0^n}$$

und daraus in planarer Approximation, mit  $\Delta_2 = -2L_2$ ,

$$L_2 \left( \frac{1}{l_0^n} \right) \doteq -\frac{1}{2} \frac{n^2}{l_0^{n+2}}, \quad \dots (25)$$

und für  $n = 1$

$$L_2 \left( \frac{1}{l_0} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{l_0^3}. \quad \dots (25')$$

Durch wiederholte Anwendung von  $L_2$  auf  $1/l_0$  findet man aus (25') mit (25)

$$L_2^n \left( \frac{1}{l_0} \right) = \left( -\frac{1}{2} \right)^n \frac{[(2n-1)!!]^2}{l_0^{2n+1}}. \quad \dots (26)$$

Hierin kann man auf der linken Seite  $L_2^n = L_2^{n-1} L_2$  schreiben und (25') einsetzen; dann erhält man, nach  $1/l_0^{2n+1}$  aufgelöst,

$$\frac{1}{l_0^{2n+1}} = \frac{(-2)^{n-1}}{[(2n-1)!!]^2} L_2^{n-1} \left( \frac{1}{l_0^3} \right). \quad \dots (27)$$

Diese Formel leistet zusammen mit der Integralformel (20) die Abwälzung der Potenzen von  $1/l_0$ . Als Beispiel wollen wir die in der Brovardschen Lösung vorkommenden Integrale umformen.

In (2) und (3) kommen die Integrale

$$J = \binom{-1/2}{\nu} \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \int \frac{(h - h_P)^{2\nu}}{l_0^{2\nu+1}} G_{n-2\nu} d\sigma, \quad \dots (28)$$

$$K = \binom{-3/2}{\nu} \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h-h_P)^{2\nu+1}}{l_0^{2\nu+3}} G_{n-2\nu-1} d\sigma \quad \dots (29)$$

vor. Setzt man hierin für  $1/l_0^k$  die Formel (27) ein, so kann man über wiederholte Anwendung der Integralformel (20) die Potenzen von  $1/l_0$  bis auf  $1/l_0^3$  abwälzen, wonach die  $L_1$ -Definition angewendet werden kann. Unter Verwendung von (7) und (8) bekommt man

$$J = -\frac{1}{2\nu} L_{2\nu-1} [(h-h_P)^{2\nu} G_{n-2\nu}], \quad \dots (28')$$

$$K = L_{2\nu+1} [(h-h_P)^{2\nu+1} G_{n-2\nu-1}]. \quad \dots (29')$$

Später brauchen wir noch

$$L_1(J) = -L_{2\nu} [(h-h_P)^{2\nu} G_{n-2\nu}]. \quad \dots (28'')$$

Nun können wir an die Umformung der Brovarschen Lösung herangehen.

*Umformung der Brovarschen Lösung:* Aus (2) und (28') folgt

$$T_n^B = S(G_n) - \sum_{\nu=1}^p \frac{1}{2\nu} L_{2\nu-1} [(h-h_P)^{2\nu} G_{n-2\nu}], \quad \dots (30)$$

und aus (3) mit (29')

$$G_n = \sum_{\nu=0}^q L_{2\nu+1} [(h-h_P)^{2\nu+1} G_{n-2\nu-1}] - \sum_{\nu=1}^p (-1)^\nu \tan^{2\nu} \beta G_{n-2\nu} + \Delta g \delta_{n,0}. \quad \dots (31)$$

Analog zur Vorgangsweise bei der Moritzschen Lösung bilden wir aus (30)

$$L_1(T_n^B) = -G_n - \sum_{\nu=1}^p L_{2\nu} [(h-h_P)^{2\nu} G_{n-2\nu}], \quad \dots (32)$$

worin wir aus (31) für  $G_n$  einsetzen können; das ergibt

$$L_1(T_n^B) = -\sum_{\nu=1}^n L_{\nu} [(h-h_P)^\nu G_{n-\nu}] + \sum_{\nu=1}^p (-1)^\nu \tan^{2\nu} \beta G_{n-2\nu} - \Delta g \delta_{n,0}. \quad \dots (32')$$

Hierin widersetzt sich vor allem die zweite Summe einer Umformung in Richtung auf einen allgemeinen gliedweisen Äquivalenzbeweis. Im Einzelfall macht jedoch die Umformung der Glieder dieser Summe mittels (24) keine Schwierigkeiten. Zunächst ergibt sich aus (31) für  $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} G_0 &= \Delta g, \\ G_1 &= L_1 [(h-h_P) G_0] = L_1 (h \Delta g) - h L_1 (\Delta g), \\ G_2 &= L_1 [(h-h_P) G_1] + G_0 \tan^2 \beta, \\ G_3 &= L_1 [(h-h_P) G_2] + L_3 [(h-h_P)^3 G_0] + G_1 \tan^2 \beta. \end{aligned} \quad \dots (33)$$

Zur Umformung der Terme  $G_0 \tan^2 \beta$ ,  $G_1 \tan^2 \beta$  steht uns die Formel (24) zur Verfügung. Schwierigkeiten erwachsen hierin allein aus dem Term  $L_3 [(h - h_P)^3 G_0]$ . Hier landet man bei korrekter Anwendung der Rechenregeln für die  $L_k$ -Operatoren in einer Sackgasse, wenn man die Umformung nicht in einer ganz bestimmten Weise vornimmt; und zwar muß man  $L_3$  als  $\frac{1}{3} L_1 L_2$  schreiben und sich bei der Berechnung von  $L_2 [(h - h_P)^3 \Delta g]$  von der Definition (17'') des Operators  $\Delta_2 = -2 L_2$  leiten lassen. Dann bekommt man

$$G_2 = L_1 [h L_1 (h \Delta g)] - L_1 [h^2 L_1 (\Delta g)] + h L_1 [h L_1 (\Delta g)] - \frac{1}{2} L_1^2 (h^2 \Delta g) - \frac{1}{2} h^2 L_1^2 (\Delta g), \quad \dots (33')$$

$$\begin{aligned} G_3 = & L_1 \{ h L_1 [h L_1 (h \Delta g)] \} - L_1 \{ h L_1 [h^2 L_1 (\Delta g)] \} + L_1 \{ h^2 L_1 [h L_1 (\Delta g)] \} \\ & - \frac{1}{3} L_1 [h^3 L_1^2 (\Delta g)] - h L_1 \{ h L_1 [h L_1 (\Delta g)] \} + \frac{1}{2} h L_1 [h^2 L_1^2 (\Delta g)] \\ & - \frac{1}{2} L_1 [h^2 L_1^2 (h \Delta g)] - \frac{1}{6} h^3 L_1^3 (\Delta g) - \frac{1}{2} L_1^2 [h^2 L_1 (h \Delta g)] \\ & + \frac{1}{2} L_1^2 [h^3 L_1 (\Delta g)] + \frac{1}{2} h^2 L_1^2 [h L_1 (\Delta g)]. \end{aligned}$$

Schließlich bekommt man aus (32)

$$L_1 (T_0^B) = -G_0 = -\Delta g,$$

$$L_1 (T_1^B) = -G_1, \quad \dots (34)$$

$$L_1 (T_2^B) = -G_2 - L_2 [h - h_P]^2 G_0,$$

$$L_1 (T_3^B) = -G_3 - L_2 [h - h_P]^2 G_1.$$

Setzt man darin aus (33) für  $G_k$  ein, so erhält man die rechten Seiten von (16). Somit haben wir als rechnerisches Endergebnis gefunden, daß

$$L_1 (T_n^M) = L_1 (T_n^B), \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad \dots (35)$$

gilt. Aus diesen Gleichungen werden wir im nächsten Abschnitt die Äquivalenz der Glieder folgern.

### 3. Äquivalenz der Lösungen

In (35) haben wir

$$L_1 (T_n^M - T_n^B) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad \dots (36)$$

gefunden. Wir müßten zeigen, daß daraus

$$T_n^M - T_n^B = 0$$

folgt. Leider folgt aber aus (36) nur

$$T_n^M - T_n^B = c_n = \text{konstant}, n = 0, 1, 2, 3 \quad \dots (37)$$

Dies sieht man so ein: nehmen wir an,  $f = T_n^M - T_n^B$  sei auf  $r = R$  in eine konvergente Kugelflächenfunktionsreihe  $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  entwickelbar. (Die Annahme der Konvergenz bedeutet hier, wie wir sehen werden, keine wesentliche Einschränkung, da es nur um den konstanten Anteil der Funktion  $f$  geht; ähnlich ist es mit der Annahme der Entwickelbarkeit.) Nach (21) folgt aus dem Ansatz

$$L_1(f) = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} n f_n.$$

Wir haben gezeigt, daß  $L_1(f) = 0$  ist, also gilt  $n f_n = 0$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$  und hieraus folgt wohl  $f_n = 0$  für  $n \neq 0$ , aber nicht  $f_0 = 0$ . Es kann also  $f_0 = a_0 P_0(\cos \vartheta) = a_0 = \text{konst.}$  ohne weiteres ungleich Null sein, wie behauptet.

Dies mindert aber den Wert der „Äquivalenz“ nicht wesentlich, da es ja bei einem Potential kaum jemals auf einen konstanten Anteil ankommt. Bezogen auf Höhenanomalien

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}$$

heißt diese Äquivalenz, daß die nach beiden Lösungsmethoden berechneten Geoidreliefs sich um einen konstanten Betrag der Höhe nach unterscheiden könnten. Dies ist an sich unwesentlich.

*Abschließende Bemerkungen:* Mit dem Formelsystemen (1) bis (3) und (4) bis (6) von Brovar und Moritz liegen zwei verschiedene Lösungen des geodätischen Randwertproblems vor. Als asymptotische Entwicklungen derselben Funktion nach demselben Parameter sind sie, wie schon Moritz in seiner ersten Arbeit festgestellt hat, gliedweise äquivalent. Der praktische Äquivalenzbeweis bis  $T_2$  wurde schon von Moritz gegeben; in dieser Arbeit wurde er in etwas strikterem Sinne gliedweise nachvollzogen und um die Äquivalenz für  $T_3$  erweitert. Es wurden Formeln erarbeitet, die grundsätzlich die Grundlage für den praktischen Äquivalenzbeweis der höheren Glieder bieten, jedoch würde vermutlich die Darstellung der Äquivalenz für  $T_4$  sogar für Leser von überdurchschnittlicher Geduld eine kaum zumutbare Belastung sein.

#### Literatur

Brovar, V. V. (1963): Solution of the Molodenskiy boundary problem. English translation of the Russian journal "Geodesy and Aerophotography" by AGU.

Duschek, A. (1961): Vorlesungen über höhere Mathematik. Band IV. Springer, Wien.

Heiskanen, W. A. und Moritz, H. (1967): Physical geodesy. Freeman, San Francisco.

McConnell, A. J. (1957): Applications of the tensor analysis. Dover, New York.

Moritz, H. (1968): Linear solutions of the geodetic boundary-value problem. DGK, Reihe A, Heft 58, München.

Moritz, H. (1969): Nonlinear solutions of the geodetic boundary-value problem. Report Nr. 126, Department of geodetic science, Ohio State University.

Moritz, H. (1970): Molodensky's series and analytical continuation. Report Nr. 145, Department of geodetic science, Ohio State University.

## Ableitung differentieller Beziehungen in Vektoren- bzw. Matrizen-schreibweise in der astronomisch geodätischen Ortsbestimmung

Von *Herbert Lichtenegger, Graz*

In der geodätischen Astronomie werden zur Festlegung von Richtungen durch jeweils zwei Parameter verschiedene Koordinatensysteme verwendet. Man unterscheidet im besonderen das Horizontsystem mit den Parametern Zenitdistanz  $z$  und Azimut  $a$  (gezählt von Süd über West) und das Stundenwinkelsystem mit den Parametern Deklination  $\delta$  und Stundenwinkel  $t$ .

Werden die Richtungen zum Stern, zum Zenit und die Richtung der Rotationsachse der Erde auf eine Einheitskugel (Richtungskugel) abgebildet, so ergibt das entstehende sphärische Dreieck  $PZS$  (siehe Abb. 1) eine Transformationsmöglichkeit zwischen den erwähnten Koordinatensystemen, welche mit Hilfe sphärischer trigonometrischer Sätze gefunden werden kann. In weiterer Folge sind auch differentielle Beziehungen für die Wahl günstigster Beobachtungspositionen von Bedeutung.

Es soll im folgenden die Ableitung solcher differentieller Beziehungen ohne Zuhilfenahme von sphärischen Sätzen gezeigt werden, wobei zuerst die Transformation zwischen Horizont- und Stundenwinkelsystem behandelt wird und weiters Differentialformeln direkt aus den Bestimmungsgleichungen zur Festlegung des Zenits bzw. der Richtung des Ortsmeridians abgeleitet werden.

### 1. Transformation zwischen Horizont- und Stundenwinkelsystem

Die Richtung zum Stern kann ([1],[3]) sowohl im Horizont- wie auch im Stundenwinkelsystem durch einen Richtungsvektor  $s'$  bzw.  $s$  dargestellt werden. Die jeweilige  $z$ -Achse des Koordinatensystems weist zum Zenit bzw. Pol, die  $x$ -Achse liegt jeweils orthogonal dazu in der Ebene des Ortsmeridians, und die gemeinsame  $y$ -Achse bildet mit  $x$ - und  $z$ -Achse ein Linkssystem (siehe Abb. 1).

$$s' = \begin{bmatrix} \sin z \cos a \\ \sin z \sin a \\ \cos z \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos t \\ \cos \delta \sin t \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die Transformation kann mit Hilfe einer Drehmatrix  $\mathbf{R}$  durchgeführt werden. Da diese Matrix orthogonal ist, kann auch die inverse Transformation durch die transponierte Matrix  $\mathbf{R}^T$  leicht durchgeführt werden, da die Beziehung  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{E}$  gilt.

$$s' = \mathbf{R}s \quad s = \mathbf{R}^T s' \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

Die skalare Schreibweise ergibt untenstehende Transformationsformeln, wobei diese Gleichungen Sinuscosinus-, Sinus- und Seitencosinussatzanwendungen der sphärischen Trigonometrie auf das sphärische Dreieck bedeuten ([3]).



$$\begin{aligned}
 \sin z \cos a &= \cos \delta \cos t \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \\
 \sin z \sin a &= \cos \delta \sin t \\
 \cos z &= \cos \delta \cos t \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi
 \end{aligned}
 \tag{3a}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \delta \cos t &= \sin z \cos a \sin \varphi + \cos z \cos \varphi \\
 \cos \delta \sin t &= \sin z \sin a \\
 \sin \delta &= -\sin z \cos a \cos \varphi + \cos z \sin \varphi
 \end{aligned}
 \tag{3b}$$

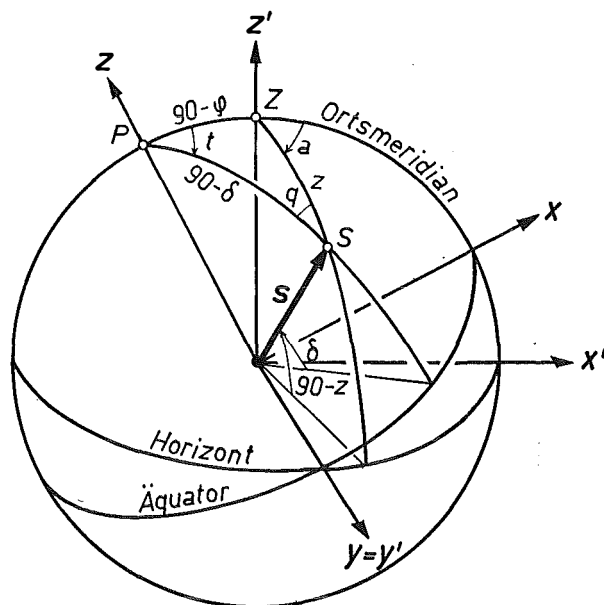


Abb. 1

Zur Ableitung der differentiellen Beziehungen nehmen wir an, daß der Richtungsvektor  $s$  um  $ds$  verändert und zusätzlich mit der differentiellen Matrix  $d\mathbf{R}$  verdreht wird ([2]).

$$\begin{aligned}
 s' + ds' &= d\mathbf{R}\mathbf{R}(s + ds) = (\mathbf{E} + d\mathbf{R}_A)\mathbf{R}(s + ds) = \\
 &= \mathbf{R}s + \mathbf{R}ds + d\mathbf{R}_A\mathbf{R}s + \underline{d\mathbf{R}_A\mathbf{R}ds} \\
 ds' &= \mathbf{R}ds + d\mathbf{R}_A\mathbf{R}s \quad \text{Klein 2. Ordnung}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

$$d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -d\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d\mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d\varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ -d\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \text{Axiator}
 \tag{5}$$

Die Vektoren  $ds'$  und  $ds$  folgen aus der Differentiation von  $s'$  und  $s$  nach ihren Richtungsparametern und können folgend geschrieben werden:

$$ds' = \begin{bmatrix} \cos z \cos a & -\sin a \\ \cos z \sin a & \cos a \\ -\sin z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz \\ \sin z da \end{bmatrix} = \mathbf{A}'d\mathbf{A}'
 \tag{6a}$$

$$ds = \begin{bmatrix} -\sin \delta \cos t & -\sin t \\ -\sin \delta \sin t & \cos t \\ \cos \delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\delta \\ \cos \delta dt \end{bmatrix} = \mathbf{A}d\mathbf{A} \quad (6b)$$

Damit ergeben sich bereits die differentiellen Beziehungen in Matrizen Schreibweise

$$\mathbf{A}'d\mathbf{A}' = \mathbf{R}\mathbf{A}d\mathbf{A} + d\mathbf{R}_A\mathbf{s}'$$

und unter der Beachtung der Beziehung  $\mathbf{A}'^T\mathbf{A}' = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$

$$d\mathbf{A}' = \mathbf{A}'^T\mathbf{R}\mathbf{A}d\mathbf{A} + \mathbf{A}'^Td\mathbf{R}_A\mathbf{s}' \quad (7a)$$

$$d\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{R}^T\mathbf{A}'d\mathbf{A}' - \mathbf{A}^T\mathbf{R}^Td\mathbf{R}_A\mathbf{s}' \quad (7b)$$

Zur skalaren Umformung beachten wir, daß die Spaltenvektoren von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}'$  Einheitsvektoren sind, es gilt:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \delta} \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \sec \delta \quad (8a)$$

$$\mathbf{A}' = [\mathbf{a}', \mathbf{b}'] \quad \mathbf{a}' = \frac{\partial \mathbf{s}'}{\partial z} \quad \mathbf{b}' = \frac{\partial \mathbf{s}'}{\partial a} \operatorname{cosec} z \quad (8b)$$

Weiters ergibt sich nach Gl. (2):

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] \quad \bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{s}'}{\partial \delta} \quad \bar{\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{s}'}{\partial t} \sec \delta \quad (9a)$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{A}' = \bar{\mathbf{A}}' = [\bar{\mathbf{a}}', \bar{\mathbf{b}}'] \quad \bar{\mathbf{a}}' = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \quad \bar{\mathbf{b}}' = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial a} \operatorname{cosec} z \quad (9b)$$

Ein Teil der in den Gln. (7) vorkommenden Inprodukte kann geometrisch gedeutet und in Funktion des parallaktischen Winkels  $q$  ausgedrückt werden (siehe Abb. 2).

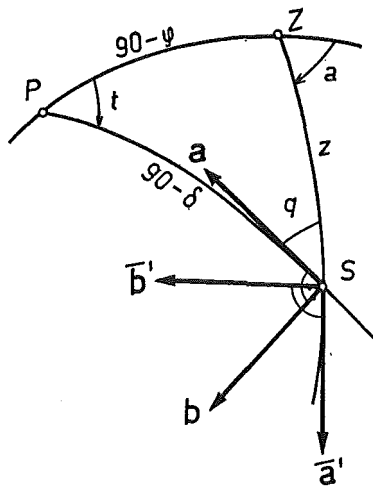


Abb. 2

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'^T \bar{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{a}}' = -\cos q & \mathbf{a}'^T \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{b}}' = \sin q \\ \mathbf{b}'^T \bar{\mathbf{a}} &= \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{a}}' = \sin q & \mathbf{b}'^T \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{b}}' = \cos q \end{aligned} \quad (10a)$$

Das Glied mit dem Axiator  $d\mathbf{R}_A$  ergibt durch einfache Matrizenmultiplikation:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'^T d\mathbf{R}_A \mathbf{s}' &= \cos a \, d\varphi & -\mathbf{a}^T d\mathbf{R}_A \mathbf{s} &= \cos t \, d\varphi \\ \mathbf{b}'^T d\mathbf{R}_A \mathbf{s}' &= -\sin a \cos z \, d\varphi & -\mathbf{b}^T d\mathbf{R}_A \mathbf{s} &= \sin t \cos \delta \, d\varphi \end{aligned} \quad (10b)$$

Diese Beziehungen werden in die Gln. (7) eingesetzt und es ergeben sich die skalaren, differentiellen Beziehungen der Transformation.

$$\begin{aligned} dz &= -\cos q \, d\delta + \sin q \cos \delta \, dt + \cos a \, d\varphi \\ \sin z \, da &= \sin q \, d\delta + \cos q \cos \delta \, dt - \sin a \cos z \, d\varphi \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} d\delta &= -\cos q \, dz + \sin q \sin z \, da + \cos t \, d\varphi \\ \cos \delta \, dt &= \sin q \, dz + \cos q \sin z \, da + \sin t \sin \delta \, d\varphi \end{aligned} \quad (11b)$$

Die günstigsten Beobachtungspositionen können durch Umstellung aus den Gln. (11a) gewonnen werden. Im nächsten Punkt soll die direkte Ableitung aus den Bestimmungsgleichungen gezeigt werden.

## 2. Differentielle Beziehungen der Beobachtungsmethoden

Bei den genauen Methoden der geodätischen Astronomie ist stets ein Parameter der Zenitrichtung, Breite oder Länge, näherungsweise bekannt. Es genügt also die Messung eines Parameters im Horizontsystem, Zenitdistanz oder Azimut (Richtungswinkel), um das sphärische Dreieck auf der Richtungskugel auflösen zu können. Die Beobachtungsverfahren sind so zu wählen, daß sich der systematische Fehler des genähert bekannten Parameters sowie die Meßfehler minimal auf das Ergebnis auswirken.

### 2.1. Grundlagen

Wir wählen ein Koordinatensystem wie im Abschnitt 1 und stellen die Richtung zum Stern durch einen Vektor im Stundenwinkelsystem dar und ebenso das Dreibein eines Tangentialkoordinatensystems im Beobachtungsort, dessen Achse  $z$  zum Zenit, die Achse  $n$  als Tangente an den Ortsmeridian nach Nord und die Achse  $o$  orthogonal dazu nach Osten weist (siehe Abb. 3).

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos t \\ \cos \delta \sin t \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

### 2.2. Festlegung des Zenits durch Zenitdistanzmessung

Die Bestimmungsgleichung lautet

$$\mathbf{z}^T \mathbf{s} = \cos z \quad (13)$$

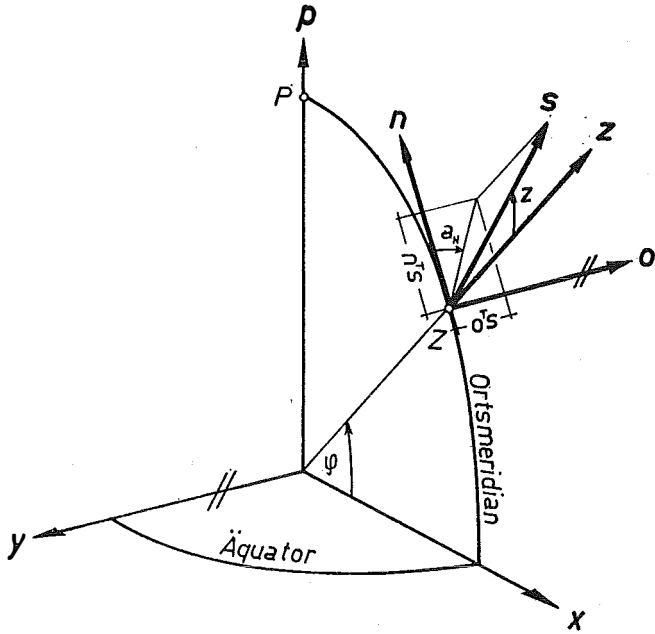


Abb. 3

und ergibt skalar geschrieben den Seitencosinussatz der sphärischen Trigonometrie.

$$\cos z = \cos \varphi \cos \delta \cos t + \sin \varphi \sin \delta$$

Einfache Differentiation der Gl. (13) ergibt:

$$-\sin z \, dz = dz^T s + z^T ds \tag{14}$$

Mit

$$dz = n \, d\varphi$$

$$ds = A \, dA$$

geht Gl. (14) über in

$$-\sin z \, dz = n^T s \, d\varphi + z [^T a, b] \, dA \tag{15}$$

Die darin vorkommenden Inprodukte können wieder geometrisch gedeutet werden und ergeben skalar (siehe Abb. 4a, 4b):

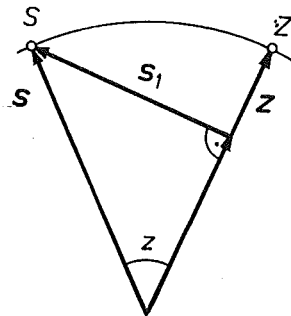


Abb. 4a

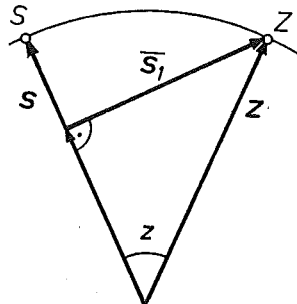


Abb. 4b

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \mathbf{s} d\varphi &= (\mathbf{n}^T \mathbf{s}_1 \sin z + \underbrace{\mathbf{n}^T \mathbf{z} \cos z}_{\equiv \frac{\cos \varphi}{\sin \delta}}) d\varphi = -\cos a \sin z d\varphi \\ \mathbf{z}^T \mathbf{a} d\delta &= (\underbrace{\mathbf{s}^T \mathbf{a} \cos z}_{\equiv \frac{\cos \varphi}{\sin \delta}} + \mathbf{s}_1^T \mathbf{a} \sin z) d\delta = \sin z \cos q d\delta \\ \mathbf{z}^T \mathbf{b} \cos \delta dt &= (\underbrace{\mathbf{s}^T \mathbf{a} \cos z}_{\equiv \frac{\cos \varphi}{\sin \delta}} + \mathbf{s}_1^T \mathbf{b} \sin z) \cos \delta dt = -\sin z \sin q \cos \delta dt \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (15) ergibt sich die zu Gleichung (11 a) analoge, wobei das Glied  $\sin q \cos \delta$  umgeformt wurde.

$$dz = \cos a d\varphi - \cos q d\delta + \left. \begin{array}{l} \cos \varphi \sin a \\ \sin q \cos \delta \end{array} \right\} dt$$

Die explizite Darstellung dieser Gleichung ergibt die differentiellen Beziehungen für die Bestimmung der Breite und des Stundenwinkels (Länge), woraus abgelesen werden kann, daß für Breitenbestimmungen aus Zenitdistanzmessung Beobachtungen in der Nähe des Meridians, für Längenbestimmungen jedoch in der Nähe des ersten Vertikals durchgeführt werden sollen.

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sec a dz - \cos \varphi \operatorname{tg} a dt + \cos q \sec a d\delta \\ dt &= \sec \varphi \operatorname{cosec} a dz - \sec \varphi \operatorname{ctg} a d\varphi + \cos q \sec \varphi \operatorname{cosec} a d\delta \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.3. Festlegung des Zenits durch Richtungs(Azimet-)messungen

Die Bestimmungsgleichung lautet (siehe auch Abb. 3)

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{s}}{\mathbf{o}^T \mathbf{s}} \quad (17)$$

und ergibt skalar geschrieben den Cotangentensatz der sphärischen Trigonometrie.

$$\operatorname{ctg} a = \frac{-\cos \varphi \operatorname{tg} \delta + \sin \varphi \cos t}{\sin t}$$

Einfache Differentiation der Gl. (17) ergibt:

$$-\frac{1}{\sin^2 a} da = \frac{\mathbf{o}^T \mathbf{s} (\mathbf{n}^T ds + d\mathbf{n}^T \mathbf{s}) - \mathbf{n}^T \mathbf{s} (\mathbf{o}^T ds + d\mathbf{o}^T \mathbf{s})}{(\mathbf{o}^T \mathbf{s})^2} \quad (18)$$

Das Inprodukt  $\mathbf{o}^T \mathbf{s} = -\cos \delta \sin t$  wird nach Gl. (3) ersetzt durch  $-\sin z \cdot \sin a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{\sin a} da &= (\mathbf{n}^T ds + d\mathbf{n}^T \mathbf{s}) - \operatorname{ctg} a (\mathbf{o}^T ds + d\mathbf{o}^T \mathbf{s}), \quad d\mathbf{o}^T = (0, 0, 0) \\ \sin z da &= \sin a d\mathbf{n}^T \mathbf{s} + (\sin a \mathbf{n}^T - \cos a \mathbf{o}^T) ds \end{aligned} \quad (19)$$

Die darin vorkommenden Ausdrücke können geometrisch gedeutet werden:

$$\begin{aligned} \sin a d\mathbf{n}^T \mathbf{s} &= -\sin a \mathbf{z}^T \mathbf{s} d\varphi = -\sin a \cos z d\varphi \\ (\sin a \mathbf{n}^T - \cos a \mathbf{o}^T) &= \begin{bmatrix} -\sin a \sin \varphi \\ \cos a \\ \sin a \cos \varphi \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Dieser Vektor kann gedeutet werden als ein ursprünglich im Horizontsystem dargestellter Vektor  $s'$  ( $a + 90^\circ$ ,  $z = 90^\circ$ ), der mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{R}$  in das Stundenwinkelsystem verdreht wird (siehe auch Gl. (8, 9, 10)).

$$s' = \begin{bmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}' \quad , \quad \bar{\mathbf{b}}' = \mathbf{R}^T \mathbf{b}' = (\sin a \mathbf{n} - \cos a \mathbf{o})$$

$$\bar{\mathbf{b}}'^T ds = \bar{\mathbf{b}}'^T \mathbf{A} d\mathbf{A} = \sin q d\delta + \cos q \cos \delta dt$$

Eingesetzt in Gl. (19) ergibt sich die zu Gleichung (11 a) analoge.

$$\sin z da = -\sin a \cos z d\varphi + \cos q \cos \delta dt + \sin q d\delta$$

Die explizite Darstellung dieser Gleichung ergibt die differentiellen Beziehungen für die Bestimmung des Zenits und man ersieht, daß für Breitenbestimmungen aus Richtungsmessungen Beobachtungen in der Nähe des ersten Vertikals, für Längenbestimmungen jedoch in der Nähe des Meridians durchgeführt werden sollen.

$$d\varphi = -tg z \operatorname{cosec} a da + \cos q \cos \delta \sec z \operatorname{cosec} a dt + \sin q \sec z \operatorname{cosec} a d\delta$$

$$dt = \sin z \sec q \sec \delta da + \sin a \cos z \sec q \sec \delta d\varphi - tg q \sec \delta d\delta \quad (20)$$

#### 2.4. Bestimmung des Azimuts

Wir unterscheiden hier Methoden, die neben der Richtungsmessung als zweite Meßgröße die Zeit oder Zenitdistanzen verwenden. Die Differentialformel für die erste Methode ist bereits unter der Festlegung des Zenits aus Richtungsmessungen behandelt worden. Es ergibt sich die Beobachtungsposition der größten Digression für polnahe Sterne. Es soll hier nur mehr der Fall der Azimutbestimmung aus Zenitdistanzen behandelt werden.

Die Bestimmungsgleichung lautet

$$\sin \delta = \mathbf{s}^T \mathbf{p} = (\mathbf{R}^T \mathbf{s}')^T \mathbf{p} \quad , \quad \mathbf{p}^T = (0, 0, 1) \quad (21)$$

und ergibt skalar geschrieben wieder einen Seitencosinussatz.

$$\sin \delta = -\cos \varphi \sin z \cos a + \sin \varphi \cos z$$

Wir nehmen an, daß der Vektor  $s'$  und  $ds'$  geändert und zusätzlich mit der differentiellen Matrix  $d\mathbf{R}$  verdreht wird:

$$\sin(\delta + d\delta) = \{d\mathbf{R}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{s}' + d\mathbf{s}')\}^T \mathbf{p} = \{(\mathbf{E} + d\mathbf{R}_A^T) \mathbf{R}^T (\mathbf{s}' + d\mathbf{s}')\}^T \mathbf{p}$$

Bei Vernachlässigung Glieder zweiter Ordnung ergibt sich:

$$\cos \delta d\delta = (\mathbf{R}^T d\mathbf{s}')^T \mathbf{p} + (d\mathbf{R}_A^T \mathbf{R}^T \mathbf{s}')^T \mathbf{p} \quad (22)$$

Einfache Matrizenmultiplikation ergibt:

$$(\mathbf{R}^T d\mathbf{s}')^T \mathbf{p} = (-\cos \varphi \cos z \cos a - \sin z \sin \varphi) dz + \cos \varphi \sin a \sin z da$$

$$(d\mathbf{R}_A^T \mathbf{R}^T \mathbf{s}')^T \mathbf{p} = (\sin \varphi \sin z \cos a + \cos \varphi \cos z) d\varphi$$

Eingesetzt in Gl. (22) und umgestellt ergibt:

$$da = (tg \varphi + ctg z \cos a) \operatorname{cosec} a dz - (ctg z + tg \varphi \cos a) \operatorname{cosec} a d\varphi + \cos \delta \sec \varphi \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} z d\delta \quad (23)$$

Aus dieser sieht man, daß sich widersprechende Forderungen vorliegen. Damit der Einfluß einer fehlerhaften Breite minimal wird, müßte  $t = 90^\circ$ , zur Elimination eines Meßfehlers in der Zenitdistanz  $q = 90^\circ$  (Elongation) sein.

#### Literatur

- [1] *Mueller, I.*: Spherical and Practical Astronomy, Frederick Ungar Publishing Co., New York.  
 [2] *Rimmer, K.*: Über räumliche Drehungen, DGK, Reihe A, Heft 25.  
 [3] *Brandstätter, G.*: Eine einfache vektorielle Herleitung räumlicher Orientierungsmatrizen. ÖZfV 1966, Heft 5, Seite 137–145.

## Bemerkungen zum Querfehler in Zugsmitte bei einem Polygonzug mit Zwischenorientierungen

Von *Josef Zeger*, Wien

### Zusammenfassung

Kritische Untersuchung der Gleichung für die Berechnung des Querfehlers in der Mitte eines an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßig angeschlossenen Polygonzuges (aus Jordan/Eggert/Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde), sowie der aus dieser Gleichung abgeleiteten Behauptung, daß der Querfehler in Zugsmitte beim Vorhandensein einer einzigen Zwischenorientierung größer wird als bei einem gleichen Polygonzug ohne Zwischenorientierung.

Für die Beurteilung der Güte eines Polygonzuges ist nicht nur die Größe seiner Abschlußfehler maßgebend, es ist auch nötig, über die nach der Ausgleichung zu erwartenden Lagefehler der Polygonpunkte Bescheid zu wissen. Da im allgemeinen der Polygonpunkt in Zugsmitte den größten Lagefehler zu erwarten hat, werden vielfach Abschätzungsformeln für den Längs- und Querfehler des Polygonpunktes in Zugsmitte angegeben, mit deren Hilfe man bereits nach der Erkundung eines Polygonzuges abschätzen kann, mit welchen Lagefehlern man in diesem Zug nach der Ausgleichung zu rechnen haben wird. Für den allgemeinen Fall eines Polygonzuges sind solche Formeln relativ kompliziert und somit für die praktische Anwendung wenig geeignet. Da man außerdem immer bestrebt sein wird, der Idealform eines Polygonzuges — gestreckter Zug mit gleich langen Seiten — möglichst nahe zu kommen, werden der einfacheren Handhabung wegen diese Abschätzungsformeln für den gestreckten Zug mit gleich langen Seiten angegeben.

Die Abschätzung des Längsfehlers in Zugsmitte ist abhängig von dem bei der Polygonzugsmessung verwendeten Streckenmeßgerät, sie bietet weiters keine Probleme und wird daher hier auch nur erwähnt. Etwas schwieriger wird es bei der Abschätzung des Querfehlers. In [1] sind im Band II Abschätzungsformeln für den Querfehler in der Mitte eines Polygonzuges angegeben:

a) Querfehler in Zugsmitte für einen an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßig angeschlossenen Polygonzug ohne Zwischenorientierungen ([1], Bd. II, Seite 578, Gleichung 25):

$$q^2 = s^2 \cdot \frac{m^2 \beta}{\rho^2} \cdot \frac{(n^2 - 1) \cdot (n^2 + 3)}{192 \cdot n} \quad \dots (1)$$

b) Querfehler für einen an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßig angeschlossenen Polygonzug mit „z“ symmetrisch verteilten Zwischenorientierungen ([1], Bd. II, Seite 584, Gleichung 15):

$$q^2 = s^2 \cdot \frac{m^2 \beta}{\rho^2} \cdot \frac{(n - 1) \cdot (n + 2z + 1) \cdot (n + z)}{48 \cdot (z + 1)^2} \quad (\text{gültig für } z = 1 \text{ bis } z = n - 2) \quad \dots (2)$$

$n$  ... Anzahl aller Polygonpunkte, einschließlich der Zugsendpunkte

$m_\beta$  ... mittlerer Fehler eines Polygonwinkels

$q$  ... mittlerer Querfehler

Diese Fehlerformeln beruhen auf folgenden Voraussetzungen:

- Der Polygonzug ist gestreckt;
- alle Polygonseiten sind gleich lang;
- die Zwischenorientierungen teilen den Polygonzug in gleich große Teilzüge;
- die Zielpunkte der Zwischenorientierungen sind unendlich weit entfernt;
- die Winkel zwischen einer Zwischenorientierung und den beiden benachbarten Polygonseiten sind unabhängig voneinander gemessen und nicht als ein Richtungssatz.

Setzt man in Gleichung (2)  $z = 1$ , erhält man

$$q^2(z=1) = s^2 \cdot \frac{m^2 \beta}{\rho^2} \cdot \frac{(n^2 - 1) \cdot (n + 3)}{192} \quad \dots (3)$$

Das Verhältnis zwischen Gleichung (1) und Gleichung (3) ergibt

$$\frac{q^2(z=0)}{q^2(z=1)} = \frac{n^2 + 3}{n \cdot (n + 3)} = \frac{n + \frac{3}{n}}{n + 3} \quad \dots (4)$$

Gleichung (4) zeigt nun deutlich, daß der Querfehler in Zugsmitte beim Vorhandensein einer einzigen Zwischenorientierung größer ist als beim selben Polygonzug ohne Zwischenorientierung. Auf dieses merkwürdige Ergebnis ist auch bereits in [1], Band II, auf Seite 585 hingewiesen, ebenso auch in [2] auf Seite 715.

Es kann nun andererseits leicht nachgewiesen werden, daß es unmöglich ist, daß durch das Hinzutreten einer einzigen Zwischenorientierung der Querfehler in Zugsmitte verschlechtert wird. In einem Polygonzug stellt jede Zwischenorientierung eine zusätzliche Bestimmung und in weiterer Folge eine zusätzliche Überbestimmung dar. Bei einer Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen ergibt jede Überbestimmung eine Bedingungsgleichung. Den Lagefehler des Polygonpunktes in Zugsmitte erhält man bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Hilfe des Gewichtes einer Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen:



$$M^{(\frac{n+1}{2})} = m_0 \cdot \sqrt{Q_{FF}^{(\frac{n+1}{2})_x} + Q_{FF}^{(\frac{n+1}{2})_y}} \quad \dots (5)$$

$$Q_{FF} = \left[ \frac{ff}{p} \cdot r \right] = \left[ \frac{ff}{p} \right] - \frac{\left[ \frac{af}{p} \right]^2}{\left[ \frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[ \frac{bf}{p} \cdot 1 \right]^2}{\left[ \frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} - \dots - \frac{\left[ \frac{rf}{p} \cdot (r-1) \right]^2}{\left[ \frac{rr}{p} \cdot (r-1) \right]} \quad \dots (6)$$

([1], Bd. I, Seite 521, Gleichung 17).

Für einen Polygonzug von allgemeiner Form, der an beiden Endpunkten koordinaten- und richtungsmäßigen Anschluß, aber keine Zwischenorientierung hat, gibt es bekanntlich drei Bedingungsgleichungen, somit wird das Gewicht für die Koordinaten des Punktes in Zugsmitte zu

$$Q_{FF}^{(3)} = \left[ \frac{ff}{p} \cdot 3 \right] \quad \dots (7)$$

Tritt nun bei diesem Polygonzug noch eine Zwischenorientierung hinzu, erhält man das Gewicht der Koordinaten des Punktes in Zugsmitte aus

$$Q_{FF}^{(4)} = \left[ \frac{ff}{p} \cdot 4 \right] = \left[ \frac{ff}{p} \cdot 3 \right] - \frac{\left[ \frac{df}{p} \cdot 3 \right]^2}{\left[ \frac{dd}{p} \cdot 3 \right]} \quad \dots (8)$$

Da nun  $\left[ \frac{dd}{p} \cdot 3 \right]$  immer positiv sein muß und der Zähler des Reduktionsgliedes durch ein Quadrat gebildet wird, muß  $Q_{FF}^{(4)}$  im allgemeinen kleiner sein als  $Q_{FF}^{(3)}$ , im Extremfall, wenn das Reduktionsglied gleich Null wird, kann  $Q_{FF}^{(4)}$  höchstens gleich  $Q_{FF}^{(3)}$  werden, niemals aber größer.

$$Q_{FF}^{(4)} \leq Q_{FF}^{(3)} \quad \dots (9)$$

Es ist somit nachgewiesen, daß es unmöglich ist, daß der Querfehler in Zugsmitte größer werden kann, wenn in einem Polygonzug eine einzige Zwischenorientierung verwendet wird.

Der für die Berechnung des Punktlagefehlers  $M$  notwendige Wert des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit,  $m_0$ , wird wohl nicht ganz streng gleich groß sein, wenn ein Polygonzug mit oder ohne Zwischenorientierung berechnet wird, man kann ihn aber als praktisch gleich groß betrachten. Außerdem sollte ja bei richtiger Annahme der mittleren Richtungs- und Streckenfehler a priori der Gewichtseinheitsfehler  $m_0 \doteq 1$  werden.

Dieser Widerspruch zwischen den Aussagen der Gleichungen (4) und (9) ist in Wirklichkeit nur scheinbar vorhanden, da die Gleichungen (1) und (3) als Grundlage für das Verhältnis (4) nicht dieselben Voraussetzungen beinhalten, es darf daher auch nicht daraus die Schlußfolgerung gezogen werden, daß beim Einbeziehen einer einzigen Zwischenorientierung der Querfehler in Zugsmitte größer wird als bei einer Berechnung ohne Zwischenorientierung. Während es beim Polygonzug ohne Zwischenorientierungen und unter der Voraussetzung, daß auf den Zugsendpunkten

jeweils nur eine einzige Orientierungsrichtung gemessen wird (siehe Abb. 1), keine Differenzen über die Art der Messung der Polygonwinkel gibt, ist es hingegen beim Auftreten von Zwischenorientierungen von wesentlicher Bedeutung, in welcher Art die Zwischenorientierungen in die Polygonwinkelmessung einbezogen werden.

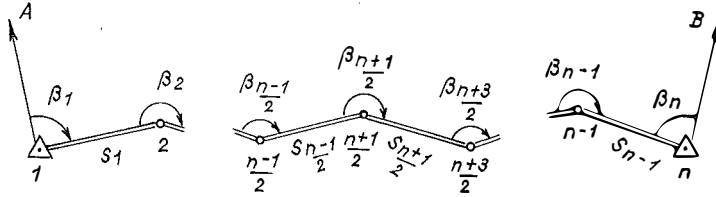


Abb. 1

Bei der Ableitung der Gleichung (3) in [1] wird, wie bereits erwähnt, vorausgesetzt, daß wie in Abb. 2 die Winkel zwischen einer Zwischenorientierung und den beiden benachbarten Polygonseiten unabhängig voneinander gemessen werden. Durch die getrennte Messung dieser beiden Winkel wird aber die Einheitlichkeit des Gesamtzuges, wie sie z. B. sowohl in Abb. 1 als auch in Abb. 3 gegeben ist,

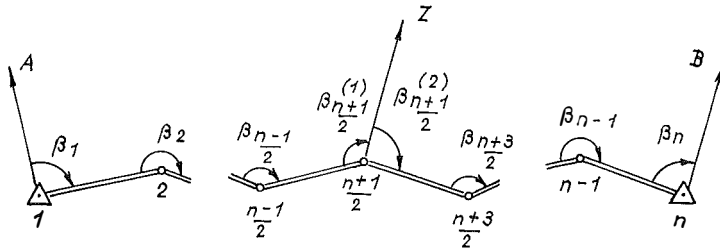


Abb. 2

unterbrochen. Man könnte, falls die Koordinaten des Zugsendpunktes „n“ nicht gegeben wären, bei einer Winkelmessung nach Art der Abb. 2 den zweiten Halbzug von „ $\frac{n+1}{2}$ “ bis „n“ ohne Einfluß auf das Endergebnis wegnehmen und anschließend an die Berechnung des ersten Halbzuges als einen unabhängigen Polygonzug berechnen. Dies wäre jedoch bei einer gleichfalls unabhängigen Messung der beiden

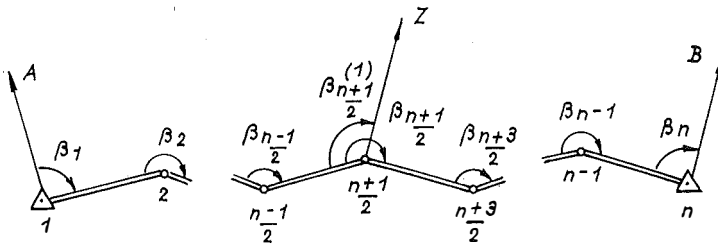


Abb. 3

Winkel auf dem Punkt  $\frac{n+1}{2}$  nach Art der Abb. 3 oder bei Messung der Richtungen

im Punkt  $\frac{n+1}{2}$  in einem Richtungssatz nicht möglich. Diese Teilung in zwei Halbzüge ist auch in der Art der Ableitung der Gleichung (3) in [1] direkt enthalten.

Will man nun die Gleichung (3), also den Querfehler eines Polygonzuges mit einer einzigen Zwischenorientierung bei einer Winkelmessung nach Art der Abb. 2, vergleichen mit einem gleichwertigen Polygonzug ohne Zwischenorientierung, dann muß man auch für den Zug ohne Zwischenorientierung die gleiche Voraussetzung schaffen. Das würde bedeuten, daß im Punkt  $\frac{n+1}{2}$  der Polygonwinkel durch ein koordinatenmäßig nicht gegebenes Hilfsziel gleichfalls in zwei unabhängig gemessene Teilwinkel zerlegt werden müßte, wofür natürlich in der Praxis überhaupt keine Veranlassung besteht. Um aber unter den in [1] gemachten Voraussetzungen eine gültige Aussage über die Auswirkung einer Zwischenorientierung auf den Querfehler in Zugsmitte machen zu können, muß die entsprechende Formel für den Polygonzug ohne Zwischenorientierungen verwendet werden, dies ist aber nicht die Gleichung (1). Damit ist der scheinbare Widerspruch zwischen den Gleichungen (4) und (9) aufgeklärt.

Die Gleichung (2) — gültig für  $1 \leq z \leq n-2$  — ist als Erweiterung der Gleichung (3) gleichfalls unter der Voraussetzung der unabhängigen Winkelmessung nach Art der Abb. 2 abgeleitet. Im allgemeinen wird jedoch im Gegensatz dazu auf den Polygonpunkten mit Zwischenorientierungen eine Richtungsmessung erfolgen. Es ist daher die Verwendbarkeit dieser Gleichung für die Abschätzung des Querfehlers in Zugsmitte auch für jene Fälle, wo  $z > 1$  ist, nicht als gesichert anzusehen.

Es sollen nun einerseits als Nachweis des oben gesagten und auch als Gegenüberstellung für einen gestreckten Polygonzug mit gleich langen Seiten und einem koordinaten- und richtungsmäßigen Anschluß an beiden Endpunkten unter drei verschiedenen Arten der Einbeziehung einer einzigen Zwischenorientierung im Punkt in Zugsmitte in die Polygonwinkelmessung die entsprechenden Werte für  $Q_{FF}^{(3)}$  und für  $Q_{FF}^{(4)}$  allgemein abgeleitet werden.

Die Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen, für welche die  $Q_{FF}$  ermittelt werden sollen, sind für alle drei Fälle gleich. Die Koordinaten des Punktes in Zugsmitte erhält man aus:

$$y\left(\frac{n+1}{2}\right) = y_1 + s_1 \cdot \sin R^0_1 + s_2 \cdot \sin R^0_2 + \dots + s\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \sin R^0\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad \dots (10)$$

$$x\left(\frac{n+1}{2}\right) = x_1 + s_1 \cdot \cos R^0_1 + s_2 \cdot \cos R^0_2 + \dots + s\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \cos R^0\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Durch partielle Differentiation nach den einzelnen Beobachtungen und nach entsprechender Umformung erhält man daraus für einen Polygonzug von allgemeiner Form die notwendigen  $f$ -Werte:

$$f^{(y)}_{\beta_1} = x\left(\frac{n+1}{2}\right) - x_1; f^{(y)}_{s_1} = \sin R^0_1; f^{(x)}_{\beta_1} = -\left(y\left(\frac{n+1}{2}\right) - y_1\right); f^{(x)}_{s_1} = \cos R^0_1$$

$$f^{(y)}\beta_2 = x\left(\frac{n+1}{2}\right) - x_2; f^{(y)}s_2 = \sin R^0_2; f^{(x)}\beta_2 = -\left(y\left(\frac{n+1}{2}\right) - y_2\right); f^{(x)}s_2 = \cos R^0_2 \dots \dots \dots (11)$$

$$f^{(y)}\beta\left(\frac{n-1}{2}\right) = x\left(\frac{n+1}{2}\right) - x\left(\frac{n-1}{2}\right); f^{(y)}s\left(\frac{n-1}{2}\right) = \sin R^0\left(\frac{n-1}{2}\right); f^{(x)}\beta\left(\frac{n-1}{2}\right) = -\left(y\left(\frac{n+1}{2}\right) - y\left(\frac{n-1}{2}\right)\right); f^{(x)}s\left(\frac{n-1}{2}\right) = \cos R^0\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Für den gestreckten Zug mit gleich langen Seiten werden unter der Annahme von  $R^0_1 = R^0_2 = \dots = 100^\circ$  die allgemeinen  $f$ -Werte zu:

$$f^{(y)}\beta_i = 0; f^{(y)}s_i = 1; f^{(x)}s_i = 0; f^{(x)}\beta_1 = -\frac{n-1}{2} \cdot s; f^{(x)}\beta_2 = -\frac{n-3}{2} \cdot s; \dots; f^{(x)}\beta\left(\frac{n-1}{2}\right) = -s \dots \dots (12)$$

Mit diesen partiellen Ableitungen und den Koeffizienten der Fehlergleichungen für die drei Fälle werden die gleichfalls für alle drei Fälle einheitlichen Summen ermittelt:

$$\begin{aligned} \left[\frac{af}{p}\right]_y &= 0 & \left[\frac{af}{p}\right]_x &= -\frac{1}{8} \cdot (n^2 - 1) \cdot s \cdot m^2\beta \\ \left[\frac{bf}{p}\right]_y &= \frac{n-1}{2} \cdot m^2_s & \left[\frac{bf}{p}\right]_x &= 0 \\ \left[\frac{cf}{p}\right]_y &= 0 & \left[\frac{cf}{p}\right]_x &= \frac{1}{48} \cdot (n^2 - 1) \cdot (5n - 3) \cdot s^2 \cdot m^2\beta \dots \dots (13) \\ \left[\frac{df}{p}\right]_y &= 0 & \left[\frac{df}{p}\right]_x &= -\frac{1}{8} \cdot (n^2 - 1) \cdot s \cdot m^2\beta \\ \left[\frac{ff}{p}\right]_y &= \frac{n-1}{2} \cdot m^2_s & \left[\frac{ff}{p}\right]_x &= \frac{1}{24} \cdot n \cdot (n^2 - 1) \cdot s^2 \cdot m^2\beta \end{aligned}$$

Der einfacheren Schreibweise wegen sei hier und in den folgenden Ableitungen  $m_\beta$  im Bogenmaß verstanden. Im Fall drei wurde außerdem  $m_R$  unter Verwendung der Beziehung  $m_\beta^2 = 2 \cdot m_R^2$  (14) durch  $m_\beta$  ersetzt, um einen Vergleich der Ergebnisse zu erleichtern.

*Fall 1:* Auf dem Polygonpunkt in Zugsmittle erfolgt die Einbeziehung der Zwischenorientierung durch die Messung der beiden voneinander unabhängigen Winkel zwischen der Zwischenorientierung und den beiden benachbarten Polygonseiten (siehe Abb. 2). Es müssen daher in der Winkelgleichung für den Gesamtzug für den Punkt  $\frac{n+1}{2}$  beide Teilwinkel aufscheinen, ebenso auch in den beiden Projektionsgleichungen. Die Bedingungsgleichung für die Zwischenorientierung wird hier nicht wie in [3] als die Projektion eines Polygons auf die Senkrechte zur Zwi-

schenorientierung eingeführt, sondern aus Gründen der Vereinfachung ebenfalls als Winkelgleichung. Bei der Berechnung des Widerspruches für die der Zwischenorientierung entsprechende Winkelgleichung wird der Widerspruch um  $\Delta v \frac{n+1}{2} \cdot z$

zu groß, da der Richtungswinkel zum Zielpunkt der Zwischenorientierung vorerst nur aus vorläufigen Koordinaten berechnet werden kann, es ist daher zur Berücksichtigung der Änderung dieses Richtungswinkels infolge der Änderung der Koordinaten des Standpunktes durch die Ausgleichung in die entsprechende Fehlergleichung die Gauß'sche Relation einzuführen. Zur Vereinfachung wird allerdings der Zielpunkt der Zwischenorientierung ins Unendliche verlegt, wodurch die Gauß'sche Relation gleich Null wird und somit aus der Fehlergleichung wieder verschwindet.

Für den gestreckten Polygonzug mit gleich langen Seiten erhalten die den vier Bedingungsbedingungen entsprechenden Fehlergleichungen unter der Annahme von  $R^0_i = 100s$  folgende Form:

$$\begin{aligned}
 v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta} \binom{(1)}{\frac{n+1}{2}} + v_{\beta} \binom{(2)}{\frac{n+1}{2}} + \dots + v_{\beta_{n-1}} + v_{\beta_n} + w_1 &= 0 \\
 v_{s_1} + v_{s_2} + \dots + v_{s_{n-1}} + w_2 &= 0 \quad \dots (15) \\
 - (n-1) \cdot s \cdot v_{\beta_1} - (n-2) \cdot s \cdot v_{\beta_2} - \dots - \left(n - \frac{n+1}{2}\right) \cdot s \cdot v_{\beta} \binom{(1)}{\frac{n+1}{2}} \\
 - \left(n - \frac{n+1}{2}\right) \cdot s \cdot v_{\beta} \binom{(2)}{\frac{n+1}{2}} - \dots - 2 \cdot s \cdot v_{\beta_{n-2}} - s \cdot v_{\beta_{n-1}} + w_3 &= 0 \\
 v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta} \binom{(1)}{\frac{n+1}{2}} + w_4 &= 0
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich nun die folgenden Koeffizienten für die Korrelatengleichungen:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{aa}{p}\right] &= (n+1) \cdot m^2_{\beta} & \left[\frac{bc}{p}\right] &= 0 \\
 \left[\frac{ab}{p}\right] &= 0 & \left[\frac{bd}{p}\right] &= 0 \\
 \left[\frac{ac}{p}\right] &= -\frac{1}{2} \cdot (n^2-1) \cdot s \cdot m^2_{\beta} & \left[\frac{cc}{p}\right] &= \frac{1}{12} \cdot (n^2-1) \cdot (4n-3) \cdot s^2 \cdot m^2_{\beta} \quad \dots (16) \\
 \left[\frac{ad}{p}\right] &= \frac{n+1}{2} \cdot m^2_{\beta} & \left[\frac{cd}{p}\right] &= -\frac{3}{8} \cdot (n^2-1) \cdot s \cdot m^2_{\beta} \\
 \left[\frac{bb}{p}\right] &= (n-1) \cdot m^2_s & \left[\frac{dd}{p}\right] &= \frac{n+1}{2} \cdot m^2_{\beta}
 \end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen für die Berechnung der Gewichtskoeffizienten gegeben. Führt man die entsprechenden Reduktionen durch, erhält man:

$$Q_{FF^{(3)}} = \left[\frac{ff}{p} \cdot 3\right] = \frac{n-1}{4} \cdot m^2_s + \frac{(n^2-1) \cdot (n+3)}{192} \cdot s^2 \cdot m^2_{\beta} \quad \dots (17)$$

Das zweite Glied der so erhaltenen Gleichung (17) ist jedoch identisch mit der Gleichung (3). Führt man zur Berücksichtigung der Zwischenorientierung die nächste Reduktionsstufe durch, muß man feststellen, daß der Zähler des Reduktionsgliedes gleich Null wird:

$$\left[ \frac{df}{p} \cdot 3 \right] = 0 \quad \dots (18). \quad \text{Somit wird } Q_{FF^{(4)}} = Q_{FF^{(3)}} \quad \dots (19)$$

Daß das letzte Reduktionsglied in diesem Fall den Extremwert Null annimmt, hat seine Ursache in der unendlichen Entfernung des Zielpunktes der Zwischenorientierung.

Es ist nun nachgewiesen, daß nur unter der Annahme einer Winkelmessung nach Abb. 2 auch für den Polygonzug ohne Zwischenorientierung die mit Gleichung (3) vergleichbare Formel entsteht.

*Fall 2:* Auch in diesem Fall werden in dem Punkt in Zugsmitte zwei unabhängige Winkel gemessen, allerdings ist einer dieser Winkel der gewöhnliche Polygonwinkel und der zweite ist der Winkel der Zwischenorientierung mit der vorhergehenden Polygonseite (siehe Abb. 3). In der Winkelgleichung für den Gesamtzug ist hier bei dem Punkt in Zugsmitte nur der reine Polygonwinkel enthalten, ebenso auch bei beiden Projektionsgleichungen. Die vierte Bedingungsgleichung hat dieselbe Form wie im Fall 1. Dieser Fall 2 wird hier nur zu Vergleichszwecken angeführt, es ist kaum anzunehmen, daß eine Polygonzugsmessung in der Praxis in dieser Art durchgeführt wird.

Unter den gleichen Voraussetzungen wie beim Fall 1 erhalten die Fehlergleichungen folgende Form:

$$\begin{aligned} v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} + \dots + v_{\beta_{n-1}} + v_{\beta_n} + w_1 &= 0 \\ v_{s_1} + v_{s_2} + \dots + v_{s_{n-1}} + w_2 &= 0 \quad \dots (20) \\ - (n-1) \cdot s \cdot v_{\beta_1} - (n-2) \cdot s \cdot v_{\beta_2} - \dots - \left(n - \frac{n+1}{2}\right) \cdot s \cdot v_{\beta_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} - \dots - \\ - s \cdot v_{\beta_{n-1}} + w_3 &= 0 \\ v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + \dots + v_{\beta_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} + w_4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Korrelatengleichungen werden somit zu:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{aa}{p} \right] &= n \cdot m^2 \beta & \left[ \frac{bc}{p} \right] &= 0 \\ \left[ \frac{ab}{p} \right] &= 0 & \left[ \frac{bd}{p} \right] &= 0 \\ \left[ \frac{ac}{p} \right] &= -\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot s \cdot m^2 \beta & \left[ \frac{cc}{p} \right] &= \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (2n-1) \cdot s^2 \cdot m^2 \beta \quad \dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{ad}{p} \right] &= \frac{n-1}{2} \cdot m^2_{\beta} & \left[ \frac{cd}{p} \right] &= -\frac{1}{8} \cdot (n-1) \cdot (3n-1) \cdot s \cdot m^2_{\beta} \\ \left[ \frac{bb}{p} \right] &= (n-1) \cdot m^2_s & \left[ \frac{dd}{p} \right] &= \frac{(n+1)}{2} \cdot m^2_{\beta} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Gewichtskoeffizient für den Polygonzug ohne Zwischenorientierung mit:

$$Q_{FF}^{(3)} = \left[ \frac{ff}{p} \cdot 3 \right] = \frac{n-1}{4} \cdot m^2_s + \frac{(n^2-1) \cdot (n^2+3)}{192 \cdot n} \cdot s^2 \cdot m^2_{\beta} \quad \dots (22)$$

Das zweite Glied dieser Gleichung (22) ist identisch mit Gleichung (1). Diese Ableitung untermauert nochmals, daß der Vergleich zwischen den Gleichungen (1) und (3) in der Art, wie dies in [1] durchgeführt wurde, nicht zulässig ist, da beide von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen.

Bei dieser Art der Winkelmessung wird im Gegensatz zu Fall 1 und 3 das Reduktionsglied zur Berücksichtigung der Zwischenorientierung nicht gleich Null:

$$\frac{\left[ \frac{df}{p} \cdot 3 \right]^2}{\left[ \frac{dd}{p} \cdot 3 \right]} = \frac{(n^2-1)^2 \cdot s^2 \cdot m^2_{\beta}}{16 \cdot n \cdot (n^2+16n-1)} \quad \dots (23)$$

*Fall 3:* Beim Fall 3 werden in dem Punkt in Zugmitte die Zwischenorientierung und die Richtungen zu den beiden benachbarten Polygonpunkten in einem gemeinsamen Richtungssatz beobachtet. Auf diese Art wird im allgemeinen auch in der Praxis die Richtungsbeobachtung durchgeführt werden.

Die Bedingungs-, Widerspruchs- und Fehlergleichungen haben das gleiche Aussehen wie im Fall 2, allerdings mit dem Unterschied, daß die einzelnen Winkel durch die Differenz der entsprechenden Richtungen ersetzt sind. Die Koeffizienten der Korrelatengleichungen weisen jedoch bei  $\left[ \frac{ad}{p} \right]$  und  $\left[ \frac{cd}{p} \right]$  eine Abweichung gegenüber den entsprechenden Koeffizienten beim Fall 2 auf, während alle übrigen Koeffizienten gleich sind, selbstverständlich nur unter Berücksichtigung der Beziehung (14):

$$\left[ \frac{ad}{p} \right] = +\frac{1}{2} \cdot n \cdot m^2_{\beta} \quad \left[ \frac{cd}{p} \right] = -\frac{1}{8} \cdot (n-1) \cdot (3n+1) \cdot s \cdot m^2_{\beta} \quad \dots (24)$$

Da die entsprechenden Koeffizienten in beiden Fällen identisch sind, ist auch der Wert von  $Q_{FF}^{(3)}$  für beide Fälle gleich. Aber im Gegensatz zum Fall 2 wird hier das Reduktionsglied zur Berücksichtigung der Zwischenorientierung wie im Fall 1 gleich Null, da auch hier wiederum das Ergebnis der Gleichung (18) eintritt.

Daß der Fehler in Zugmitte gleich groß ist, unabhängig davon, ob man die eine Zwischenorientierung in die Berechnung einbezieht oder nicht, hat seine Ursache in der ganz speziellen Annahme, daß die Zwischenorientierung einen unendlich weit entfernten Zielpunkt aufweist, wodurch sich der gesamte Berechnungsgang natürlich wesentlich vereinfacht hat. In dem Augenblick, wo die Zwischenorientierung einen Zielpunkt von endlicher Entfernung besitzt, wird selbstverständlich der

Fehler in Zugmitte bei Einbeziehung der einen Zwischenorientierung kleiner werden im Vergleich zur Berechnung ohne diese Zwischenorientierung.

Es ist somit nachgewiesen, daß  $Q_{FF}^{(4)}$  niemals größer werden kann als  $Q_{FF}^{(3)}$ , wohl aber im Extremfall unter besonderen Verhältnissen  $Q_{FF}^{(4)} = Q_{FF}^{(3)}$  sein kann.

#### Literatur

- [1] *Jordan/Eggert/Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage.  
 [2] *Herrmann, K.*: Zur Fehlertheorie des zwischenorientierten Polygonzuges, AVN 1929, S. 517ff.  
 [3] *Maly, L.*: Theorie der polygonometrischen Punktbestimmung, ÖZfV, 51. Jahrg. 1963, Seite 39ff.

## Mitteilungen

### Prof. Dr. Rohrer — 85 Jahre

Mit aus Anlaß der Vollendung des 85. Lebensjahres von Prof. *Dr. Hans Rohrer* gab der Rektor der Technischen Hochschule in Wien, Magnifizenz Prof. *Dr. Erich Bukovics*, am 3. Juni 1971 einen Empfang, an dem auch der Präsident des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, *Dipl.-Ing. Ferdinand Eidherr*, teilnahm, der seinerseits aus demselben Anlaß zahlreiche Kollegen für den 8. Juni zu einer „Wiener Jause“ einlud, an der auch Magn. *Bukovics* teilnahm.

Aus den Ansprachen sei nur festgehalten: schon in seiner frühen Dienstzeit war *Rohrer*s Sorge dem Aufbau, der Organisation und dem Ansehen des österreichischen Vermessungswesens, der Hebung unseres Berufsstandes und insbesondere der Reform des geodätischen Hochschulstudiums gewidmet. Und so wurde — dem Fortschritt der Technik folgend — 1924 der „Geodätische Kurs“ zur Unterabteilung für Vermessungswesen erweitert mit der an Technischen Hochschulen üblichen Gliederung der Ausbildung in die wissenschaftlich-technische Grundausbildung und in die anschließende Fachausbildung mit dem Abschluß der beiden Studienabschnitte durch zwei Staatsprüfungen. An die Stelle des im wesentlichen nur für Dienstleistungen innerhalb der Katasterverwaltung herangebildeten Vermessungsgeometers trat der Vermessungsingenieur mit umfassender, voller Hochschulbildung.

Rohrer studierte an unserer Hochschule und war anschließend Beamter im staatlichen Vermessungsdienst. Als hervorragender, leitender Triangulator schuf er die Grundlagen für die Einführung des Gauß-Krüger-Projektionssystems im österreichischen Karten- und Katasterwesen und stellte auf breitem Tätigkeitsfeld bedeutsame Arbeiten für Praxis und Forschung zur Verfügung. In leitender Stellung richtete er sein Augenmerk auf den Ausbau des staatlichen Vermessungswesens und auf die Modernisierung der Vermessungsmethoden. Diese reichhaltige Praxis ermöglichte es ihm als Hochschullehrer seine Vorlesungen vorbildlich zu gestalten und seine Hörer zu der durch die anfallenden wirtschaftlichen, verkehrstechnischen und militärischen Aufgaben notwendig gewordenen Schaffung großräumiger Vermessungssysteme zu befähigen. Diesen für die praktische Ausbildung der Vermessungsingenieure außerordentlich bedeutsamen Vorlesungen entsprechend, gelang es ihm in mühevoller Kleinarbeit — insbesondere in den Jahren nach dem 2. Weltkrieg — die Kartensammlung, die Bibliothek und insbesondere das Instrumentarium der Lehrkanzel stets — dem jeweiligen Stand der Wissenschaft und Instrumententechnik angepaßt — zu ergänzen. Neben dem bestehenden großen Aufgabenkreis widmete er sich mit Vorliebe dem Studium der Geschichte des Vermessungswesens und leitete seine Lehrkanzel nach Vollendung seines Ehrenjahres noch bis 1960. Er bekleidete 1946 bis 1948 die Würde des Dekans der Fakultät für Angewandte Mathematik und Physik, war Mitglied der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung, er ist korrespondierendes Mitglied der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Seine so überaus verdienstvolle Arbeit für unseren Verein begann bereits zur Zeit des ersten Weltkrieges. Seit 1917 gehört *Rohrer* ständig der Vereinsleitung an: als Kassier, 1929 und 1956 bis 1960 als Obmann und heute noch versieht er in selbstloser Weise das arbeitsvolle Amt des Schriftleiters der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen.



Fast durch ein Vierteljahrhundert war er einer der tüchtigsten und bestqualifizierten Beamten des staatlichen Vermessungsdienstes und mehr als ein Vierteljahrhundert war er akademischer Lehrer, hochgeschätzt von der Fachwelt und verehrt von vielen Hörergenerationen. Seine Freunde, Kollegen und Schüler kennen ihn als vornehmen und hilfsbereiten Kollegen, als erfahrenen und vorzüglichen Kenner unseres Fachgebietes, als stillen, hingebungsvollen Forscher im Bereich der geodätischen Wissenschaften.

Zu seinem Jubelfest entbieten wir ihm die aufrichtigsten und herzlichsten Glück- und Segenswünsche nach noch vielen schönen Lebensjahren in geistiger und körperlicher Frische.

Für die Österr. Kommission  
für die Internationale Erdmessung:  
*Ledersteger*

Für die Österr. Gesellschaft  
für Photogrammetrie:  
*Rimmer*

Für das Bundesamt für  
Eich- und Vermessungswesen:  
*Eidherr*

Für den Österr. Verein  
für Vermessungswesen:  
*Barvir*

## Buchbesprechungen

*Peters, Jean: Sechsstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen.* 360<sup>0</sup>-Teilung, Schrittweite 10''. 7. Auflage, 40, VIII + 293 Seiten. Ferd.-Dümmlers Verlag, Bonn 1971. Leinen DM 48,—.

Der Hauptteil dieses weitverbreiteten Werkes ist die Tafel 2, die auf den Seiten 24 bis 293 die numerischen Werte der sechs trigonometrischen Funktionen sin, tan, sec, cosec, cot, cos mit 6 Dezimalstellen oder sechs geltenden Ziffern in alter Kreisteilung nebst den ersten Differenzen und den zugehörigen Proportionaltafelchen für eine Schrittweite von 10° enthält.

Zur Erleichterung der Berechnung der Werte von cot und cosec ohne Berücksichtigung der zweiten Differenzen sind in der Tafel 1 auf den Seiten 2 bis 21 diese Werte von 0°01 bis 1°20' mit einer Schrittweite von 1'' ausgewiesen. Außerdem ist eine Hilfstafel für w'' cot w und w'' cosec w angeschlossen. Neu aufgenommen wurde in dieser Auflage eine Umrechnungstabelle von Minuten und Sekunden in Bruchteile des Altgrades im Bogenmaß (Schrittweite 10'') und umgekehrt (Schrittweite 5 · 10<sup>-5</sup>), die zur leichteren Handhabung auf dem Innendeckel des Einbandes angeordnet wurde.

Leichte Lesbarkeit der auf gutem Papier gedruckten Tafeln sind ein weiterer Vorzug dieses Werkes. R.

*Wittke, Heinz: Fünfstellige Winkelfunktionen 400g.* 6. Auflage, 72 Seiten, 17,5 × 24 cm. Ferd.-Dümmlers-Verlag, Bonn. DM 19,80.

Nach einem einleitenden viersprachigen Vorwort, das den Gebrauch der Tafel erläutert und einer Umwandlungstabelle von 360° in 400g-Teilung folgt die Tafel der fünfstelligen Winkelfunktionen in der Reihenfolge sin, tg, ctg und cos mit einem Schritt von 1°. Die Tafel ist so angeordnet, daß auf jeder Seite die Werte für einen Neugrad untergebracht sind. Die Tafeldifferenzen werden rot ausgewiesen und am Kopf jeder Seite sind die entsprechenden Multiplikationstäfelchen enthalten. Für das Rechnen mit ctg im Bereich von 0g bis 2g, wo die Funktionswerte und Tafeldifferenzen sehr groß sind und nicht mehr linear interpoliert werden kann, ist die Funktion (a ctg) als Hilfe angegeben. Zum raschen Aufschlagen der richtigen Seite des Gradwertes der Winkelfunktionen dient ein Griffregister. Die Tafel zeichnet sich durch deutliche Ziffern aus. Starkes Papier und der flexible Plastik-einband erhöhen die Haltbarkeit. R.

*Wittke, Heinz: Sechsstellige Winkelfunktionen 400g.* 4. Auflage, 68 Seiten. Ferd.-Dümmlers-Verlag, Bonn. DM 19,80.

Die Tafel ist analog jener der fünfstelligen Winkelfunktionen angeordnet. Nach Vorwort und Umrechnungstabelle folgen die 6stelligen Werte der Winkelfunktionen sin, tg, ctg und cos ebenfalls

mit einem Schritt von 1c und für den Bereich von 0g bis 2g wird wieder die Funktion (a tg) ausgewiesen. Die Interpolation wird aber bei dieser Tafel am rationellsten mit Hilfe einer Rechenmaschine durchgeführt. Als Abschluß der Tafel folgen noch 1stellige Werte von sin und cos mit einem Schritt von 0,1g. Griffregister, Ziffern, Papier und flexibler Plastikband sind ebenso praktisch wie bei der fünfstelligen Tafel.

R.

**Zumstein-Katalog 1971** mit Stichwortregister. 8. Auflage, 600 Seiten, viele Abbildungen und Karten. Verlag Zumsteins Landkartenhaus, 8000 München 22, Liebherrstr. 5. Plastikband, Preis DM 29,80.

Der Zumstein-Katalog ist das einzige jährlich erscheinende, umfassende Nachschlagewerk über alle Landkarten, Reiseführer, Stadtpläne, amtliche Kartenwerke, Atlanten, Globen und Mondgloben. Die neuerschienene 8. Auflage ist erweitert und verbessert worden, wobei die neuesten Unterlagen aus allen Ländern der Welt verarbeitet wurden.

Der Inhalt besteht aus einem Stichwortregister, Deutschland, Alpen, Europa, Afrika, Amerika, Asien, Australien-Ozeanien, Meere — Pole, Erde, Weltraum — Mond — Mars. Ein großer thematischer Anhang umfaßt Geologie, Kartenzubehör und Kartenaufzüge auf Markier- und Magnetplatten, Luftfahrtkarten, Schulwandkarten, Wörterbücher und Sprachführer, Wassersportkarten und -führer, Skikarten und Skiführer, Camping- und Hotelführer; dann über 170 Kartenschnitte, und Verlagsanzeigen.

Der Katalog bildet für den Fachhandel, für Bibliotheken und für geographisch orientierte Privatleute eine wertvolle Arbeitshilfe und ein zuverlässiges Nachschlagewerk für Landkarten und Reiseführer aus aller Welt. Das umfassende Stichwortregister läßt jeden Benützer leicht auffinden, was er sucht.

R.

*Arnberger, Dr. Erich* und *Aurada, Dr. Fritz*: **Internationales Jahrbuch für Kartographie XI. 1971.** 312 Seiten, 85 Abbildungen und 10 farbige Tafeln. Freitag-Berndt und Artaria, Wien.

Dem Vorwort zum Band XI ist zu entnehmen, daß Professor Dr. K. Frenzel mit dem Band X/1970 des Jahrbuches aus Gesundheitsrücksichten von seiner Tätigkeit als Herausgeber zurückgetreten ist und mit Band XI/1971 Prof. Dr. E. Arnberger und Dr. T. Aurada aus Österreich gemeinsam die Herausgeberschaft übernommen haben. Außerdem ist der Erscheinungstermin des Jahrbuches vom Herbst auf das Frühjahr des jeweiligen Jahres verlegt worden.

Das diesjährige Jahrbuch ist zur Gänze der 5. Kartographischen Konferenz von Stresa (3. bis 9. Mai 1970) gewidmet. Es bringt eingangs die Eröffnungsansprache des Präsidenten der ICA, Prof. Dr. Dr. h. c. Konstantin Salichtchev, bei der 5. Kartographischen Konferenz von Stresa. Sandro Toniolo und Lamberto Laureti berichten über den Verlauf der Konferenz. Hierauf folgen die Berichte über die Tätigkeit der Kommissionen:

Kommission I, Ausbildung der Kartographen;

Kommission II, Begriffserläuterung, Klassifizierung und Standardisierung kartographischer Fachbegriffe;

Kommission III, Automation in der Kartographie;

Kommission IV, Thematische Kartographie und der Bericht der Arbeitsgruppe, Kartographische Information.

Im Anschluß folgen die verlesenen Vorträge der verschiedenen Arbeitsthemen.

Gebracht werden 10 Vorträge über Gebirgskartographie, 5 Vorträge über Normalisierung der Symbole in der thematischen Kartographie, 10 Vorträge über Kartographie als ein Mittel zur Aussage und zur Mitteilung; 4 Vorträge über Synthese von Daten in Wirtschaftskarten; 1 Vortrag über Kartographie und Ortsnamenkunde und als Abschluß Vorträge über Seekarten. Die Mehrzahl der Vorträge ist in englischer oder französischer Sprache abgefaßt, doch wird in diesen Fällen eine deutsche Zusammenfassung angeschlossen.

Die Ausstattung des Jahrbuches ist wie bisher vortrefflich.

R.

*Raymond d'Hollander: Topographie Général, Tome II. Les procédés topographiques en planimétrie et nivellement. 16×25 cm, 432 Seiten mit 293 Abbildungen, 54 Tafeln und 1 Ausleger. Collection Scientifique de l'Institut Géographique National. Verlag Edition Eyrolles, Paris 1971. Preis 133 F.*

Der nunmehr erschienene Band II der Topographie Général setzt fort mit den Kapiteln VIII, IX und X, welche die Verfahren der Bestimmung von Punkten in der Ebene, und zwar durch Messung von Entfernungen, oder Winkeln und Richtungen sowie durch Entfernungen und Winkeln, einschließlich der graphischen Bestimmung mit dem Meßtisch, behandeln. Darin nehmen die Polygonzüge einen entsprechenden Platz ein. Der Rest des Werkes ist fast zur Gänze der Höhenaufnahme gewidmet. Kapitel XI bringt Allgemeines über die Darstellung von Geländeformen: Höhenlinien, kotierte Projektion und die elementaren Geländeformen. Im Kapitel XII lernt man die Instrumente zur Bestimmung von Höhenunterschiede kennen: Die Nivellierinstrumente, einschließlich solcher mit automatischer Horizontierung, Instrumente zur Messung von Höhen- und Tiefenwinkeln und solcher, die eine direkte Ablesung des Höhenunterschiedes erlauben. Das Kapitel schließt mit der Behandlung der bei den Messungen auftretenden Fehlern. Das folgende Kapitel XIII ist den Grundsätzen und Methoden der Bestimmung von Höhenunterschieden durch direktes Nivellement, indirektes Nivellement und Aneroidmessung gewidmet. Kapitel XIV bespricht kurz die Methoden der Aufnahme unter Berücksichtigung des Maßstabes. In einem 65 Seiten starken Anhang werden die Verfahren der Punkt- und der Höhenbestimmung durch praktische Beispiele aus der Beobachtung und Auswertung ergänzt.

So wie Band I ist auch der zweite Teil ein wertvoller Behelf bei Ausführung von Vermessungsarbeiten. Gute Ausstattung empfehlen auch äußerlich das Werk. R.

**Vermessungsmagazin Nr. 1.** Informationsdienst des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen. 19×24 cm, 32 Seiten, Wien 1971.

In dem vorliegenden ersten Heft des Vermessungsmagazins hat der Präsident des Bundesamtes Dipl.-Ing. Ferdinand Eidherr ein Geleitwort an seine Mitarbeiter gerichtet, worin er betont, daß Informationen in der heutigen Zeit mehr denn je Voraussetzung für eine sinnvolle und fruchtbare Zusammenarbeit sind. Wer informiert ist und um die größeren Zusammenhänge des täglichen Geschehen weiß, wird verstehen können, welchem Ziel er dient. Die oberste Aufgabe dieser Zeitschrift ist es deshalb der Information zu dienen. Zu jedem Kalender-Vierteljahr wird künftig ein Vermessungsmagazin erscheinen, worin über die aktuellen Neuigkeiten aus dem Amte und dem Fachgebiet informiert wird. Das Vermessungsmagazin soll auch darüber hinaus ein neues Bindeglied in dem verantwortungsvollen Dienst des Bundesamtes werden.

Die Redaktion der Zeitschrift besorgt ein Team, bestehend aus Hildegard Dobner, Hans Hruda, Hans Walther Kaluza, Otto Kloiber, Dr. Josef Litschauer, Manfred Schenk und Elfriede Thiard.

Das Heft Nr. 1 hat folgenden Inhalt: Hans Walter Kaluza, Vermessungsgesetz — verfassungswidrig? — Josef Zeger, Die Arbeit des Triangulators im Wandel der Zeit (Schluß folgt). — F. Querasser, Mikrofilmtechnik und Maßstabumbildung. — Friedrich Hrbeck, 50 Jahre Vermessungswesen in der Zentraleitung. — Dr. Johann Bernhard, Die OEEPE. — Franz Bures, Die Ätzgravur. — Anton Bina, Der Kampf um die 20 cm in einer Katastralgemeinde. — Erich Legenstein, Erfahrungsbericht über die Führung des Zahlenplanes. — Helmut Meckel, „Rote Schneemänner“ am Lüsenser Ferner. — Ferdinand Eidherr, Die genaueste Uhr der Welt. Weiters folgen eine Reihe aktueller Mitteilungen, ferner ein Mitteilungsblatt des Vereins der Grundkatasterführer Österreichs und zum Abschluß Personalnachrichten.

Wie aus dem Geleitwort hervorgeht, ist das Vermessungsmagazin für interne Zwecke des Bundesamtes bestimmt, doch würden sicherlich auch viele Vermessungsfachleute, die nicht im Bundesvermessungsdienst beschäftigt sind, ein lebhaftes Interesse an seinem Inhalt nehmen R.

#### Berichtigung

In der Besprechung des Buches *Adjusting Calculations in Surveying* von I. Hazay, D. Sc. (techn.) im Heft Nr. 2/71, Seite 58, soll es richtig heißen:

„Das Buch ist eine erweiterte, englische Fassung von I. Hazay's: Kiegyenlito Szamitasok, Tanönykiado und vor allem für die Vermessungsingenieure der Praxis geschrieben.

## Zeitschriftenschau

Zusammengestellt im amtlichen Auftrag von Bibliotheksleiter Techn. Oberinsp. *Karl Gartner*.  
Die hier genannten Zeitschriften liegen in der Bibliothek des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien I, Hofburg, auf.

Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Karlsruhe 1971: Nr. 5. *Ormeling, F. J., Jr.*: Karten für die Flugtouristik. — *Dumitrescu, V.*: Mathematische Grundlagen schräger und senkrechter kosmographischer Perspektiven. — *Hopmann, J.*: Mondvermessung und Mondkarten. — *Koch, K. R.*: Photogrammetrie und Bahndynamik für die Vermessung des Mondes. — Nr. 6. *Beck, W.*: Generalisierung und automatische Kartenherstellung. — *Grafarend, E.* und *Rymarzyk, H.*: Neuartige chronometrische Meßverfahren zur Nordbestimmung mit Vermessungskreiseln. — *Bonatz, M.* und *Schuster, O.*: Azimutmessungen mit einem Theodolitkreiseln in Spitzbergen. — *Heckmann, H.*: Lehrgang Numerische Photogrammetrie.

Géomètre, Paris 1971: Nr. 1. *Million, C.*: Les erreurs de réfraction dans la basse atmosphère. — Nr. 2. *Clos-Arceud, A.*: Formes géométriques et survivance des nombres d'or. — Nr. 3. *Rohmer, M.*: La borne fonctionnelle.

Geodesia, Maastricht 1971: Nr. 1. *Koopmans, W.*: Das kartographische Werk von Gerard und Cornelis Jode. — Nr. 2. *Verhoef, H. A.*: Zentrierungen. — Nr. 3. *Rietberg, A. L. P.*: Kataster nach Automatisierung. — *Baart, Ph. J. J.*: Eine Orientierung über mittelgroße Computersysteme. — Nr. 5. *Eversdijk, G. W.*: Schnittpunktberechnung.

Geodetický a kartografický obzor, Prag 1971: Nr. 4. *Slaboch, V.*: Konzeption der Erforschung des Informationssystems in der Geodäsie und Kartographie. — *Michal, J.*: Systemanalyse der gegenwärtigen Tätigkeit der Zentren für Geodäsie (wird fortgesetzt). — *Jakubka, J.*: Durchlaufende Verfolgung der Vertikalität der Achse eines Fabrikschornsteins mittels optischer Lotung. — *Makovnik, D.*: Horizontierung geodätischer Instrumente. — Nr. 5. *Kabeláč, I.*: Bestimmung der Elemente der inneren und äußeren Orientierung des Phototheodolits aus Bildaufnahmen des Sternenhimmels. — *Herda, M.*: Bestimmung der Rektifikationswerte großer Maschineneinrichtungen auf Grund geodätischer und optischer Meßmethoden. — *Michalčák, S.*: Erfahrungen aus der Bestimmung der Unterscheidungsgrenze bei Theodolitfernrohren. — *Kučera, K.*: Erwägungen über die Zentrizität des Theodoliten.

Geodetski list, Zagreb 1970: Nr. 7–12. *Neidhardt, N.*: Der relative Fehler der Heronischen Formel. — *Božičnik, M.*: Die Problematik der Automation im Kataster. — *Mitté, S.*: Architekturphotogrammetrie. — *Vezenkov, J.*: Diagrammtachymeter Wild RDS mit Sonderlatte.

Geodezja i Kartografia, Warschau 1971: Nr. 1. *Barlik, M.*: Quelques problèmes de la théorie de Bjerhammer. — *Milewski, J.*: Possibilité de la détermination du coefficient de réfraction au moyen de télémètres électromagnétiques ondes lumineuses. — *Sikorski, K.*: Compensation par la méthode des moindres avec considération des équations d'observation supplémentaires. — *Lisiewicz, St.*: Problème des poids angulaires dans un réseau de base. — *Tymowski, St. J.*: La flèche du fil et son mesurage. — Nr. 2. *Domaradzki, St. D.*: Étude des paramètres optiques de la chambre satellitaire Z2S. — *Barlik, M.*: Remarques sur l'anomalie "isométrique" de Bjerhammer. — *Dukwicz-Latka, M.* und *Pieczynski, L.*: Investigation of the personal errors of latitude observations made by the Horrebow-Talcott method. — *Michalik, K.*: Critérium pour la définition de la grandeur des étendues à l'approximation affine dans le problème de report affine du contenu d'une carte sur une autre. — *Gdowski, B.*: Sur les méthodes de projection de Tschebyschew. — *Czaja, J.*: Etude de changement de la situation et de la forme d'un bâtiment en considérant les déplacements de points déterminés géodésiquement. — *Bereczowski, Eu.*: Remarques sur l'effet de la réfraction à la mesure des angles verticaux par le théodolite nocturne T6-P. — *Pachuta, St.*: Quelques mots concernant les remarques sur l'article "Effet du phénomène de réfraction sur la précision à la mesure des angles verticaux dans l'infrarouge".

Nederlands Geodetisch Tijdschrift, Soest 1971: Nr. 1. *Sluiter, P. G.*: Der Einsatz von Satelliten für die Navigation. — Nr. 2. *Krijger, B. G. K.*: Computer im Vormarsch. — *Waalwijk, A.*: Hydrostatic measurements of dependent on the tide. — Nr. 3. Underwater technology of Marine Geodesy. — Nr. 4. *van Wely, G. A.*: Photomaps. — *de Loor, G. P.*: Possibilities of Remote Sensing. — Nr. 6. *Strang van Hees, G. L.*: Geodesy and gravity.

Photogrammetria, Amsterdam 1971: Nr. 1. *Fezer, F.*: Photo interpretation applied to geomorphology — a reiew. — Nr. 2. *Marsik, Z.*: Automatic relief shading. — *Collins, W. G.* and *El-Beik, A. H. A.*: The acquisition of urban land use information from aerial photographs of the city of Leeds. — Nr. 3. *Szangolies, K.*: Proposals for testing differential rectifiers as well as facilities for relief representation. — *Newcomb, R. M.*: Celtic fields in Himmerland, Denmark, as revealed by vertical photography at a scale of 1:25000. — *Hurault, L.*: Tendances générale au relachement de la précision dans l'utilisation de la photogrammétrie aux levés topographiques.

The Photogrammetric Record, London 1971: Nr. 37. *Weissmann, K.*: Photogrammetry applied to cadastral survey in Switzerland. — *Collins, W. G.*: Population census with the aid of aerial photographs: An experiment in the city of Leeds. — *Harley, I. A.*: An exact procedure for numerical orientation of a plotting instrument. — *Thompson, E. H.*: Space rection without interior orientation. — *Wickens, E. H.*: The application of photogrammetry to the stability of excavated rock slopes. — *Brazier, H. H.*: Results obtained by changing the perspective centre coordinates in aerial triangulation by independent models. — *Oswal, H. L.*: A new method of constructing an orthogonal matrix. — *White, L. P.*: Infra-red linescan imagery: an example and an application.

Przegląd Geodezyjny, Warschau 1971: Nr. 3. *Baranski, W.*: Schutz von geodätischen Zeichen. — *Lipinski, Br.*: Kataster zur Erschließung städtischen Geländes. — *Stelmach, M.*: Ermittlungsversuch der minimalen Straßenlänge innerhalb des Flurbereinigungsbereichs. — *Danielewicz, K.*: Bemerkungen zur Lösung der Aufgaben der höheren Geodäsie nach der Methode von Molodenski, im Hinblick auf die Satellitengeodäsie. — *Kuckiewicz, W.*: Nochmals über die Zuverlässigkeit von Polygonnetzen. — *Nowak, E.*: Graphische Methode der Ableitung von Fehlergleichungen. — *Trojanowski, K.*: Notwendigkeit der geodätischen Beobachtung des Verhaltens von Industrieschornsteinen in Bergbaugebieten. — *Pirwitz, K.*: Die Theorie des Doppelverhältnisses von vier Elementen und der Übergang zur Verarbeitung der Luftaufnahmen. — *Rogulski, M.*: Bemerkungen zur Theorie der Verarbeitung von photogrammetrischen Aufnahmen. — Nr. 4. *Barlik, M.*: Ausführung oberirdischer Arbeiten mit dem, mit einem Torsionsfaden versehenen, kombinierten Magnetometer und dessen geodätische Bedienung. — *Pekalski, M.* und *Proszynski, W.*: Prüfung einiger Methoden der Ermittlung der Abweichung von Punkten von Ingenieurbauten bezogen auf eine vertikale Fläche. — *Dabrowski, W.*, *Gralinski, M.* und *Wasilewski, A.*: Prüfung der Perpendikularität des Fernsehastes in Olsztyn. — *Brys, H.*: Apparat für die Installation haltbarer Polygon-Wandzeichen. — *Wojcik, St.*: Lasereinsatz bei den photogrammetrischen Arbeiten — gegenwärtiger Stand und Entwicklung.

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, Winterthur 1971: Nr. 3. *Schwendener, H. R.*: Elektronische Distanzmessung für kurze Strecken. — Nr. 5. *Griesel, H.*: Gedanken zu den amtlichen Vermessungen im Kanton Graubünden. — Nr. 6. *Bachmann, W. K.*: La classification des points en mensuration cadastrale numérique.

Vermessungstechnik, Berlin 1971: Nr. 3. *Stange, L.*: Entwicklungstendenzen der Satellitengeodäsie. — *Strutzenberg, K.*: Zweckmäßige Technologie bei der Herstellung von Lage- und Höhenplänen im Maßstab 1:2000 auf der Grundlage von Luftbildern (EEB). — *Marckwardt, W.*: Ein Beitrag zur Untersuchung der Genauigkeit von Koordinatenmeßgeräten. — *Schneider, M.*: Zur Frage der Neigungsmessungen bei der Überwachung von Talsperren. — *Dof, H.* und *Splettstößer, J.*: Projektierung und Messung des Werknetzes einer Großbaustelle. — *Hübner, R.* und *Gudde, M.*: Kontroll- und Deformationsmessungen an Experimentalrundbauten. — *Gaebler, V.*: Semiotische Aspekte der Zeichenstandardisierung in der thematischen Kartographie. — *Borodin, A.*:

Über die Hauptrichtungen der Forschung zur Automatisierung der Kartenzusammenstellung. — Nr. 4. *Freund, W.* und *Glaß, H.*: Das Reduktionstachymeter Dahlta 010. — *Sipos, S.*: Vermessungsarbeiten beim Bau der Budapester Untergrundbahn. — *Krastew, J. I.*: Vermessungsarbeiten bei der Projektierung und beim Bau von Seilschwebbahnen. — *Nischan, H.*: Informationswissenschaften und thematische Kartographie. — Beziehungen und Möglichkeiten der Nutzung von Erkenntnissen.

Vermessungstechnische Rundschau, Bonn 1971: Nr. 5. *Meckenstock, H. J.*: Neuordnung des Meß- und Eichwesens. — *Meckenstock, H. J.*: Nivellieren ohne Rechnen. — *Leuze, U.*: Reihenentwicklungen für Klotoidenelemente. — *Gläser, H.*: Dimensionierung von Klotoiden bei gleichbleibender Querneigung der Fahrbahn durch Gerade und Krümmen unterschiedlicher Richtung. — Nr. 6. *Lautsch*: Laser und Geodäsie unter dem Gesichtspunkt der Ingenieurkybernetik. — *Gläser, H.*: Möglichkeiten der Definition von Kurvigkeit und Bergigkeit von Straßen. — Nr. 7. *Pollmann*: Vermessungskreisel. — *Thomas, H.*: Wie Meß- und Rechenfehler auf ein Ergebnis einwirken. — *Wittke, H.*: Rechenaufgaben für Kreisbögen. — *Jahns, R.*: Zur Winkelausgleichung im Diagonaliereck. — *Schramek, T.*: Pythagoras-Proben.

### Contents

Erhart Ecker: On the Equivalence of Solutions of the Geodetic Boundary Value Problem.

Herbert Lichtenegger: Deduction of Differential Relations for Astro-Geodetic Position Fixing in Vector and Matrix Representation.

Josef Zeger: Remarks on the Perpendicular Error in the Central Parts of a Traverse with Intermediate Orientations.

### Sommaire

Erhart Ecker: Sur l'équivalence des solutions du problème aux limites géodétique.

Herbert Lichtenegger: La dérivée des relations différentielles dans la détermination astronomique-géodétique de la position en manière de vecteur ou matrice.

Josef Zeger: Quelques remarques sur l'erreur latérale au milieu d'un cheminement polygonal avec des orientations sur les points polygonals.

### Anschriften der Mitarbeiter dieses Heftes

Dr.-Ing. Erhart Ecker: Technische Universität Berlin, 12. Straße des 17. Juni 135.

Dipl.-Ing. Herbert Lichtenegger: Techn. Hochschule, 8010 Graz, II. Lehrkanzel für Geodäsie, Rechbauerstraße 12.

ORdV Dipl.-Ing. Josef Zeger: Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Abt. K 3, 1080 Wien VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3.

# Österreichischer Verein für Vermessungswesen

A 1180 Wien XVIII, Schopenhauerstraße 32

## I. Sonderhefte zur Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen

- Sonderheft 1: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 70. Geburtstag.* 198 Seiten, Neuauflage, 1948. Preis S 18,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 2: Lego (Herausgeber), *Die Zentralisierung des Vermessungswesens in ihrer Bedeutung für die topographische Landesaufnahme.* 40 Seiten, 1935. Preis S 24,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 3: Ledersteger, *Der schrittweise Aufbau des europäischen Lotabweichungssystems und sein bestanschließendes Ellipsoid.* 140 Seiten, 1948. Preis S 25,—. (Vergriffen.)
- Sonderheft 4: Zaar, *Zweimedienphotogrammetrie.* 40 Seiten, 1948. Preis S 18,—.
- Sonderheft 5: Rinner, *Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie.* 45 Seiten, 1948. Preis S 18,—.
- Sonderheft 6: Hauer, *Entwicklung von Formeln zur praktischen Anwendung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene.* 31 Seiten, 1949. (Vergriffen.)
- Sonderh. 7/8: Ledersteger, *Numerische Untersuchungen über die Perioden der Polbewegung. Zur Analyse der Laplace'schen Widersprüche.* 59+22 Seiten, 1949. Preis S 25,—.
- Sonderheft 9: *Die Entwicklung und Organisation des Vermessungswesens in Österreich.* 56 Seiten, 1949. Preis S 22,—.
- Sonderheft 11: Mader, *Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung.* 74 Seiten, 1951. Preis S 25,—.
- Sonderheft 12: Ledersteger, *Die Bestimmung des mittleren Erdellipsoides und der absoluten Lage der Landstriangulationen.* 140 Seiten, 1951. Preis S 35,—.
- Sonderheft 13: Hubeny, *Isotherme Koordinatensysteme und konforme Abbildungen des Rotationsellipsoides.* 208 Seiten, 1953. Preis S 60,—.
- Sonderheft 14: *Festschrift Eduard Doležal. Zum 90. Geburtstag.* 764 Seiten und viele Abbildungen. 1952. Preis S 120,—.
- Sonderheft 15: Mader, *Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern.* 26 Seiten und 12 Tabellen. 1954. Preis S 28,—.
- Sonderheft 16: *Theodor Scheimpflug — Festschrift.* Zum 150jährigen Bestand des staatlichen Vermessungswesens in Österreich. 90 Seiten mit 46 Abbildungen und XIV Tafeln. Preis S 60,—.
- Sonderheft 17: Ulbrich, *Geodätische Deformationsmessungen an österreichischen Staumauern und Großbauwerken.* 72 Seiten mit 30 Abbildungen und einer Luftkarten-Beilage. Preis S 48,—.
- Sonderheft 18: Brandstätter, *Exakte Schichtlinien und topographische Geländedarstellung.* 94 Seiten mit 49 Abb. und Karten und 2 Kartenbeilagen, 1957. Preis S 80,— (DM 14,—). (vergriffen)
- Sonderheft 19: *Vorträge aus Anlaß der 150-Jahr-Feier des staatlichen Vermessungswesens in Österreich*, 4. bis 9. Juni 1956.
- Teil 1: *Über das staatliche Vermessungswesen*, 24 Seiten, 1957. Preis S 28,—.
- Teil 2: *Über Höhere Geodäsie*, 28 Seiten, 1957. Preis S 34,—.
- Teil 3: *Vermessungsarbeiten anderer Behörden*, 22 Seiten, 1957. Preis S 28,—.
- Teil 4: *Der Sachverständige — Das k. u. k. Militärgeographische Institut.* 18 Seiten, 1958. Preis S 20,—.
- Teil 5: *Über besondere photogrammetrische Arbeiten.* 38 Seiten, 1958. Preis S 40,—.
- Teil 6: *Markscheidewesen und Probleme der Angewandten Geodäsie.* 42 Seiten, 1958. Preis S 42,—.

# **Offizielle österreichische amtliche Karten der Landesaufnahme**

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen  
in 1080 Wien VIII, Krotenthallerg. 3 / Tel. 42 75 46

## **Neuerscheinungen von offiziellen Karten der Landesaufnahme**

### **Österreichische Karte 1:50 000**

5 Gmünd	8 Geras	36 Ottenschlag
6 Waidhofen an der Thaya	18 Weitra	im Hausruckkreis
7 Groß Siegharts	19 Zwettl-Stadt	113 Mittelberg
		118 Innsbruck

Österreichische Karte 1:200000:

Blatt 48/12 Kufstein      48/16 Wien

### **Umgebungs- und Sonderkarten:**

Hochschwab 1:50000

Umgebungskarte Mayrhofen (Zillertal) 1:50000

Burgenland 1:200000

### **In letzter Zeit berichtigte Ausgaben der Österreichischen Karte 1:50000**

51 Steyr	120 Wörgl	191 Kirchbach/Stmk.
108 Deutschkreutz	164 Graz	192 Feldbach

### **Österr. Wasserkraftkataster**

Im Zuge der Bearbeitung des neuen österr. Wasserkraftkatasters ist erschienen:      Gurk, Saalach, Alm je S 250,—

Bibliographie zur österreichischen Wasserwirtschaft S 60,—

Die bisher erschienenen Bände sind durch den Kartenverlag des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Landesaufnahme, in Wien bzw. durch den Buchhandel zu beziehen.

Es werden folgende Kartenwerke empfohlen:

### **Für Amtszwecke sowie für Wissenschaft und Technik**

Österreichische Karte 1:25000

Österreichische Karte 1:50000

Österreichische Karte 1:200000

Arbeitskarten 1:200000 und 1:500000 von Österreich

### **Für Wanderungen**

die Blätter der Wanderkarte 1:50000 mit Wegmarkierungen  
und verschiedene Umgebungskarten

### **Zum Zusammenstellen von Touren und Reisen**

Übersichtskarte von Österreich 1:500000, mit Suchgitter  
und Namenverzeichnis



# Preise

## der amtlichen österr. Kartenwerke

<b>I Österreichische Karte 1:25000</b> (nicht fortgeführt) .....	13,—
<b>II Österreichische Karte 1:50000 mit Wegmarkierung</b> (Wanderkarte)	23,—
Österreichische Karte 1:50000 mit Straßenaufdruck .....	20,—
Österreichische Karte 1:50000 ohne Aufdruck .....	18,—
Prov. Ausgabe der Österr. Karte 1:50000 mit Wegmarkierung (Wanderkarte) .....	16,—
Prov. Ausgabe der Österr. Karte 1:50000 ohne Wegmarkierung .	10,—
<b>III Österreichische Karte 1:200000 mit Straßenaufdruck</b> .....	21,—
Österreichische Karte 1:200000 ohne Straßenaufdruck .....	18,—
<b>IV Alte Österreichische Landesaufnahme 1:25000</b> .....	10,—
<b>V Generalkarte von Mitteleuropa 1:200000</b>	
Blätter mit Straßenaufdruck (nur für das österr. Staatsgebiet vor- gesehen) .....	15 —
Blätter ohne Straßenaufdruck .....	12,—
<b>VI Übersichtskarte von Mitteleuropa (Projektion Bonne) 1:750000</b> ..	10,—
<b>VII Übersichtskarte von Mitteleuropa (Projektion Albers) 1:750000</b> .	10,—
<b>VIII Gebiets- und Sonderkarten</b>	
Hochschwab 1:50000 mit Wegmarkierungen .....	38,—
Hohe Wand 1:40000 mit Wegmarkierungen .....	15,—
Innsbruck 1:25000 mit Wegmarkierungen und Umschlag .....	45,—
Innsbruck 1:25000 mit Wegmarkierungen, flach .....	40,—
Innsbruck 1:25000 ohne Wegmarkierungen, flach .....	33,—
Lienzer Dolomiten 1:25000 .....	31,—
Mariazell 1:40000 mit Wegmarkierungen .....	21,—
Schneealpe 1:50000 mit Wegmarkierungen .....	13,—
Schneeberg und Rax 1:25000 mit Wegmarkierungen .....	35,—
Schneeberg und Rax 1:25000 ohne Wegmarkierungen .....	26,—
6 Großblätter von Wien 1:25000 .....	20,—
Umgebung von Wien 1:50000 mit Wegmarkierungen und Umschlag ....	45,—
Umgebung von Wien 1:50000 mit Wegmarkierungen, flach .....	40,—
Umgebung von Wien 1:50000 mit Straßenaufdruck und Umschlag ....	43,—
Umgebung von Wien 1:50000 mit Straßenaufdruck, flach .....	38,—
Umgebung von Wien 1:50000 ohne Aufdruck, flach .....	33,—
Umgebungskarte Mayrhofen (Zillertal) 1:50000 mit Wegmarkierungen ..	38,—
Gebietskarten 1:200000: Burgenland .....	38,—
Gebietskarten 1:200000: Albanien in 2 Blättern .....	40,—
Übersichtskarte von Österreich 1:500000, mit Namensverzeichnis, gefaltet	53,—
Übersichtskarte von Österreich 1:500000, ohne Namensverzeichnis, flach	35,—
Namensverzeichnis allein .....	15,—
Übersichtskarte von Österreich 1:500000, Politische Ausgabe mit Namensverzeichnis, gefaltet .....	48,—
Übersichtskarte von Österreich 1:500000, Politische Ausgabe ohne Namensverzeichnis, flach .....	30,—
Historischer Atlas der österr. Alpenländer, 2. Abt. (Pfarr- und Diözesan- karte) .....	120,—

**Die Karten sind in der amtlichen Verkaufsstelle 1080 Wien VIII,  
Krotenthallergasse 3, und in Buchhandlungen erhältlich**

Auf Wunsch werden Übersichtsblätter kostenlos abgegeben

## **Festschrift Theodor Scheimpflug**

Sonderheft 16 der ÖZV, Wien 1956

herausgegeben anlässlich des 150jährigen Bestandes des  
staatlichen Vermessungswesens in Österreich

vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen,  
vom Österreichischen Verein für Vermessungswesen und  
von der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

90 Seiten mit 46 Abb. und XIV Tafeln, Preis S 60,— oder DM 10,—

### *Aus dem Inhalt:*

Gelcitworte von Bundesminister DDDr. Illig und Präsident Dr. Schiffmann

Vorwort von Hofrat Neumaier

Prof. Doležal - Präs. Lego: Scheimpflugs Lebensbild

Th. Scheimpflug: Die Verwendung des Skioptikons zur Herstellung von Karten und  
Plänen

Prof. Krames: Scheimpflug und die Entwicklung der modernen Zweibildgeräte

Prof. Krames: Umbildung und Entzerrung photographischer Aufnahmen nach  
Scheimpflug

Prof. Krames: Scheimpflugs Landesvermessung aus der Luft

Präsident Lego: Der Entfernungsmesser Doležal-Scheimpflug

*Zu beziehen vom Österr. Verein für Vermessungswesen, A 1180 Wien, Schopenhauerstr. 32*

## **HUNDERTJAHRFEIER der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung**

23. bis 25. Oktober 1963

Sonderheft 24 der ÖZV, Wien 1964

125 Seiten mit 12 Bildtafeln (Präsidenten der ÖKIE seit 1871), 11 Figuren  
und 7 Tabellen, Preis S 120,— oder DM 20,—

### *Aus dem Inhalt:*

#### **Festprogramm**

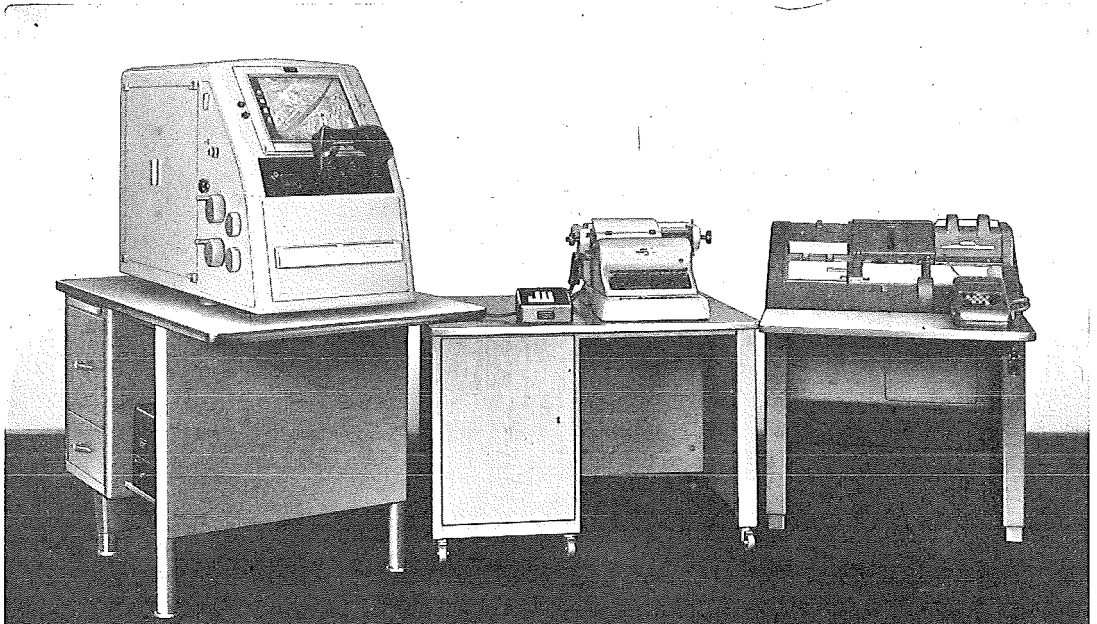
Organisation und Verlauf der Hundertjahrfeier der Österreichischen  
Kommission für die Internationale Erdmessung von F. Hauer

Die Neubegründung der Theorie der sphäroidischen Gleichgewichts-  
figuren und das Normalsphäroid der Erde von K. Ledersteger

Herausgeber: Österreichische Kommission für die Internationale Erd-  
messung. Verleger: Österreichischer Verein für Vermessungswesen

Zu beziehen vom Österreichischen Verein für Vermessungswesen:

Schopenhauerstraße 32, A 1180 Wien 18



**Präzisions-  
Stereokomparator**



**PSK**

Für hochgenaue Auswertung von Meßbildern bis zum Bildformat  $23\text{ cm} \times 23\text{ cm}$ , besonders in Verbindung mit Aerotriangulationen und bei analytischen Verfahren, bietet der ZEISS PSK einige bemerkenswerte Vorzüge:

Meßkonstanz auch bei Temperaturschwankungen —  
deshalb keine Klimatisierungsprobleme.

Keine Meßspindeln (Kontaktmeßprinzip) —  
deshalb hohe Meßgenauigkeit ( $1\ \mu$ -Registrierung).

Programmgesteuerte Einknopfschaltung —  
deshalb rationelles Arbeiten.

Serienmäßig für Ecomat-Anschluß eingerichtet —  
deshalb bei Bedarf automatische Bildkoordinaten-Registrierung  
auch auf Lochkarten oder Lochstreifen.

Binokulare Betrachtung auch bei Einzelbildausmessung —  
deshalb stets sichere Punkteinstellung.

Tischgerät in geschlossener Bauweise mit relativ geringem Gewicht —  
deshalb staubgeschützt, leicht transportabel und ohne Aufstellungs-  
probleme.

CARL ZEISS  
Oberkochen/West Germany



In Österreich: Vertrieb Optischer Erzeugnisse Ges. m. b. H.  
1096 Wien, Rooseveltplatz 2  
Telefon: 42 36 01, Fernschreiber: (07) 4839



Jetzt noch besser

# PLAN-VARIOGRAPH

ein Gerät zur zeichnerischen Vergrößerung und Verkleinerung von Plänen und Karten auf dem Wege der optischen Projektion

- Tischform — horizontale Arbeitsfläche — geringer Platzbedarf
- einfache Bedienung — stufenlos durch Handräder — Einstellmaßstab
- gleichmäßig helle Ausleuchtung der Vorlage mit Kaltlicht
- Vergrößerungen und Verkleinerungen bis 6fach (z. B. 1:2880 auf 1:500) mit Zusatzobjektiv bis 13fach

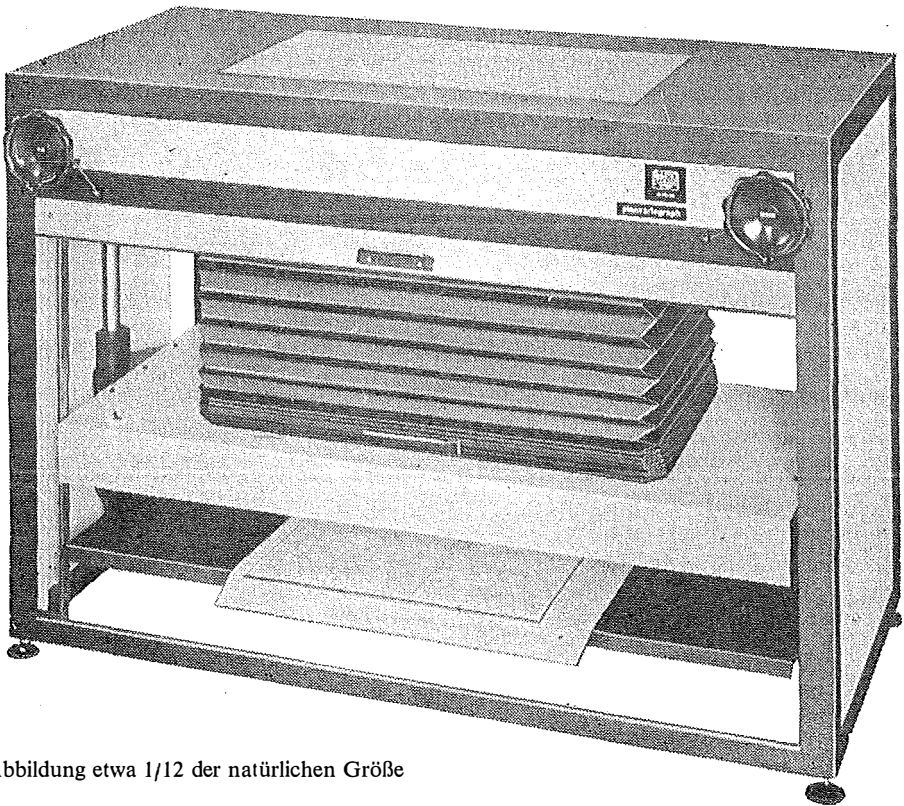


Abbildung etwa 1/12 der natürlichen Größe

- Vergrößerte Projektionsfläche
- Verstellbares Objektiv
- Beidseitige Blendschutzjalousie

Auf Wunsch: Andruckplatte für Photopapier — Neigunglibelle  
Einfacher Verschluss für Photoarbeiten — Punktiernikroskop

*Angebote und Prospekt direkt vom Erzeuger:*

## RUDOLF & AUGUST ROST

Fabrik für Feinmechanik - Instrumente für Vermessungs- und Zeichenbedarf

1151 WIEN XV, MÄRZSTRASSE 7 (Nähe Westbahnhof und Stadthalle)

TELEFON: (02 22) 92 32 31, 92 53 53, TELEGRAMME: GEOROST-WIEN

WIENER MESSE: Messegelände, jetzt Halle M, Stand 1272  
(Eingang Südseite links)