ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III. Kübeckgasse 12. — K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.	Erscheint am 1. und 16. jeden Monats. Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.	Expedition und Inseratenaufnahme durch *Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei* Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr. 13. Wien, am 1. Juli 1904. II. Jahrgang.

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III. Kübeckgasse 12.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.

Erscheint am 1. und 16. jeden Monats
Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr. 13. Wien, am 1. Juli 1904. II. Jahrgang.

Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme.

Von **S. Wellisch,** Oberingenieur der Stadt Wien.

(Fortsetzung).

IV. Ausgleichung direkter Beobachtungen.

Liegen wiederholte Beobachtungen einer und derselben Größe vor, z. B. mehrere Messungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ einer Länge L und sind die Differenzen

$$L - l_1 = v_1$$
$$L - l_2 = v_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$L - l_n = v_n$$

die an den Beobachtungsgrößen anzubringenden Verbesserungen, so erklärt das Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit diejenige Länge als den natürlichsten Mittelwert, zu deren Erlangung durch Zurückführung der deformierten Längen die geringste Formänderungsarbeit erforderlich ist.

Die zu den einzelnen Längenänderungen aufzuwendenden Arbeiten sind:

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1}{L} \cdot v_1{}^2 = \frac{1}{2}\, p_1 \frac{(L - l_1)^2}{L}$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{p_2}{L} \cdot v_2{}^2 = \frac{1}{2}\, p_2 \frac{(L - l_2)^2}{L}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_n = \frac{1}{2}\frac{p_n}{L} \cdot v_n{}^2 = \frac{1}{2}\, p_n \frac{(L - l_n)^2}{L}$$

deren Summe ist $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\left[\frac{p\,v\,v}{L}\right] = \frac{1}{2}\left[p\,\frac{(L - l)^2}{L}\right]$

Sollen die Verschiebungen oder Verbesserungen $v = L - l$ die Deformationsarbeit $\mathfrak{A}$ zu einem Minimum machen, so ist der Differenzialquotient der Arbeit nach der veränderlichen l gleich Null zu setzen, das gibt, da L konstant ist, die Differenzialgleichung

$$\frac{d\,\mathfrak{A}}{d\,l} = \Big[p\,(L - l)\Big] = 0$$

somit ist

$$L\,[p] = [p\,l]$$

und

$$L = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

d. i. das allgemeine arithmetische Mittel.

Für gleich genaue Beobachtungen ist $p = 1$, $[p] = n$ und

$$L = \frac{[l]}{n}$$

d. i. das einfache arithmetische Mittel.

Der aus der Methode der kleinsten Produkte berechnete Mittelwert ist daher mit dem aus der Methode der kleinsten Quadrate hervorgehenden arithmetischen Mittel identisch, welches sohin unter allen möglichen Mittelwerten zugleich auch der natürlichste ist.

Die Regel von dem arithmetischen Mittel gilt jedoch nur für die Beobachtungsgrößen selbst, nicht aber auch für deren Fehler, die, um Null herum liegend, teils positiv teils negativ auftreten. Wenn eine Anzahl n wahrer Beobachtungsfehler $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$ vorliegt, so wird nicht das arithmetische Mittel, auch nicht das durchschnittliche Mittel, sondern derjenige Mittelwert als der beste erklärt, welcher nach der Gleichung

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}$$

gebildet wird und welchen Gauß in die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate eingeführt und den »mittleren zu fürchtenden Fehler« genannt hat. Von diesem mittleren Fehler, der sich besser wie jeder andere zu Genauigkeitsbestimmungen eignet, sagt aber Jordan, daß man seine Einführung wohl als zweckmässig darstellen kann, daß es jedoch nicht gelingt, »diese Wahl eines Genauigkeitsmaßes als notwendig nachzuweisen«. Gauß selbst spricht sich hierüber wie folgt aus: »Wenn jemand den Einwand erheben würde, es sei dieser Grundsatz ohne zwingende Notwendigkeit willkürlich gewählt, so werden wir gerne zustimmen, da diese Frage der Natur der Sache nach etwas unbestimmtes enthält, das nur durch ein gewissermaßen willkürliches Prinzip eingeschränkt werden kann.«

Wir wollen nun versuchen, diese für das gesamte Vermessungswesen überaus wichtige Formel nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme abzuleiten und so deren strenge Gültigkeit auf mechanischem Wege nachzuweisen.

Betrachten wir zu diesem Behufe einen geraden, elastischen Stab an Stelle einer gemessenen Linie oder einer beobachteten Richtung, welche dann die in der Stabachse gelegene Faser vertreten, so lassen sich die wahren Beobachtungsfehler wie die Längs- oder Querverschiebungen eines von Achsial-, beziehungsweise Schubkräften beanspruchten Stabes auffassen. Bezeichnen

v_1' v_2' . . . v_μ' die positiven Fehler von der Anzahl μ.

v_1'' v_2'' . . . v_ν'' die negativen Fehler von der Anzahl ν.

Q_1' Q_2' . . . Q_μ' die positiven Kräfte,

Q_1'' Q_2'' . . . Q_ν'' die negativen Kräfte, welche einzeln diese Fehler oder Deformationen verursachen, in ihrer Zusammenwirkung aber ihrer ungleichen Größe und Anzahl wegen nach dem wieder eingetretenen Gleichgewichtszustande im allgemeinen eine Ablenkung von der ursprünglichen Ruhelage bewirken, (welche Ablenkung dem Unterschiede des Mittelwertes von dem wahren Werte oder dem w a h r e n Fehler des Mittels gleichkommt); ist ferner

L die Länge des in Vergleich gezogenen Stabes,

F die Fläche des Querschnittes und

p der Elastizitätsmodul der Dehnung oder Gleitung, je nachdem es sich um die Beanspruchung von Achsial- oder Schubkräften handelt, so besteht im Zustande des Gleichgewichtes zwischen der äußeren und inneren Arbeit die Gleichgewichtsgleichung in ihrer Allgemeinheit:

$$[Q\,v] = \frac{p\,F}{L}\,[v\,v] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Denkt man sich die μ positiven Kräfte Q' und die ν negativen Kräfte Q'', die alle von verschiedener Größe sind, durch ebensoviele, aber durchaus gleiche Kräfte P ersetzt, so daß die μ positiven Kräfte P und die ν negativen Kräfte P die gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungen $+ m$ und $- m$ von der resultierenden Gleichgewichtslage des deformierten Stabes erzeugen und daher in ihrer Zusammenwirkung an dem vorhandenen Gleichgewichtszustande nichts ändern, so besteht in diesem Falle, wenn $\mu + \nu = n$ gesetzt wird, die spezielle Gleichgewichtsgleichung:

$$n\,.\,P\,m = n\,.\,\frac{p\,F}{L}\,m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es stellt dann nicht nur die Kraft P den natürlichsten Mittelwert der Kräfte Q dar, sondern es ist zugleich auch die der Mittelkraft P entsprechende Verschiebung m der natürlichste Mittelwert aller Verschiebungen v. Da die Wahl von P und m so getroffen ist, daß sich an dem Gleichgewichtszustande nichts ändert, also auch die Summe der äußeren Arbeiten nicht, so ist die Summe aller Produkte $Q\,v$ gleich dem n-fachen Produkte $P\,m$ oder e s i s t d i e A r b e i t d e r M i t t e l k r a f t P g l e i c h d e m a r i t h m e t i s c h e n M i t t e l d e r A r b e i t e n a l l e r E i n z e l k r ä f t e Q und es besteht die Beziehung:

$$[Q\,v] = n\,.\,P\,m,$$

welche mit Bezug auf die beiden Gleichgewichtsgleichungen (1) und (2) zur Relation

$$\frac{pF}{L}[vv] = n\frac{pF}{L}m^2$$

führt, woraus der natürlichste Mittelwert der Beobachtungsfehler oder der Gauß'sche mittlere Fehler

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$$

erhalten wird.

V. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

a) Ausgleichung von Längenmessungen.

Es sei in einer Geraden von unabänderlicher Länge L ein Teilpunkt eingemessen, der von den beiden Enden der Geraden die gemessenen Abstände l_1 und l_2 habe. Infolge der bei der Längenmessung gemachten unvermeidlichen Fehler wird sich ein Widersprnch ω ergeben, so daß die Gleichung besteht:

$$L = l_1 + l_2 + \omega.$$

Sind L_1 und L_2 die verbesserten Teilstrecken, also $L_1 + L_2 = L$, die an den gemessenen Längen anzubringenden Verbesserungen somit

$$v_1 = L_1 - l_1 \text{ und } v_2 = L_2 - l_2,$$

so ist es Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, den Längenwiderspruch ω so zum Verschwinden zu bringen, daß der Bedingungsgleichung

$$(L_1 - l_1) + (L_2 - l_2) = v_1 + v_2 = \omega$$

Genüge geleistet werde. Da diese Gleichung zwei Unbekannte enthält, so kann sie nur durch Einführung einer weitern Bedingung gelöst werden. Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt unter gleichzeitiger Annahme des »Quadratwurzelgesetzes« und Einführung der aus diesem Gesetze abgeleiteten Gewichte, daß die Summe der mit diesen Gewichten multiplizierten Quadrate der Verbesserungen ein Minimum werde, woraus dann das »überall befriedigende Proportional-Verteilungsverfahren« selbstverständlich resultieren muß, indem — der mittlere Längenmessungsfehler proportional der Quadratwurzel der Länge wachsend angenommen — das Gewicht einer Längenmessung umgekehrt proportional sein muß der Länge selbst. Die Methode der kleinsten Produkte hingegen fordert, daß die Summe der auf die Längeneinheit reduzierten Quadrate der Längenverbesserungen ein Minimum werde, nämlich

$$\left[\frac{vv}{L}\right] = \left\{\frac{(L_1 - l_1)^2}{L_1} + \frac{(L_2 - l_2)^2}{L_2}\right\} = \text{min.}$$

Differenziert man nach den beiden Veränderlichen l_1 und l_2, so erhält man die Differenzialgleichung:

$$\frac{L_1 - l_1}{L_1}\,dl_1 + \frac{L_2 - l_2}{L_2}\,dl_2 = 0.$$

Infolge des Bestehens der Bedingungsgleichung sind die Differenziale dl und dl_2 nicht unabhängig von einander. Differenziert man daher die Bedingungsgleichung nach den beiden Veränderlichen l_1 und l_2 und multipliziert sie mit dem vorläufig noch unbestimmten Korrelat k, so erhält man zunächst

$$-k\,(d\,l_1 + d\,l_2) = 0$$

und wenn man die Koeffizienten der gleichen Differenziale einander gleichsetzt, die Korrelatengleichungen:

$$-k = \frac{L_1 - l_1}{L_1} = \frac{L_2 - l_2}{L_2}$$

Substituiert man die daraus hervorgehenden Verbesserungen

$$L_1 - l_1 = -k\,L_1 \quad \text{und} \quad L_2 - l_2 = -k\,L_2$$

in die Bedingungsgleichung, so ergibt sich die Normalgleichung:

$$k\,(L_1 + L_2) = \omega$$

und hieraus:

$$-k = \frac{\omega}{L_1 + L_2} = \frac{\omega}{L}.$$

Somit sind die Verbesserungen:

$$L_1 - l_1 = v_1 = \frac{\omega}{L} \cdot L_1$$

$$L_2 - l_2 = v_2 = \frac{\omega}{L} \cdot L_2,$$

das heißt, die Methode der kleinsten Produkte verlangt die Verteilung des Längenwiderspruches proportional den Längen, gibt also direkt ohne Zuhilfenahme von Gewichten dasselbe Resultat, welches die Methode der kleinsten Quadrate erst durch die Annahme eines speziellen Fehlergesetzes und unter Einführung der entsprechenden Gewichte liefert. Jedes andere Fehlergesetz würde nach der Methode der kleinsten Quadrate abweichende und daher unrichtige Resultate ergeben, woraus hervorgeht, daß die Methode der kleinsten Quadrate nur unter Zugrundelegung eines der Natur der Messung angepaßten Fehlerfortpflanzungsgesetzes natürliche Resultate liefert und dann auch mit der neuen Methode vollkommen übereinstimmt. Damit erscheint die Anwendung der Theorie der kleinsten Deformationsarbeit auf geodätische Operationen zu mindestens in demselben Maße gerechtfertigt, wie die Anwendung des mit der Methode der kleinsten Quadrate verwandten mechanischen Prinzips des kleinsten Zwanges von Gauß.

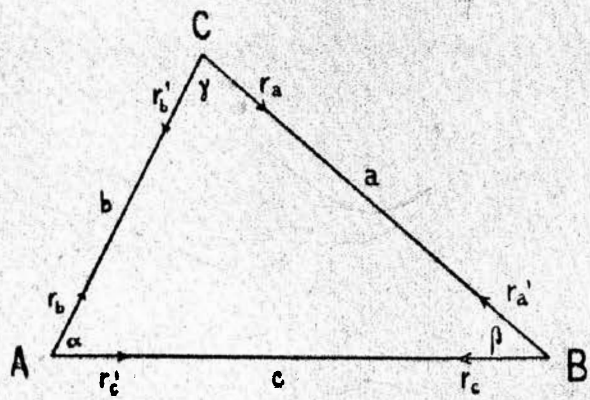
b) Ausgleichung von Winkelmessungen.

In einem Dreiecke seien alle Winkel gemessen, deren Summe infolge unvermeidlicher Beobachtungsfehler der Bedingung des Dreiecksabschlusses

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

nicht voll Genüge leistet, sondern einen Winkelwiderspruch ω aufweist, der durch Verteilung auf die drei Winkel so getilgt werden soll, daß er mit den drei Winkelverbesserungen die Gleichung erfülle:

$$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma = \omega.$$



Jede Winkelverbesserung ist die Differenz zweier Richtungsverbesserungen. Bezeichnet man die Verbesserungen der im Dreieckspunkte A beobachteten Richtungen r_b und r_c' mit v_b und v_c' und analog die Verbesserungen der in B und C beobachteten Richtungen mit v_c und v_a', beziehungsweise v_a und v_b', so sind die Winkelverbesserungen:

$$v_\alpha = v_b - v_c'$$
$$v_\beta = v_c - v_a'$$
$$v_\gamma = v_a - v_b'$$

und es besteht die Bedingungsgleichung für die Richtungsverbesserungen:

$$v_a + v_b + v_c - v_a' - v_b' - v_c' = \omega.$$

Da in diesem Falle Verdrehungen, aber keine Längsverschiebungen stattfinden, so sind in dem allgemeinen Ausdrucke $\left[\frac{p\,v\,v}{l}\right]$ für v die durch die Richtungsverbesserungen v_r bewirkten Querverschiebungen $v = \frac{l\,v_r}{\varrho}$ zu setzen und man hat für gleiche Genauigkeiten $(p = 1)$ die Minimumsbedingung in der Form:

$$[l\,v_r\,v_r] = \text{min.}$$

und, indem man für l die entsprechenden Dreiecksseiten a, b, c setzt, die Differenzialgleichung:

$$a\,(v_a\,dv_a + v_a'\,dv_a') + b\,(v_b\,dv_b + v_b'\,dv_b') + c\,(v_c\,dv_c + v_c'\,dv_c') = 0.$$

Die Bedingungsgleichung nach allen Veränderlichen differenziert und mit dem Korrelat k multipliziert, gibt:

$$k\,(dv_a + dv_b + dv_c - dv_a' - dv_b' - dv_c') = 0$$

ferner die Korrelatengleichungen:

$$k = a\,v_a = b\,v_b = c\,v_c = -\,a\,v_a' = -\,b\,v_b' = -\,c\,v_c'.$$

Substituiert man die daraus hervorgehenden Verbesserungen in die Bedingungsgleichung, so erhält man die Normalgleichung:

$$2\left(\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c}\right) = \omega$$

und hieraus:

$$k = \frac{\omega}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

Somit ist

$$v_a = -v_a' = \frac{k}{a} \qquad v_\alpha = k\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$v_b = -v_b' = \frac{k}{b} \quad \text{und} \quad v_\beta = k\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$$

$$v_c = -v_c' = \frac{k}{c} \qquad v_\gamma = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Bildet man das Verhältnis: $\frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{a\,(b + c)}{b\,(c + a)}$

und analog die Verhältnisse $\frac{v_\beta}{v_\gamma}$ und $\frac{v_\gamma}{v_\alpha}$, so erhält man die Doppelgleichung:

$$\frac{v_\alpha}{a\,(b + c)} = \frac{v_\beta}{b\,(c + a)} = \frac{v_\gamma}{c\,(a + b)}$$

welche die Verteilung des Winkelwiderspruches im Verhältnis zu den drei Seiten darstellt. In Worten ausgedrückt lautet das Resultat: Die natürlichste Gestalt des Dreieckes wird durch eine solche Verteilung des Winkelwiderspruches erzielt, welche den Produkten aus der gegenüberliegenden Seite in die Summe der beiden anliegenden Seiten proportional vorgenommen wird.

Damit erscheint eine spezielle Aufgabe gelöst, welche Prof. Dr. Reinhertz in seinen »Bemerkungen über Kleintriangulierungen« allgemein wie folgt gestellt hat: »Die beste gegenseitige Punktlage würde eine solche sein, bei welcher die mittleren Fehler der Punktabstände mit den Längenmessungsfehlern in Beziehung stehen. Es liegt daher nahe zu untersuchen, welcher Wert für die Strahlengewichte am meisten dieser Bedingung entspricht, das heißt, festzustellen, wenn ein Neupunkt durch Strahlen von verschiedener Länge festgelegt wird, welche Gewichte der Strahlenschnitte den Ort des Neupunktes am besten in Übereinstimmung mit den Anforderungen der Längenmessung setzen.«

Für $a = b = c$ geht die Doppelgleichung über in $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma$, das heißt, bei einem gleichseitigen Dreiecke erfolgt die Verteilung des Winkelwiderspruches nach der Methode der kleinsten Produkte auf die drei Winkel zu gleichen Teilen, in diesem speziellen Falle also ebenso wie nach der Methode der kleinsten Quadrate, wonach die Gauß'sche Methode als ein spezieller Fall der neuen Methode sich darzustellen scheint.

Beispiel für gleiche Genauigkeitsgewichte.

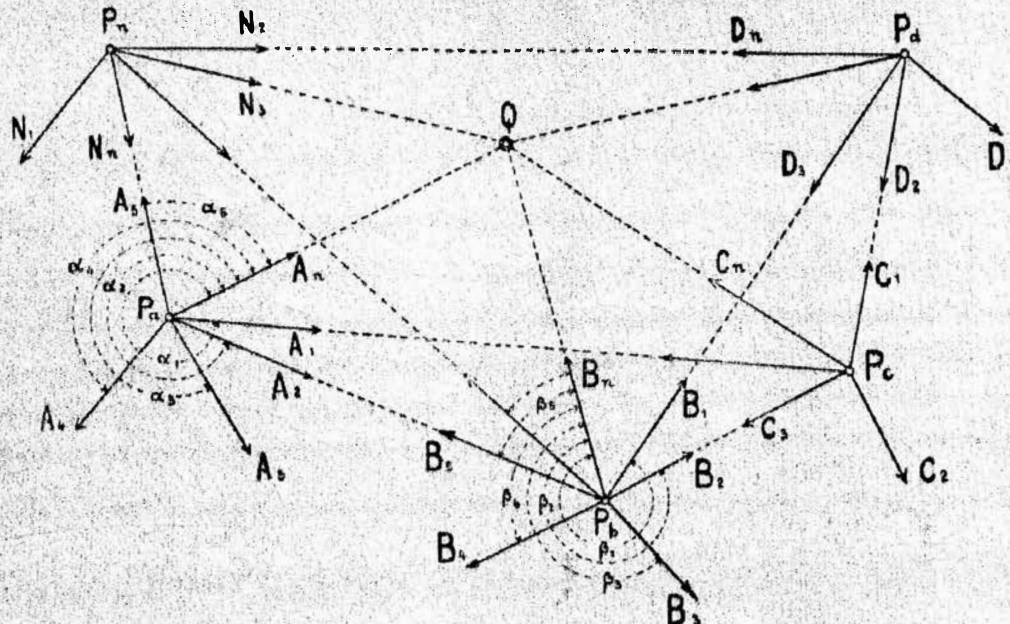
Gemessene Winkel	Seiten		Verbesserungen nach der Methode der kleinsten Quadrate	Produkte
$\alpha = 73^\circ\ 07'\ 00''$	$a = 481$	$\frac{1000}{a} = 2{\cdot}1$	$v_\alpha = -10{\cdot}0''$	$v_\alpha = -12{\cdot}8''$
$\beta = 95\ \ 24\ \ 20$	$b = 500$	$\frac{1000}{b} = 2{\cdot}0$	$v_\beta = -10{\cdot}0$	$v_\beta = -12{\cdot}9$
$\gamma = 11\ \ 29\ \ 10$	$c = 100$	$\frac{1000}{c} = 10{\cdot}0$	$v_\gamma = -10{\cdot}0$	$v_\gamma = -4{\cdot}3$
180 00 30				
$\omega = -30''$		$14{\cdot}1$ $k = 1{\cdot}07$	$\omega = -30{\cdot}0$	$\omega = -30{\cdot}0$

VI. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

a) Vorwärtseinschneiden.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes Q durch äußere Richtungen seien auf den gegebenen Punkten P_a P_b . . . P_n Richtungsunterschiede gemessen worden zwischen dem zu bestimmenden Punkte Q und den umliegenden gegebenen Dreieckspunkten A_1 A_2 . . . A_n ; B_1 B_2 . . . B_n ; C_1 C_2 . . . C_n u. s. w. Sind φ_1 φ_2 . . . φ_n die bekannten Richtungswinkel (Südwinkel) der gegebenen Dreieckseiten von P_a nach A_1 A_2 . . . A_n, beziehungsweise von P_b nach B_1 B_2 . . . B_n u. s. w. und ist R der Richtungswinkel von der betreffenden Station nach Q, so hat man, wenn die beobachteten Richtungsunterschiede mit α_1 α_2 . . . α_n bezeichnet werden, für die zu bestimmende Richtung R die verschiedenen, mit unregelmäßigen Beobachtungsfehlern behafteten Werte:

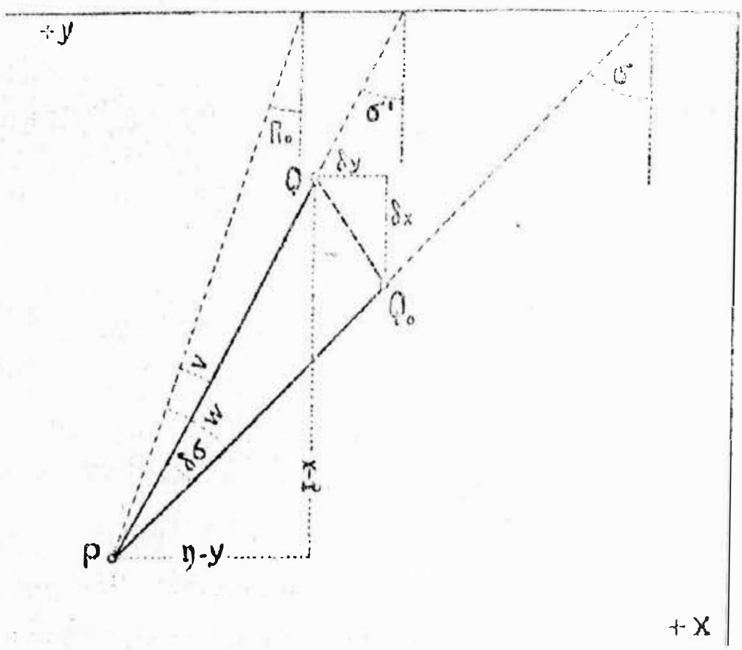
$$
\begin{aligned}
R_1 &= \varphi_1 + \alpha_1 \\
R_2 &= \varphi_2 + \alpha_2 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
R_n &= \varphi_n + \alpha_n,
\end{aligned}
$$



deren arithmetisches Mittel die orientierte Richtung R_o der Beobachtungen genannt wird. In gleicher Weise erhält man für jede Beobachtungsstation die den Punkt Q bestimmenden orientierten Richtungen, welche in der weiteren Berechnung den einzelnen Beobachtungen entsprechen und welchen je nach der Anzahl der zu ihrer Bildung herangezogenen Richtungen verschiedene Genauigkeitsgewichte zukommen.

Sind x, y die aus irgendeinem Dreiecke auf elementar-triogonometrischem Wege erhaltenen genäherten oder vorläufigen Koordinaten des Punktes Q; dx, dy die den vorläufigen Koordinaten zukommenden Verbesserungen nach Ausgleichung der bei Benützung aller überschüssigen Beobachtungen sich ergebenden Widersprüche; σ' der aus den gegebenen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ des

Punktes P und den vorläufigen Koordinaten x, y des Punktes Q berechnete vorläufige Südwinkel der Seite QP = s; σ der aus den verbesserten Koordinaten des Punktes Q_0 ($x + dx$, $y + dy$) und den Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ erhaltene endgültige Südwinkel und $d\sigma$ die an den vorläufigen Südwinkel anzubringende Verbesserung; w die Abweichung der orientierten Richtung R_0 von dem vorläufigen Südwinkel und v die Abweichung der orientierten Richtung von dem endgültigem Südwinkel, so finden für jede beobachtete Richtung die Beziehungen statt:



$$\sigma' - R_0 = w$$
$$\sigma - R_0 = v$$

$$d\sigma = \sigma - \sigma' = v - w$$
$$v = d\sigma + w$$
$$d\sigma = \frac{\varrho \sin \sigma'}{s}\, dx - \frac{\varrho \cos \sigma'}{s}\, dy$$

somit die Richtungsverbesserungen in der üblichen Schreibweise:

$$v = a\,dx + b\,dy + w$$

worin $a = \frac{\varrho \sin \sigma'}{s}$ und $b = -\frac{\varrho \cos \sigma'}{s}$ bedeutet.

Die Minimumsbedingung für die Methode der kleinsten Produkte lautet nach Einführung der Richtungsverbesserungen an Stelle der Querverschiebungen:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\,\varrho^2}\,[p\,s\,v\,v] = \min.$$

Substituiert man für v die obigen Werte und setzt man die partiellen Differenzialquotienten nach den beiden Unbekannten dx und dy gleich Null, so erhält man die Differenzialgleichungen:

$$\frac{\delta \mathfrak{A}}{\delta\, dx} = \frac{1}{\varepsilon^2}\,[psa^2\,.\,dx + psab\,.\,dy + psaw] = 0$$

$$\frac{\delta \mathfrak{A}}{\delta\, dy} = \frac{1}{\varepsilon^2}\,[psab\,.\,dx + psb^2\,.\,dy + psbw] = 0$$

somit die Normalgleichungen für verschiedene Genauigkeitsgewichte:

$$[psaa]\,dx + [psab]\,dy + [psaw] = 0$$
$$[psab]\,dx + [psbb]\,dy + [psbw] = 0$$

und für gleiche Genauigkeitsgewichte:

$$[saa]\,dx + [sab]\,dy + [saw] = 0$$
$$[sab]\,dx + [sbb]\,dy + [sbw] = 0$$

Diese Gleichungen sind von den aus der Methode der kleinsten Quadrate hervorgehenden Normalgleichungen nur dadurch unterschieden, daß statt der einfachen Gewichtszahlen p in den neuen Gleichungen die Gewichtsfaktoren ps auftreten, welche sich aus den Genauigkeitsgewichten p und den Strahlengewichten s zusammensetzen. Demnach sind die Formeln der Methode der kleinsten Produkte für gleiche Genauigkeit ($p = 1$) analog beschaffen, wie die Formeln der Methode der kleinsten Quadrate für ungleiche Genauigkeit ($p = s$).

Beispiel: (Aus der österreichischen »Instruktion zur Ausführung der trig. und polyg. Vermessungen«, S. 106),

Netzpunkte	a	b	σ'	Ro + 180°	w
Spielberg	+ 51·2	— 10·3	78° 34′ 55·3″	78 34′ 54″	+ 1·3″
4	+ 70·4	+ 23·6	108 33 15·3	108 33 17	— 1·7
1	+ 53·8	+ 61·5	138 50 50·8	138 50 50	+ 0·8
Hadi	— 41·3	+ 63·5	213 03 52·5	213 03 55	— 2·5
Neuer Berg	— 114·2	— 182·1	327 55 10·3	327 55 11	— 0·7

s in km.	saa	sab	saw	sbb	sbw
3·95	10.353	— 2.082	+ 265	419	— 51
2·78	13.778	+ 4.618	— 334	1.548	— 111
2·52	7.293	+ 8.339	+ 108	9.531	+ 123
2·72	4.640	— 7.135	+ 280	10.967	— 432
0·96	12.520	+ 19.964	+ 77	31.834	+ 122
12·93	48.584	+ 23.704	+ 396	54.299	— 349

Normalgleichungen:

$$\underline{48.584\,.\,dx} + 23.704\,.\,dy + 396 = 0$$
$$\underline{54.299\,.\,dy} - 349 = 0$$

$$\text{Koordinatenverbesserungen:}\ \begin{cases} dy = +\,0{\cdot}013 \\ dx = -\,0{\cdot}014 \end{cases}$$

a dx	b dy	dσ	w	v	v v	s v v	m
— 0·717	— 0·134	— 0·9	+ 1·3	+ 0·4	0·16	0·63	± 1·41″
— 0·986	+ 0·307	— 0·7	— 1·7	— 2·4	5·76	16·01	± 1·68
— 0·753	+ 0·800	+ 0·0	+ 0·8	+ 0·8	0·64	1·61	± 1·77
+ 0·578	+ 0·826	+ 1·4	— 2·5	— 1·1	1·21	3·29	± 1·70
+ 1·599	— 2·367	— 0·8	— 0·7	— 1·5	2·25	2·16	± 2·87
						23·70	

Mittlerer Fehler μ einer beobachteten Richtung von der fingierten Länge $s = 1$ km:

$$\mu = \sqrt{\frac{[s\,v\,v]}{n-q}} = \sqrt{\frac{23{\cdot}70}{5-2}} = \pm 2{\cdot}81$$

Mittlerer Fehler μ' einer beobachteten Richtung von der durchschnittlichen Länge $\frac{[s]}{n} = \frac{12{\cdot}93}{5} = 2{\cdot}59$ km:

$$\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{2{\cdot}59}} = \pm 1{\cdot}75''$$

Die mittleren Fehler $m = \frac{\mu}{\sqrt{s}}$ der beobachteten Richtungen $s_1\ s_2 \ldots s_5$ sind in obiger Tabelle ausgewiesen.

Zum Vergleiche setzen wir hier auch die aus der Methode der kleinsten Quadrate hervorgegangenen Ergebnisse an:

$$\text{Koordinatenverbesserungen: } \begin{cases} dy = +\ 0{\cdot}009 \\ dx = -\ 0{\cdot}015 \end{cases}$$

mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung ohne Rücksicht auf deren Länge

$$m = \pm 1{\cdot}70''.$$

b) Rückwärtseinschneiden.

Behufs Ausgleichung eines durch innere Richtungen bestimmten Punktes gestalten sich unter Berücksichtigung des unbekannten Orientierungsfehlers z die Formeln wie folgt:

Die Bedingungsgleichungen lauten:

$$a'\,dx + b'\,dy + w' + z = 0 \qquad \text{Anzahl: } p's'$$
$$a''\,dx + b''\,dy + w'' + z = 0 \qquad \text{»} \quad p''s''$$

u. s. w.

Durch Addition dieser Gleichungen und Division der Summe durch die Anzahl der Gleichungen $[ps]$ ergibt sich (als allgemeines arithmetisches Mittel) die Gleichung

$$\frac{[psa]}{[ps]}\,dx + \frac{[psb]}{[ps]}\,dy + \frac{[psw]}{[ps]} + z = 0,$$

welche, von den einzelnen Bedingunsgleichungen subtrahiert, die folgenden, von dem Orientierungsfehler z befreiten, reduzierten Bedingungsgleichungen liefert:

$$\left(a' - \frac{[psa]}{[ps]}\right) dx + \left(b' - \frac{[psb]}{[ps]}\right) dy + \left(w' - \frac{[psw]}{[ps]}\right) = 0$$

$$\left(a'' - \frac{[psa]}{[ps]}\right) dx + \left(b'' - \frac{[psb]}{[ps]}\right) dy + \left(w'' - \frac{[psw]}{[ps]}\right) = 0$$

u. s. w.

Bezeichnet man die Ausdrücke in den Klammern als reduzierte a, b und w oder mit α, β und ω, so hat man die Elemente zur Bildung der Normalgleichungen, die genau so gebaut sind, wie die behufs Ausgleichung eines Punktes durch äußere Richtungen aufgestellten Normalgleichungen.

Beispiel. (Aus der österreichischen »Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen«. Seite 110).

Netzpunkte	a	b	σ'	R_m	$r_0 = R_m + 0$	w
				o=287°54'45"		
2	−129·8	− 42·0	287° 54′ 50″	0″ 00′ 05″	287° 54′ 50″	0
15	+ 38·3	−262·3	8 18 39	80 23 33	8 18 18	+21
16	+170·7	−150·0	48 42 15	120 47 30	48 42 15	0
4	+182·5	− 50·3	74 35 45	146 40 56	74 35 41	+ 4
1	+ 30·4	+280·3	173 48 08	245 53 23	173 48 08	0

s in km	sa	sb	sw	α	β	ω	sα	sβ	sω
1·51	−196·0	− 63·4	0	−171·7	+ 8·7	− 4·2	−259·3	+ 13·2	− 6·3
0·78	+ 29·9	−204·6	+16·4	− 3·6	−211·6	+16·8	− 2·8	−165·0	+13·1
0·91	+155·3	−136·5	0	+128·8	− 99·3	− 4·2	+117·2	− 90·4	− 3·8
1·09	+198·9	− 54·8	+ 4·4	+140·6	+ 0·4	− 0·2	+153·3	+ 0·4	− 0·2
0·73	+ 22·2	+204·6	0	− 11·5	+331·0	− 4·2	− 8·4	+241·6	− 3·0
[s]	+210·3	−254·7	+20·8				+270·5	+255·2	+13·1
: 5·02	+ 41·9	− 50·7	+ 4·2				−270·5	−255·4	−13·3

Normalgleichungen:

$$\underline{81\,268\,dx} - 16\,019\,dy + 554 = 0$$

$$\underline{123\,992\,dy} - 3463 = 0$$

Koordinaten-Verbesserungen: $\left\{ \begin{array}{l} dy = +\,0{\cdot}028 \\ dx = -\,0{\cdot}001 \end{array} \right.$

a . dx	b . dy	dσ	s . dσ	red . dσ	red. sdσ	ω	v	svv	m
+0·130	—1·176	—1·046	—1·579	+0·4	+0·6	—4·2	—3·8	21·80	± 7·70″
—0·038	—7·344	—7·382	—5·758	—5·9	—4·6	+16·8	+10·9	92·67	± 10·76
—0·171	—4·200	—4·371	—3·978	—2·9	—2·6	—4·2	—7·1	45·87	± 9·97
—0·183	—1·408	—1·591	—1·734	—0·1	—0·1	+ 0·2	+ 0·1	0·01	± 9·11
—0·030	+7·848	+7·818	+5·707	+9·3	+6·8	—4·2	+ 5·1	18·99	± 11·14
			—7·342		+7·4			179·34	
		:5·02	—1·46		—7·3				

In dieser Tabelle bestehen die Relationen:

$$d\sigma = a\,.\,dx + b\,.\,dy$$

$$\text{red. } d\sigma = d\sigma - \frac{[s\,.\,d\sigma]}{[s]}$$

$$[\text{red. } s\,.\,d\sigma] = 0 \qquad \text{zur Probe}].$$

$$v = \text{red. } d\sigma + \omega$$

$$m = \sqrt{\frac{[svv]}{s\,(n-q)}}$$

Es ist der mittleren Fehler μ einer beobachteten Richtung von der fingierten Länge $s = 1$ km:

$$\mu = \sqrt{\frac{[svv]}{n-q}} = \sqrt{\frac{179{\cdot}34}{5-3}} = \pm\, 9{\cdot}47''$$

somit die mittlere Fehler der einzelnen Richtungen von der Länge s_1 s_2 . . . s_5 allgemein

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{s}}$$

welche in der letzten Spalte der obigen Tabelle speziell ausgewiesen sind.

Zum Vergleiche setzen wir hier die aus der Methode der kleinsten Quadrate hervorgehenden Ergebnisse an:

$$\text{Koordinaten-Verbesserungen: } \begin{cases} dy = +\ 0{\cdot}029 \\ dx = +\ 0{\cdot}007 \end{cases}$$

Mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung ohne Rücksicht auf deren Länge:

$$m = \pm\, 9{\cdot}89''$$

Sind nun auch in diesen Beispielen die Differenzen zwischen den Resultaten beider Methoden nur geringfügige, wie ja überhaupt das Ausgleichungsverfahren um so mehr an Bedeutung verliert, je genauer die Beobachtungen selbst erscheinen, so können doch bei größeren Verschiedenheiten in den Strahlenlängen diese Differenzen unter Umständen so bedenklich anwachsen, daß sie für die Wahl des Ausgleichungsverfahrens bestimmend werden. So ergeben sich beispielweise bei dem in Jordan's Handbuch der Vermessungskunde enthaltenen Schulbeispiele für Vorwärtseinschneiden folgende Resultate:

Nach der Methode der kleinsten Quadrate: dy = — 0·048 dx = — 0·031

» » » » » Produkte: dy = — 0·077 dx = — 0·041

(Fortsetzung folgt).

Lineal zur Ermittlung des Blatteinganges.

Von Karl Scharf, k. k Geometer in Leitmeritz.

Im Heft 6, Seite 95 vom Jahre 1903 habe ich mir erlaubt, die Herren Kollegen auf ein von mir konstruiertes Lineal zur Ermittlung des Blatteinganges aufmerksam zu machen.

Damals bemerkte ich, daß ein Lineal an die vorgesetzte Behörde zur Begutachtung und eventueller dienstlicher Einführung beim Kataster von mir eingesendet wurde und habe ich gleichzeitig den Herren Kollegen versprochen, das Resultat seinerzeit bekannt zu geben.

Nachdem mir nun die h. o. Entscheidung zugekommen ist, beeile ich mich, dieselbe den Herren Kollegen zur Kenntnis zu bringen.

Finanz-Ministerium 12.946. Wien, am 22. März 1904.

An die k. k. Finanz-Landes-Direktion Prag.

». . In Erledigung des Berichtes . . . . . betreffend die Vorlage des vom Evidenzhaltungsgeometer Scharf in Leitmeritz konstruierten Maßstablineales zur Ermittelung des Papiereinganges, wird der k. k. Direktion im Anschlusse eine Äußerung des Triangulierungs- und Kalkulbureaus auszugsweise mitgeteilt.

Mit Rücksicht auf diese Äußerung erscheint das Scharf'sche Lineal zur obligatorischen Einführung bei der Evidenzhaltung des Grundsteuerkatasters nicht geeignet, wohl aber bleibt es den Funktionären derselben unbenommen, sich bei Bestimmung des Papiereinganges der Katastermappen des Scharf'schen Lineals zu bedienen.

Die vom Geometer Scharf angesuchte Bewilligung zum Nachdruck der mit dem Erlasse vom 8. Juli 1901, Zahl 23.583 herausgegebenen Tabelle zur Berechnung des Blatteinganges wird dem Geometer hiemit erteilt.«

Leider wurden mir die Gründe, warum das Lineal zur obligatorischen Einführung nicht geeignet ist, nicht mitgeteilt, so daß ich nur auf Vermutungen angewiesen bin, für die Brauchbarkeit spricht die Entscheidung dennoch, da es ganz ausdrücklich gestattet wurde, sich des Lineales zu bedienen, was wohl nicht geschehen wäre, wenn durch das Lineal der Blatteingang nicht genau bestimmt werden könnte.

Ich habe das Lineal auf ein Jahr in Verwendung gehabt und habe viel Zeit durch dasselbe erspart, da die Ermittlung höchst einfach ist und sowohl bei ganzen, als auch $^1/_2$ und $^1/_4$ Blättern durch zwei Handgriffe und Ablesungen erfolgen kann.

Das Lineal ist nur für den Maßstab 1:2880, respektive Verjüngungen desselben brauchbar, nicht jedoch für Neuaufnahmen im Maße 1:2500, respektive 1:1250.

Die Firma Neuhöfer & Sohn hat sich bereit erklärt, die Erzeugung dieser Lineale zu übernehmen und liefert dieselben zum Preise von neun Kronen samt der Tabelle.

Vereinsnachrichten.

Der Ackerbauminister hat den Inspektor für agrarische Operationen, Forstmeister Franz Riebel zum Forstrate ernannt und gleichzeitig zum technischen Konsulenten der Ministerial-Kommission für agrarische Operationen bestellt.

Diese Bestellung ist eine wohlverdiente Anerkennung des jahrelangen, rastlosen, erfolgreichen Wirkens des Herrn Forstrates bei den agrarischen Operationen in Niederösterreich und hoffen wir, daß derselbe auf diesem wichtigen Posten nach wie vor das Interesse, welches er unserem Vereine und dessen Bestrebungen entgegenbrachte, bewahren, und stets auf ein gemeinsames, den Bedürfnissen des Katasters möglichst Rechnung tragendes Arbeiten, hinwirken wird.

An Spenden für das Vega-Denkmal sind der Vereinsleitung vom Herrn Hofrate A. Broch 10 K, Herrn Obergeometer R. Kučzamann 2 K übermittelt und dem Komité in Laibach zugeschickt worden; eventuelle weitere Spenden wären direkt diesem Komité einzusenden.

Kleine Mitteilungen.

Fahrpreisbegünstigungen für Staats- und Hofbedienstete. Die k. k priv. Kaschau—Oderberger Eisenbahn, k. k. priv. Stauding—Stramberger Lokalbahn, Salzburger Eisenbahn- und Tramway-Gesellschaft und die erste k. k. priv. Donau-Dampfschiffahrts-Gesellschaft sind dem Verbande betreffend Fahrbegünstigung für aktive k. k., beziehungsweise k. und k. Staats- und Hofbedienstete beigetreten und gewähren auf Grund der im Sinne des Reglements vom 1. März 1903 mit fünfjähriger Gültigkeit für die Linien der k. k. österreichischen Staatsbahnen ausgegebenen Legitimationen für k. k., beziehungsweise k. und k. Staats- und Hofbedienstete rücksichtlich der ihren Verwaltungen unterstehenden, auf österreichischem Gebiete gelegenen Linien eine Fahrpreisermäßigung, deren Ausmaß in den zu den erwähnten Legitimationen aufgelegten Einlageblättern ersichtlich ist.

Inventarisierung Kunst- und historischer Denkmale. Der niederösterreichische Landesausschuss hat unter Zahl 991 am 31. Mai l. J. nachstehenden Erlaß hinausgegeben:

»Mit Zuschrift de praes 30. Mai l. J. hat die k. k. Zentralkommission für Kunst- und historische Denkmale in Wien anher mitgeteilt, daß eine probeweise Inventarisierung des politischen Bezirkes Krems in Aussicht genommen ist.

Diese Inventarisierung soll sich auf alle im öffentlich-rechtlichen (d. h. kirchlichen, staatlichen oder autonomen) Besitze stehenden Denkmale, gleichviel ob beweglich oder unbeweglich, erstrecken.

Dieser Bezirk wurde gewählt, da er einerseits zahlreich zerstreute Ortschaften, andererseits eine grössere Stadt (Krems) von ganz wesentlicher kunsthistorischer Bedeutung und ein an Denkmalen reiches Stift (Göttweig) besitzt, so daß die verschiedenen Arten der Inventarisierung genau studiert werden können.

Selbstverständlich sollen die hiebei gewonnenen Resultate nur dem angestrebten Zwecke dienen. Es werden daher einerseits von den Inventarisatoren beobachteten Mängel in der Aufbewahrung der Denkmale nicht den Anlaß zu Rekriminationen seitens der Zentralkommission geben, und andererseits muß es als ausgeschlossen gelten, daß diese Inventare von anderen staatlichen Organen, namentlich von den Steuerbehörden für ihre Zwecke benützt werden dürfen.

Mit der Leitung der Arbeiten wurde der Generalkonservator, Univ.-Prof. Dr. Riegl und der Ministerial-Vizesekretär im Ministerium für Kultus und Unterricht, Dr. Maximilian Bauer betraut. Die Genannten werden in der ersten Hälfte Juni l. J. die Inventarisierung der Orte Mautern, Loiben und Dürnstein selbst durchführen, um den Inventarisatoren ein instruktives Vorbild für ihre Arbeiten zu geben. Die weitere Inventarisierung, welche von Herrn Dr. Riegl und Bauer nur beaufsichtigt und kontrolliert werden wird, wird den Kunsthistorikern Dr. Emil Tietze und Dr. Dietz anvertraut werden.

Dr. Tietze und Dr. Dietz werden ihre Arbeiten um die Mitte des Monates Juli beginnen und hoffen, die Inventarisierung binnen längstens drei Monaten, also um die Mitte Oktober vollendet zu haben.

Hievon wird der Gemeindevorstand mit dem Ersuchen in Kenntnis gesetzt, den mit der Durchführung dieser Inventarisierung betrauten Herren bei Vornahme ihrer Arbeiten die größtmöglichste Unterstützung zuteil werden zu lassen, insbesondere denselben die Einsicht in die Gemeinde-Inventare, sowie die Besichtigung der einzelnen Objekte, im Gemeindebesitze die Archive inbegriffen, soweit sie die Inventarisatoren für notwendig halten, zu ermöglichen.

Gleichzeitig wird der Gemeindevorstand ersucht, dahin zu wirken, daß für den Fall der Abwesenheit einzelner Gemeindevorsteher immer jemand im Orte vorhanden und im Bürgermeisteramte zu erfragen sei, welcher den obgenannten Herren die gewünschten Auskünfte geben kann.«

Personalien.

Pensionierung. Der k. k. Obergeometer Anton Lugnani in Rovereto.

Standortsverlegung. Der Standort des Geometers für den Vermessungsbezirk Lancut II wurde nach Lezájsk verlegt.

Brief- und Fragekasten.

Herr S in L. Ersuchen die Posterlagscheine einzusenden. Dieselben werden in nächster Nummer den Kollegen Böhmens zur direkten Begleichung der Mitgliedsbeiträge beigelegt.

Druckfehlerberichtigung.

Seite 184,	Zeile	5	von oben:	projizierte statt projektierte.
„ 184,	„	13	„ unten:	A_q statt $\mathfrak{A}_q$.
„ 185,	„	14	„ „	projizierten statt projezierten.
„ 190,	„	13	„ oben:	besonderen statt besondere.

Von unseren **Einbanddecken** zum **I. Jahrgang**

Zeitschrift für Vermessungswesen

sind noch ungefähr 40 Stück zum Preise von à 1 K abzugeben.

DIE ADMINISTRATION.

Herausgeber: Verein der österreichischen k. k. Vermessungsbeamten. — Verantwortlicher Redakteur: Max Reinisch.

Druck der Ad. della Torre'schen Buch- und Kunstdruckerei, Wien, IX.