ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN
DES
VEREINES DER ÖSTERREICHISCHEN K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Unter Mitwirkung der Herren:

Prof. J. ADAMCZIK in Prag, Obergeometer I. Kl. J. BERAN in Mödling bei Wien, Dozent, Evidenzhaltungs-Direktor E. ENGEL in Wien, Prof. Dipl. Ing. A. KLINGATSCH in Graz, Prof. DR. W. LÁSKA in Prag, Hofrat Prof. DR. F. LORBER in Wien, Prof. DR. H. LÖSCHNER in Brünn, Hofrat Prof. DR. G. v. NIESSL in Wien, Obergeometer I. Kl. M. REINISCH in Wien, Prof. DR. R. SCHUMANN in Wien,

redigiert von

Hofrat E. Doležal, o. ö. Professor an der k. k. Technischen Hochschule in Wien. und Ing. S. Wellisch, Bauinspektor des Wiener Stadtbauamtes.

Nr. 1. Wien, 1. Jänner 1915. XIII. Jahrgang.

INHALT:

Nachricht! In den nächsten Heften kommen zur Veröffentlichung Arbeiten der Herren: Dr. A. Basch, J. Beran, E. Doležal, H. Ecker, G. Grigercsik, Dr. F. Köhler, K. Linsbauer, Dr. A. Noetzli, R. Pozděna, S. Wellisch, J. Zanker.

Alle Zuschriften für die Redaktion sind ausnahmslos an Hofrat Prof. E. Doležal, Wien, k. k. Technische Hochschule, zu richten.

Sämtliche für die Administration bestimmte Zuschriften: Abonnement-Bestellung, Domizil- und Adressenänderung, Inserierung etc., sind ausnahmslos an die Druckerei Joh. Wladarz, Baden N.-Ö., Pfarrgasse 3, zu schicken.

Jahresabonnement für Mitglieder 12 Kronen, für Nichtmitglieder 15 Kronen. — Redaktionsschluß am 20. des Monates.
Oesterreichisches Postsparkassa-Konto Nr. 24.175. (Clearing.)

Wien 1915.

Herausgeber und Verleger: Verein der österr. k. k. Vermessungsbeamten.

Druck von Johann Wladarz, Baden.

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 1. **Wien, 1. Jänner 1915.** **XIII. Jahrgang.**

Zur Jahreswende 1915.

In sturmbewegte Zeit fällt diesmal die Jahreswende. Ein Kampf von unerhörten Verhältnissen durchtobt die Kulturstaaten Europas und entsendet seine Wellen bis in die fernsten Kontinente.

Hunderte unserer Berufsgenossen mußten dem Rufe des Vaterlandes folgen, um die heimische Scholle gegen das tückische Bündnis des länderhungrigen Rußland, des revanchelüsternen Frankreich und des neidischen Albion zu verteidigen.

Ungeheure Opfer an Gut und Blut müssen gebracht werden, unerhörte Anforderungen an die moralische und physische Energie der Kämpfer erfordert das monatelange Ausharren in endlosen Schlachten, in weiten Landstrecken wird alles, was die menschliche Kultur in jahrelanger Arbeit mühevoll errichtet hat, in wenigen Augenblicken durch die Gewalt titanischer Zerstörungswerkzeuge vernichtet.

Alle die gewaltigen Fortschritte der Technik in den letzten Jahrzehnten dienen nur dem grauenvollen Zwecke des Krieges, der Zerstörung.

Nur eines gibt uns die Kraft, den tausendfältigen Jammer zu ertragen, der uns jetzt überall entgegentritt: Das starke Bewußtsein, daß aus dem Chaos, in das die Kulturwiege der Menschheit zu versinken droht, ein dauernder, festgefügter Friede erstehen wird, in dem die Fortschritte der Technik nicht mehr zur Zerstörung, sondern zum Aufbau, nicht mehr dem Kampfe der Nationen untereinander, sondern ihrer Verbrüderung dienen werden.

Doležal.

Über die Anwendung der Theorie vom Massenausgleich (Isostasie).

(Zweiter Bericht.)*)

Den Lesern dieser Zeitschrift habe ich im 9. Bande über die im Titel genannte Materie einen ersten Bericht gegeben; von den drei dort besprochenen Werken der Nordamerikanischen Coast and Geodetic Survey bezogen sich zwei auf den Einfluß des Massenausgleichs auf Messungen der Richtung, eines von geringerer Ausdehnung auf solche der Intensität der Schwerkraft. Das genannte rührige Institut hat inzwischen zwei Werke erscheinen lassen, betitelt:

1. The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity; by John F. Hayford and William Bowie, O. H. Tittmann superintendent. Special Publication No. 10, 132 Seiten, 5 Tafeln, Washington 1912.

2. Effect of Topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity (second paper); by William Bowie. Special Publication No. 12, 28 Seiten, 5 Tafeln, Washington 1912.

Herr Bowie hatte die Güte, mir folgende Arbeit zu übersenden:

3. Relationship between terrestrial gravity and observed Earthmovements of Eastern America, by Joseph William Winthorp Spencer. The American Journal of Science. 4. Reihe, Band 35, Nr. 210, 13 Seiten, Juni 1913.

Im folgenden sollen einige Angaben über den reichen Inhalt dieser drei Arbeiten gemacht werden; dabei soll auch auf ältere einschlägige Werke der Herren Helmert, Hecker und Suess eingegangen werden sowie auf die Beziehungen zwischen Geologie und Geodäsie. —

In 1. wird nochmals im Einzelnen dargelegt, wie die angestellten Schwerebeobachtungen im Sinne Pratt's (s. erster Bericht) reduziert worden sind, nämlich so,

daß die Kontinentalmassen oberhalb des Meeresniveaus kompensiert sind durch Massendefekt (d. i. ein wenig verringerte Dichtigkeit) unterhalb und

daß auf der See die geringere Dichte des Meerwassers kompensiert ist durch etwas größere als normale Dichte unterhalb des Meeresbodens.

Dabei wird als Tiefe, bis zu der die hypothetische kompensierende Dichtigkeitsänderung sich erstreckt, auch hier angenommen rund 114 *km*, welche Zahl aus den Lotabweichungs-Messungen der früheren Veröffentlichungen durch eine Ausgleichung von 765 astronomischen Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt worden war. Es wurde also, wenigstens vorläufig, davon abgesehen, diese sogenannte Ausgleichs-Tiefe auch aus den Schweremessungen gesondert abzuleiten, einfach weil deren Zahl noch nicht groß genug ist; für 1. lagen 89 amerikanische und 16 ausländische, für 2. 124 amerikanische Schwerestationen vor.**)

---

*) Erster Bericht: Diese Zeitschrift, Jahrgang 1911, S. 323–331.

**) Zum Vergleiche sei aufgeführt, daß Österreich-Ungarn, dank dem klassischen Pendelapparat v. Sterneck's, weit über 500 Schwerestationen und, dank der genialen Schwerewage des Herrn v. Eötvös, mehrere Hundert von Schwerewagen-Stationen besitzt. Die Anzahl aller gesicherten Schwerewerte auf der ganzen Erde beträgt zur Zeit etwa 3000.

Wie bei einer Lotabweichungsstation wird auch die Umgebung einer Schwerestation durch konzentrische Kreise in Zylinder zerlegt, deren Mäntel werden nach unten bis rund 114 *km* Tiefe verlängert; die Zerlegung erstreckt sich über die ganze Erde.

Mit Hilfe der bekannten Formel für Anziehung eines vertikalen Zylinders werden die Vertikalkomponenten der beiden einander kompensierenden prismatischen Massen berechnet. Durch geeignete Wahl der Größe der Radien und ihrer Azimute, durch zweckmäßige Schablonen bei der Bestimmung der durchschnittlichen Meereshöhen aus Isohypsenkarten wurde die Rechenarbeit auf das geringste Maß gebracht.

Um in absehbarer Zeit diese nicht geringe Rechenarbeit zu Ende zu führen, wurde verschiedentlich auf die Strenge der Reduktion verzichtet; so wurde die Zylinderattraktion weiter beibehalten, obgleich Kegelattraktion vorliegt. Wie man aus der Figur 1 erkennt, überlagern sich (links) die Zylinderelemente; da über große Gebiete der Erdoberfläche summiert wird, so ist eine Schätzung dieses Einflußes erwünscht. Der positive Erfolg der Hayford'schen Reduktion wird dadurch schwerlich vermindert werden, immerhin würde der Anlaß zu einem Zweifel vermieden.

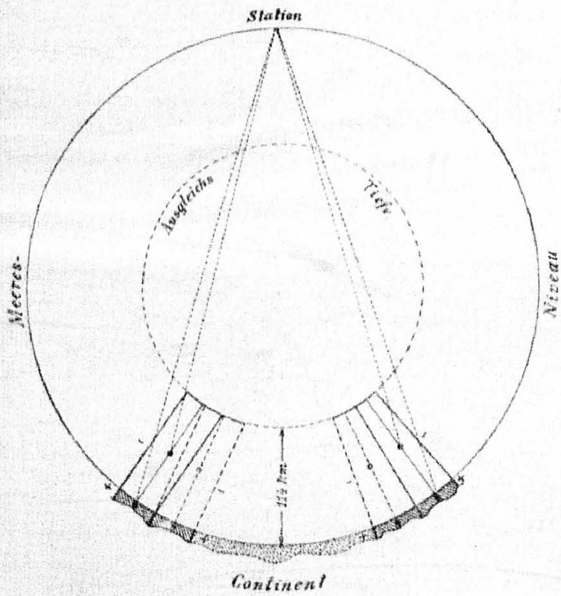

Fig. 1.

Ferner beginnt die Einteilung in Ringe in der nächsten Umgebung der Station schon mit Radien von Bruchteilen des Meters an aufwärts in wachsenden Sprüngen, bis zu mehreren 1000 *km*; auch da wird schon Kompensation angenommen. Nach den Ergebnissen neuerer Forschungen wird aber erst bei Prismen von (300 *km*)^2 die Isostasie als wirksam angesehen.

Die Formeln für die Störungen der Intensität der Schwerkraft sind im allgemeinen etwas komplizierter als die für die beiden Richtungskomponenten im Horizont (s. I. Bericht, S. 6, Z. 6 v. u.) Die Berechnung wurde mit Hilfe ausgedehnter Tabellen erleichtert, die sich der Gestaltung der Erdoberfläche anpaßten.

Zur Zeit werden unter Helmert's Leitung verfeinerte Methoden für isostatische Reduktion ausgearbeitet; es sei hier auf den Helmert'schen Artikel VI 1, 7 der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften: «Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde» verwiesen.*)

Die Zahl 114 *km* für die Ausgleichstiefe ist ihrem Charakter nach eine Rechengröße bis zu einem gewissen Grade; sie darf schon wesentlich geändert werden, ohne daß der Erfolg der Hayford'schen Reduktion in Frage gestellt werden kann, zudem ist sie ein Durchschnittsbetrag. Zur Entscheidung bei ihrer Festsetzung diente allein die Größe der Quadratsumme der übrig bleibenden Lotabweichungen; wie schon im ersten Bericht angegeben, blieben bei den drei

Ausgleichstiefen:	162·2	120·1	113·7 *km*
übrig die Quadratsummen	8220	8020	8013;

ihre Unterschiede sind verhältnißmäßig sehr klein.

Es hat sich gezeigt, daß gewisse Beiträge zur Attraktion, namentlich solche aus Massen in größerem Abstande von der Station, für benachbarte Stationen nahe gleich groß ausfallen; für eine Anzahl eingeschalteter Stationen konnte daher die isostatische Anziehung einfach durch Interpolation aus den nächstliegenden direkt gerechneten ermittelt werden.

Weiter bringt das unter 1. genannte Werk gründliche Untersuchungen über eine Anzahl von störenden Einflüssen, Veränderungen der Methode usw., auf die hier nicht einzeln eingegangen werden kann; die geodätischen Resultate der unter 2. genannten Abhandlung haben 1. gegenüber das größere Gewicht, des größeren Beobachtungsmateriales wegen. Auf die geologischen Folgerungen wird bei Besprechung der Abhandlung 3. kurz eingegangen werden.

Zum Vergleich zwischen theoretischer Schwere g_c und beobachteter Schwere g dienten die Formeln und Bezeichnungen:

$$g_c = \gamma_0 + (H) + (\text{Top.} + \text{Comp.}),$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi & \text{die Polhöhe} \\ R & \text{den Erdradius} \\ h & \text{die Meereshöhe in } m \end{array}\right\} \text{der Station,}$$

$$\gamma_0 = 978\cdot030\,cm\;(1 + 0\cdot005302 \sin^2\varphi - 0\cdot000007 \sin^2 2\varphi)$$

ist die normale oder ellipsoidische Schwere nach Helmerts Rechnung vom Jahre 1901 im Potsdamer System,

$$(H) = -\frac{2h \cdot g}{R} = -0\cdot0003086 \cdot h$$

ist die Reduktion in freier Luft,

---

*) Vergleiche auch die auf Helmert's Anregung hin entstandenen Arbeiten:

Beitrag zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung, von Erich Hübner. Gerlands Beiträge zur Geophysik. 12. Band, 4. Heft, Seite 588—638, Leipzig 1913.

Die Schwerkraft auf dem Meere und die Hypothese von Pratt; von Landmesser Hermann Wolff. Berlin 1913. Dissertation, 117 Seiten.

Nach Abgabe dieses Berichtes an die Redaktion erschien: Die isostatische Reduktion der Lotrichtungen, von F. R. Helmert. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914, XIV, S. 440—453.

(Top. + Comp.) ist die isostatische Reduktion nach Pratt-Hayford, also die Summe der beiden Anziehungen aus topographischer und kompensierender Masse.

Die 124 Werte $g - g_e$, γ_0, (H), (Top. + Comp.) findet man auf Seite 9 und 10 zusammengestellt; es seien hier nur die Amplituden der Schwankungen gegeben, innerhalb deren sich die hier interessierenden Größen bewegen:

g von	978·954 *cm*	bis 980·917 *cm*	1·963 *cm* Ampl.
γ_0 »	978·922 (für $\varphi = 24·6^0$)	» 980·974 (für $\varphi = 49·0^0$)	2·052 »
(H) von	0·000 (für $h = 1$ *m*)	— 1·325 (für $h = 4293$ *m*)	1·325 »
(Top. + Comp.) .	— 0·096	+ 0·187	0·283 »

Entscheidend sind die Abweichungen: beob. minus berechnete Schwere; es schwanken die Reste $g - g_e$ nach:

				Ampl.
Pratt-Hayford	zwischen	— 0·085 *cm*	und + 0·067 *cm*	0·152 *cm*
Bouguer	»	— 0·229	» + 0·057	0·286
Freiluft	»	— 0·105	» + 0·216	0·321

Schon hier erscheint der Schwerpunkt der Bouguer-Werte nach dem Negativen, jener der Freiluft-Werte nach dem Positiven verschoben, während die Pratt-Hayford-Werte, auch schon der Amplitude nach, im Vorteil erscheinen.

Sodann vergleicht Herr Bowie gründlich die Vorzeichen der Reste in verschiedener Hinsicht:

Abstand der Station von der 1000 Faden-Linie,
» » » vom Kontinentalrande,
» » » von der Meeresküste,
» » » vom Meeresniveau (h),

wobei in den vier Gruppen wieder Unterabteilungen gemacht werden. Ohne Ausnahme sind die Durchschnitts-Reste nach der Pratt-Hayford-Methode am kleinsten und frei von systematischen Gängen. Sicher tritt hervor, daß nach der Bouguer-Reduktion ein Gang nach der Meereshöhe übrig bleibt, der dem Sinne nach entgegengesetzt verläuft wie die Reduktion selbst; hingegen läßt die Freiluft-Reduktion keinen solchen Gang übrig. Dieses Resultat aus den 124 nordamerikanischen Messungen bestätigt eine Untersuchung v. Sterneck's*) aus dem Jahre 1897, die sich auf 508 Schwerestationen der Österreichisch-Ungarischen Monarchie, in Meereshöhen bis zu 1500 *m*, bezieht.

Aus Tafel 2, 3, 4 der Abhandlung 2. erkennt man bequem, auf welche Flächen sich die positiven und negativen Vorzeichen erstrecken; nach diesen Karten gleicher Schwereanomalie ergibt sich, daß das Gebiet der U. S. A. folgendermaßen eingeteilt wird:

		Schwere-Ueberschuß	-Defekt
nach der Bouguer-	Reduktion	15%	85%
» » Freiluft-	Reduktion	75	25
» » Pratt-Hayford-	Reduktion	45	55

*) Mitteilungen des k. u. k. Militär-Geographischen Institutes, Band 17, 1897, Seite 108—9; die Reduktion nach Bouguer, also die alleinige Berücksichtigung der Massen über dem Meeresniveau, wird hier von Sterneck, als gewiß nicht den Beobachtungen entsprechend, verworfen.

Legt man die nach der Helmert'schen Formel berechnete Schwere als «normal» zu grunde, so läßt sich dies Verhalten etwa folgendermaßen deuten:

durch die Bouguer'sche Reduktion wird die Anziehung allein der Massen über dem Meereshorizont hinweggerechnet, die Anziehung der übrig bleibenden Masse ist relativ zu klein;

bei der Freiluft-Reduktion überwiegt doch noch infolge der Lage der Station die (positive) Anziehung der Massen über dem Meereshorizont relativ gegen die (im allgemeinen negative) Anziehung der etwas entfernteren tieferen Massen;

die Pratt-Hayford-Reduktion trägt der Verschiedenheit der Abstände der beiden kompensierenden Massen vom Lot oder Pendel im allgemeinen Rechnung.

Eine Kompensation der Vorzeichen übrig bleibender Fehler wäre nicht auffällig, wenn die 124 Beobachtungen einer numerischen Ausgleichung unterzogen worden wären; dies ist hier nicht der Fall, es wurde vielmehr dieser aus der Ausgleichung von Lotabweichungen (also von Richtungsbeobachtungen) erhaltene Wert der Ausgleichstiefe: 114 *km* ohne weiteres übernommen zur Reduktion der Schweremessungen (also für Intensitätsbeobachtungen).

Die Verteilung der Reste nach der Größe erkennt man aus folgendem Täfelchen (nach Seite 13 der Abhandlung 2):

Zwischen den Grenzen			liegen an Resten nach der Methode Bouguer:	Freiluft:	Pratt-Hayford:
0·200 *cm*	und	0·300 *cm*	5	1	0
0·100	»	0·200	28	5	0
0·090	»	0·100	2	1	2
0·080	»	0·090	3	0	0
0·070	»	0·080	2	0	0
0·060	»	0·070	1	6	0
0·050	»	0·060	3	8	5
0·040	»	0·050	12	12	4
0·030	»	0·040	17	13	12
0·020	»	0·030	14	20	32
0·010	»	0·020	19	17	34
0·000	»	0·010	18	41	35

Dieses Verhalten spricht wieder zu gunsten der Hayford'schen Reduktion; Herr Bowie erklärt diese nach ihr noch übrig bleibenden Reste aus der Unkenntnis der genauen Gesteinsdichten und schließt, daß die Massenkompensation innerhalb eines Spielraumes von $\pm 25\%$ erfüllt sei. Abgesehen von den Vernachlässigungen in den angewendeten Formeln, darf man wohl noch zusetzen, daß unsere noch mangelhafte Kenntnis über den wahren geologischen Grund dieser aus den geodätisch-astronomischen Beobachtungen folgenden Kompensations-Erscheinungen auch zur Größe dieser Reste beitrage.

Aus den Lotabweichungen in Breite, Länge und Azimut hatte Herr Bowie in früheren Jahren abgeleitet, daß in 16 bestimmt abgegrenzten, aufgezeichneten Gebieten positive oder negative Attraktionszentren liegen mußten. Diese Vorhersage wurde mit Hilfe der Messungen auf den später ad hoc angelegten Schwerestationen geprüft; Herr Bowie fand in jedem Falle Uebereinstimmung mit den Schwereanomalien nach Pratt-Hayford.

Endlich hat Herr Bowie aus diesen 124 Schwerebeobachtungen einen Wert der Abplattung α abgeleitet; das ganze Gebiet wurde in Zonen von je 4° Breite geteilt, die darin liegenden Anomalien gemittelt und die Mittel nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen. Die Ergebnisse sind (S. 26):

	nach der Bouguer-	Freiluft-	Pratt-Hayford-Methode
$1 : \alpha =$	280·7	292·1	298·4
	±7·2	±1·7	±1·5

Die beiden ersten Werte sind unwahrscheinlich, der letze stimmt mit den besten seither bekannten innerhalb der mittleren Fehler; dabei ergaben

62 Werte in der Ost-Hälfte der U. S. A. $1 : \alpha = 297·8 \pm 1·8$,
52 » » » West- » » » $299·6 \pm 1·9$.

Die 10 Werte in Alaska sind hierbei nicht benutzt.

An Stelle der Konstanten 978·030 *cm* in Helmerts Formel wurde erhalten 978·038 ± 0·006, mithin eine ganz unbedeutende Änderung; zu einer endgiltigen Entscheidung wäre erforderlich, das Gebiet der U. S. A. bei weitem dichter und gleichmäßiger mit Schwerestationen zu bedecken.

Interessant wäre ein späterer Vergleich der Isanomalien. Jedenfalls aber schließt sich das spezielle Schwerkraftsystem der U. S. A. dem durch die Helmert'sche Formel repräsentierten, weit allgemeineren Systeme sehr gut an. —

Bevor auf Abhandlung 3. eingegangen wird, seien einige weitere, teilweise überleitende Betrachtungen gestattet.

Während im ganzen und großen die in Pratt'schem Sinne reduzierten Schwerewerte im Innern der Kontinente und auf den großen Ozeanen normales Verhalten gegenüber der Normalformel zeigen, verläuft entlang der Küste auf der Landseite ein etwa 100 oder 200 *km* breiter Streifen mit einer Schwere, die um etwa 0·03 *cm* bis 0·04 *cm* zu groß ist; als Gegenstück hierzu verläuft nach den Messungen Nansen's und namentlich Hecker's ein entsprechender Streifen entlang der Küste auf der Seeseite mit einer um ebensoviel zu kleinen Schwerkraft. Diese Naturerscheinung ist von Helmert und Schiötz als mit Isostasie verträglich erkannt worden und es ist plausibel, daß künftig diejenigen Schweremessungen, die nahe der Küste oder auch nahe den Rändern großer kontinentaler oder submariner Plateaus gemacht werden, entsprechend reduziert werden müssen, da sie offenbar systematisch beeinflußt sind; nötig wird dabei Anpassung an die spezielle oder veränderliche Küstenform. Herr Helmert*) hat für folgenden schematischen Küstenquerschnitt:

*) Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der Pratt'schen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten. Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. XLVIII, S. 1192—1198, vom Jahre 1909.

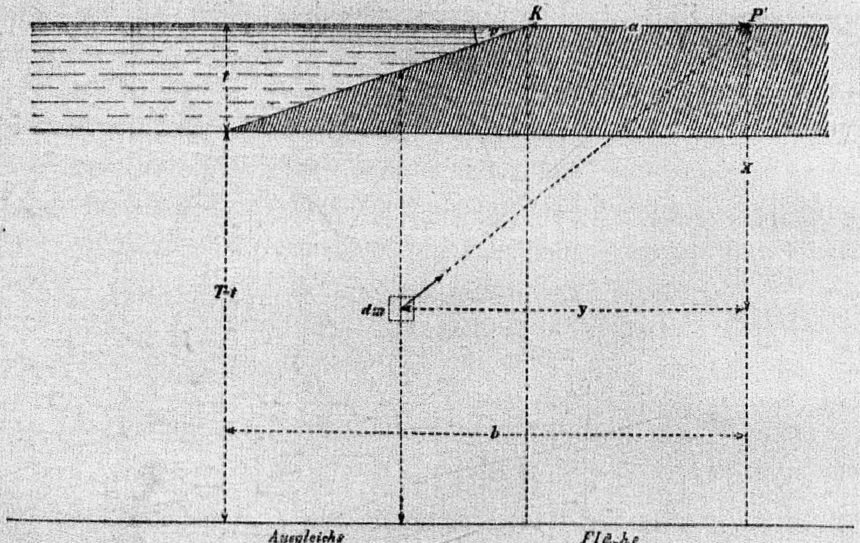

Fig. 2.

die Attraktionsrechnungen durchgeführt; dabei ist:

t eine durchschnittliche Meerestiefe (4000 m),

T die Tiefe der Ausgleichsfläche unter der Meeresfläche,

a Abstand der Schwerestation P' von der Küste K, $+$ land-, $-$ seewärts,

v der Böschungswinkel des Kontinentalabhanges,

$b = a + t \,.\, \mathrm{ctg}\, v$,

y und x Koordinaten eines auf P' wirkenden Massenelementes dm,

ϑ mittlere Gesteinsdichte auf dem Kontinent (2·73),

$\Delta\vartheta = 2{\cdot}73 - 1{\cdot}03 = 1{\cdot}7$ der Dichtigkeitsüberschuß für Kontinent und Abhang (für die folgende numerische Rechnung wurde 1·8 verwendet),

ϑ_m mittlere Erddichte (5·52).

Da es sich um Schwereänderungen auf einer verhältnismäßig kleinen Strecke handelt, kann von der Erdkrümmung abgesehen werden. Als normal wird angesehen: ein die Erdoberfläche bedeckender Ozean von 4000 m Tiefe; die Kontinente stellen somit Zusatzmassen von der Dichtigkeit $2{\cdot}73 - 1{\cdot}03 = 1{\cdot}7$ dar. Von der durchschnittlichen Höhe des Kontinents über dem Meeresspiegel wird ebenfalls abgesehen. Die Kompensation im Sinne Pratt's soll nun folgendermaßen statthaben: die Zusatzmassen sollen durch entsprechende geringere Dichtigkeit der darunterliegenden Masse bis zur Tiefe T kompensiert sein. Die Dichtigkeitsverminderung ist demnach unter dem Kontinent konstant; sie ist, wie leicht zu sehen, gleich $\Delta\vartheta \,.\, \frac{t}{T-t}$, für $T = 120\,km$ gleich 0·06, also im Verhältnis zu den Schwankungen der Gesteinsdichten eine sehr kleine Größe. Unter dem Abhange ist der Dichtigkeitsdefekt veränderlich.

Für die Schwerestörung δg im Punkte P' hat Herr Helmert folgende Formel*) gefunden:

*) A. a. O. S. 1195 ist für δg noch eine zweite, etwas kürzere Form gegeben.

Der Ausdruck in der Klammer ( ) der 4. Zeile obiger Formel läßt sich noch etwas vereinfachen; sie erscheint bei den vorliegenden Zahlenwerten von a, b, t und v als Differenz zweier nahe

$$\delta g = \frac{f \Delta\vartheta . t}{T - t} \left[\begin{array}{l} 2\,T \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{t} - \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{T}\right) \\ + \frac{\operatorname{tg} \nu}{2t} \left\{ T^2 \lg \frac{T^2 + b^2}{T^2 + a^2} - b^2 \lg \frac{T^2 + b^2}{t^2 + b^2} + a^2 \lg \frac{T^2 + a^2}{t^2 + a^2} - t^2 \lg \frac{t^2 + b^2}{t^2 + a^2} \right\} \\ - \frac{2a \operatorname{tg} \nu}{t} \left\{ T \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{T} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{T}\right) - t \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{t} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{t}\right) \right\} \\ + \frac{T - t}{t} \left\{ a \sin^2 \nu \lg \frac{t^2 + b^2}{a^2} + 2a \sin \nu \cos \nu \left(\frac{\pi}{2} - \nu - \operatorname{arc\,tg} \left[\operatorname{ctg} \nu + \frac{t}{a . \sin^2 \nu} \right] \right) \right\} \end{array} \right]$$

Der Faktor f hängt mit der Gravitationskonstanten zusammen.

Hiernach erhält man mit den Angaben

$$t = 4\,km, \begin{Bmatrix} T = 100\,km \\ T = 120 \end{Bmatrix}, \quad \operatorname{tg} \nu = 1 : 50, \quad \vartheta = 2{\cdot}83, \quad \Delta\vartheta = 1{\cdot}8$$

als Verlauf der Schwerestörung δg in cm quer zur Küste (nach Helmert-Wolff):

	a in km	T gleich 120 km	T gleich 100 km		a in km	T gleich 120 km	T gleich 100 km
		cm	cm			cm	cm
Kontinent	+1000	$\delta g =$ +·005	+·004	Ozean	— 150	$\delta g =$ —·026	—·026
	+ 400	+·012	+·010		— 190	—·049	—·043
	+ 200	+·020	+·017		— 195	—·052	—·046
	+ 150	+·023	+·020		— 200	—·053	—·047
	+ 100	+·030	+·025		— 201	—·053	—·047
	+ 50	+·039	+·034		— 205	—·052	—·047
	+ 25	+·047	+·041		— 210	—·051	—·045
	0	+·059	+·053		— 250	—·039	—·033
Ozean	— 5	+·054	+·049		— 300	—·029	—·024
	— 25	+·039	+·034		— 350	—·023	—·019
	— 50	+·024	+·021		— 400	—·019	—·016
	— 100	—·002	—·002		— 600	—·011	—·010
	— 150	—·026	—·026		—1000	—·006	—·005

Ein entsprechender Verlauf des δg dürfte stattfinden quer zu den Rändern großer kontinentaler und submariner Plateaus. —

Gegenüber den Näherungsformeln allgemeiner Art und den Tabellen, die von Herrn Hayford zur isostatischen Reduktion aufgestellt wurden, gehen die Untersuchungen der Herren Helmert und Schiötz mehr auf die spezielle Gestaltung der Erdoberfläche ein; es sind dadurch tatsächlich weitere Erfolge erreicht worden und gegen das Bestehen dieser Erfolge können die Verschiedenheit der Formeln für die verschiedenen Arbeitshypothesen, die unvermeidliche Ungenauigkeit der Messungen und die Unsicherheit in der Kenntnis der Gesteinsdichten nicht mehr als

gleicher Größen. Wenn man in dem Ausdruck: $\left[\frac{t}{a . \sin^2 \nu}\right]$ ersetzt: $\sin^2 \nu$ durch $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \nu}$ und die Gleichung beachtet: $b = a + t \operatorname{ctg} \nu$, so wird die ganze Klammer ( ) gleich $-\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{b}$; dies fällt klein aus.

ausschließende Argumente aufgeführt werden. Es ist wohl berechtigt, daß Geologen und Geodäten sich bemühen, eine allseitig einwandfreie Erklärung zu finden; Vorsicht ist nötig, sobald der Eine das Gebiet des Anderen betritt.

Eine große Zahl von Geologen hat Betrachtungen über isostatische Lagerung angestellt, z. B., um nur einige Namen zu nennen, die Herren: Chamberlin (nach Hayford und Sueß), Rühl[1]), Spencer[2]), Sueß[3]), Willis (nach Sueß); Astronomie[4]) und Geophysik[5]) befassen sich mit ihr, sogar in Schulbüchern[6]) wird der Grundbegriff aufgeführt. Im allgemeinen wird vermutet, daß die Lagerung der Massen in der Erdkruste eine Eigenschaft haben müsse, die der Pratt'schen Hypothese entspreche; dabei sind die Grundanschauungen darüber nicht wesentlich verschieden von denen Helmert's im II. Bande, S. 364—367, der «Theorien der Höheren Geodäsie», veröffentlicht 1884. Ueber ihre unmittelbare geologische Deutung, sogar über ihre Existenz besteht Zwiespalt bei den Geologen, ihre spezielle Fassung zum Zwecke der Reduktion der Beobachtung ist nicht einheitlich bei den geodätischen Forschern. Man muß noch unterscheiden:

1. Die unabweislichen Erscheinungen und Widersprüche in den Schwerebeobachtungen;

2. die Pratt'sche Hypothese;

3. ihre numerische oder formale Fassung zum Zwecke der Reduktion der Beobachtungen;

4. ihr geologisches Pendant.

Während der amerikanische Geolog J. W. Spencer in seiner noch näher zu besprechenden Arbeit unbedingt zustimmt, erklärt Herr Sueß*): I must confess myself a heretic in all regarding isostasy. Herr Sueß führt hier sowie auf S. 700 seines monumentalen Werkes: «Das Antlitz der Erde» die Gründe an, die ihn veranlassen, trotz der Rechnungen Hayford's und trotz der Messungen Hecker's auf den großen Ozeanen ‚all regarding isostasy' zu verneinen. Des Zusammenhanges wegen erscheint es erforderlich, die Hecker'schen Messungen zu skizzieren**).

(Schluß folgt).

---

[1]) Isostasie und Peneplain, von Alfred Rühl. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1911. S. 479—485.

[2]) Siehe die unter 3) eingangs genannte Abhandlung.

[3]) Das Antlitz der Erde. Bd. III. S. 694—716. 1909.

[4]) Beobachtungen des Mondes, von F. Hayn; Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 48. Jahrgang. III. Heft, 1913.

[5]) A. E. H. Love (nach dem Referat des Herrn Prey in Gerlands Beiträgen zur Geophysik, Band XIII).

[6]) Franz Noë, Elemente der Geologie. Wien 1903, S. 45.

Im übrigen verweise ich in bezug auf Literatur auf den schon im Text erwähnten Encyklopädie-Artikel Helmerts.

*) Synthesis of the Paleogeography of North America; by E. Sueß. American Journal of Science. Bd. 31, S. 101—108; 1911.

**) Vergleiche die Veröffentlichungen des Königl. Preußischen Geodätischen Institutes über: Schweremessungen auf dem Atlantischen, dem Großen und dem Indischen Ozean sowie auf dem Schwarzen Meere.

Die Verbesserungsgleichung beim trigonometrischen Einschneiden von Punkten.

Didaktische Bemerkungen.

Von E. Hammer.

Die Notiz von Werkmeister in dem mir soeben in die Hand kommenden Heft dieser Zeitschrift, 1914 (Bd. XII) S. 209—210, gibt mir Veranlassung zu folgenden Bemerkungen, die ich nicht im Sinn einer bei dem einfachen Gegenstand gewiß nicht mehr erforderlichen theoretischen, sondern im Sinn einer didaktischen Betrachtung anzusehen bitte, die auch auf die Bezeichnungen und dergl. eingehen soll.

1. Es sei vorausgesetzt, daß es sich um das Vorwärtseinschneiden des Neupunkts P handle, wobei die Koordinaten des ausgeglichenen Punkts $\overline{P}$ mit $(\overline{X}, \overline{Y})$ und die des Näherungspunkts P_0 mit (x_0, y_0) bezeichnet sein mögen. An x_0 und y_0 sind die durch die Ausgleichungsrechnung zu bestimmenden Korrektionen ξ und η anzubringen (— ich sage hier konsequent Korrektionen der Näherungswerte, nicht Verbesserungen, um die v den Messungen vorzubehalten —) um sie auf die endgiltigen Koordinaten von $\overline{P}$ zu bringen, d. h. es ist

$$\left.\begin{aligned}\overline{X} &= x_0 + \xi\\ \overline{Y} &= y_0 + \eta\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

gesetzt und anzunehmen, daß der Punkt P_0 der endgiltigen Lage $\overline{P}$ des zu bestimmenden Punkts schon sehr nahekommt, nämlich ξ und η so klein sind, daß sie im Vergleich zu den Koordinatendifferenzen und Strecken zwischen dem gesuchten Punkt und den Standpunkten der Winkelmessung als Differentiale angesehen werden dürfen.

Auf den fest gegebenen Winkelmessungsstandpunkten A, B, . . . mit den Koordinaten (x_a, y_a), (x_b, y_b) . . . sind Winkel oder Richtungen gemessen, aus denen, durch (positives oder negatives) Hinzufügen zu fest gegebenen Richtungswinkeln die «gemessenen» Richtungswinkel gebildet sind. Manchmal drücke ich im Unterricht das «fest gegeben» für A usw. durch $\underline{\underline{A}}$ usw. aus. Es bedeute ferner $(A\overline{P})$ den Richtungswinkel von A nach $\overline{P}$, $(B\overline{P})$ den von B nach $\overline{P}$ usw.; der Richtungswinkel von A nach dem Näherungspunkt P_0 ist (AP_0) usf. Diese Richtungswinkel $(A\overline{P})$, (AP_0) usf. werden, wie es der Praxis der trigonometrischen Punktbestimmung entspricht, stets im Gradmaß verstanden. Diese schöne, bequeme, leicht lesbare und jedes Mißverständnis ausschließende Jordan'sche Bezeichnungsweise $(P_1 P_2)$ für den Richtungswinkel der Geraden von P_1 nach P_2, nach der sich z. B. $(P_2 P_1) = (P_1 P_2) \pm 180^0$ von selbst versteht, ist in der trigonometrischen Praxis andern Bezeichnungen des Richtungswinkels, mit einem Buchstaben wie sonst in der Trigonometrie für Winkel üblich, z. B. α (von Azimut) oder ν (von Neigungswinkel, wie in der preußischen Katasterinstruktion) oder σ (von Südwinkel in Oesterreich) vorzuziehen. Auch diese letzte Bezeichnung hat ja Vorteile, vor allem den, daß man sich dabei α nach Wahl und Bedarf im «analytischen» Maß (arcus), als «reine Größe» im Sinn der Analysis, oder im «Gradmaß» der Winkel als benannte Zahl vorstellen kann, während der Richtungswinkel (Ab) stets nur im Gradmaß, nicht als unbenannte Zahl verstanden werden sollte.

Bezeichnet man nach dem Gebrauch der preußischen Katasterinstruktion den Richtungswinkel (AB) mit ν_A^B oder ν_a^b, so darf aus

$$\operatorname{tg} \nu_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

ohne weiteres gefolgert werden

$$\nu_a^b = \operatorname{arc\,tang} \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

wobei man sich nur ν_a^b als arcus, reine Zahl vorzustellen hat; dagegen ist aus

$$\operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

zu folgern

$$(AB) = \operatorname{arc\,tang} \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \, . \, \varrho, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

wenn

$$\varrho^0 = \frac{180^0}{\pi} \text{ oder } \varrho^g = \frac{200^g}{\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

bedeutet, je nachdem man in alter oder in neuer Teilung rechnet. Aehnlich bei Reihenentwicklungen, bei Differentiationen usf. Doch ist mathematisch kaum zu beanstanden, didaktisch sogar zu befürworten, z. B. durch $\delta\,(AP_0)''_\xi$ auszudrücken: Veränderung (in Sekunden), die an dem Richtungswinkel (AP_0) eintritt, wenn bei festgehaltenen (x_a, y_a) die Abszisse x_0 von P_0 die kleine Korrektion ξ erfährt, u. a. Die Bezeichnung ν_a^b hat für die Praxis vor allem gegen sich, daß z. B. für den Richtungswinkel der Richtung vom Punkt P_1 zum Punkt P_2, der so einfach und sicher mit $(P_1 P_2)$ bezeichnet ist, ν_1^2 aus Gründen der allgemein gebräuchlichen mathematischen Symbolik nicht angeht und der Aufbau $\nu_{P_1}^{P_2}$ zu umständlich und wenig übersichtlich ist; auch ν_{P_1, P_2} oder $\nu_{1,2}$ ist umständlich und im Druck und in der Schrift meist nicht deutlich genug. Vergl. dazu auch Hammer, Trigonometrie, 3. Aufl., 1907, S. 623/624.

2. Bei unserer im Anfang von **1.** angedeuteten Aufgabe handelt es sich bekanntlich vor allem darum, in linearer Form die Veränderung des Richtungswinkels (AP_0) anzugeben, die dieser erfährt, wenn dem Punkt P_0 mit den Koordinaten $(x_0\, y_0)$ die kleinen Verschiebungen (Korrektionen seiner Koordinaten x_0, y_0) ξ und η in der Richtung der x- und der y-Achse gegeben werden, durch die der Punkt P aus der Lage P_0 in die Lage P mit den Koordinaten $\underline{X} = x_0 + \xi$, $\underline{Y} = y_0 + \eta$ übergeht; d. h. es ist eine Gleichung von der Form

$$(A\underline{P}) = (AP_0) + \delta\,(AP_0)_\xi + \delta\,(AP_0)_\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

aufzustellen, deren zwei letzte Glieder rechter Hand in ξ und η linear sind. Schließt man die sehr einfache Benützung einer Figur aus, die den Vorzug der Anschaulichkeit, aber den Mangel des fehlenden Nachweises allgemeiner Giltigkeit der Formel hat, so ist analytisch auszugehen von der Gleichung

$$\operatorname{tang}(\underline{AP}) = \frac{Y - y_n}{\underline{X} - x_n} = \frac{y_0 + \eta - y_n}{x_0 + \xi - x_n} \quad \ldots\ldots\ldots 8)$$

Es bestehen aber drei Möglichkeiten der Herleitung von 1) aus 8), nämlich entweder für 8) zu setzen

$$(\underline{AP}) = \operatorname{arc\,tang} \frac{Y - y_n}{\underline{X} - x_n} \cdot \varrho = \operatorname{arc\,tang} \frac{y_0 + \eta - y_n}{x_0 + \xi - x_n} \cdot \varrho \quad \ldots 9)$$

oder unmittelbar von 8) auszugehen, oder endlich die Gleichung 8) zunächst zu logarithmieren, nämlich so zu schreiben:

$$\log \operatorname{tang}(\underline{AP}) = \log \frac{y_0 + \eta - y_n}{x_0 + \xi - x_n} = \log(y_0 + \eta - y_n) - \log(x_0 + \xi - x_n). \quad 10)$$

In den drei Formen 8) bis 10) dieser grundlegenden Gleichung ist zu beachten, daß $(x_0 y_0)$ und $(x_n y_n)$ fest gegebene Zahlen sind und daß (ξ, η) kleine, als Differentiale anzusehende Korrektionen sind, deren Feststellung eben der Hauptzweck der Ausgleichung ist.

Alle drei Wege müssen selbstverständlich zu demselben Ergebnis führen. Es ist aber nicht ohne Interesse, ihre Vorzüge und Nachteile gegen einander abzuwägen. Der erste Weg, von 9) aus, ist der meist benützte und insofern der natürlichste, als man bei der Ausgleichung «vermittelnder» Beobachtungen am einfachsten die mathematische Beziehung zwischen den Beobachtungen selbst, nicht Funktionen der Beobachtungen, und den Funktionen der Unbekannten zugrundlegt. Sind allgemein, unter Voraussetzung zweier unabhängiger Unbekannter X und Y, und die Beobachtungen sich auf beliebige Funktionen dieser Unbekannten beziehend, $L_1, L_2 \ldots L_n$ $(n > 2)$ die Messungsergebnisse für die Funktionen $F_1, F_2 \ldots F_n$ der zwei Unbekannten, d. h. bestehen, wenn $v_1, v_2 \ldots v_n$ die Verbesserungen bedeuten, die zum Zweck der «Ausgleichung» der L, ihrer rationellsten Verträglichmachung durch die Bedingung $[gvv] = \text{Min.}$, an diesen L anzubringen sind, die Verbesserungsgleichungen (— der Ausdruck Fehlergleichungen ist nicht gut, weil v keine Fehler sind, auch der Ausdruck «scheinbare» Fehler für die v ist nicht gut —)

$$\left.\begin{aligned} L_1 + v_1 &= F_1(XY) \\ L_2 + v_2 &= F_2(XY) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ L_n + v_n &= F_n(XY) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 11)$$

und wird, um diese Gleichungen linear machen zu können,

$$\left.\begin{aligned} X &= x_0 + \xi \\ Y &= y_0 + \eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12)$$

gesetzt, mit den bereits angegebenen Voraussetzungen über ξ und η, so gibt der Taylor'sche Satz, wenn κ der Reihe nach jeden der Indizes $1, 2, \ldots n$ bedeutet, für die Verbesserungsgleichungen die Form:

$$L_\kappa + v_\kappa = F_\kappa(XY) = F_\kappa(x_0 y_0) + \xi \cdot \left.\frac{\partial F_\kappa(XY)}{\partial X}\right|_{\substack{X = x_0 \\ Y = y_0}} + \eta \cdot \left.\frac{\partial F_\kappa(XY)}{\partial Y}\right|_{\substack{X = x_0 \\ Y = y_0}} \quad \ldots 13)$$

oder mit bekannten Abkürzungen:

$$v'_\kappa = a_\kappa \,.\, \xi + b_\kappa \,.\, \eta + l_\kappa \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

Die Koeffizienten a_κ, b_κ sind die Werte der partiellen Differentialquotienten nach der 1. und nach der 2. «Veränderlichen», l_κ ist der Wert, den man erhält, wenn von dem Betrag $F_\kappa(x_0 y_0)$, den die Funktion F_κ mit Einsetzung der Näherungswerte $x_0 y_0$ annimmt und der offenbar mit der Schärfe zu berechnen ist, die der Schärfe der Messungen entspricht, der Messungsbetrag L_κ abgezogen wird.

Alles das ist bekannt und in den Lehrbüchern zu finden; nur wird dort der Zusatz $X = x_0$, $Y = y_0$ in den zwei letzten Gliedern rechts in der Gleichung 13) weggelassen, er ist aber, zumal für den Anfänger, wichtig, denn er besagt: die numerischen Werte der Differentialquotienten dürfen mit Hilfe der Näherungswerte der Unbekannten berechnet werden.

Mit Rücksicht darauf wird nun in unserem Fall für die Differentialquotienten in der Gleichung 9) erhalten, wenn absichtlich alle einzelnen Faktoren bei der Differentiation angeschrieben werden und vorläufig der konstante Faktor ϱ wegbleibt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \operatorname{arc\,tg} \dfrac{Y-y_a}{X-x_a}}{\partial X}\Bigg|_{\substack{Y=y_0\\ X=x_0}} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y_0-y_a}{x_0-x_a}\right)^2} \,.\, -1 \,.\, \frac{1}{(x_0-x_a)^2} \,.\, (y_0-y_a) = -\frac{y_0-y_a}{(x_0-x_a)^2+(y_0-y_a)^2}\\
\frac{\partial \operatorname{arc\,tg} \dfrac{Y-y_a}{X-x_a}}{\partial Y}\Bigg|_{\substack{Y=y_0\\ X=x_0}} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y_0-y_a}{x_0-x_a}\right)^2} \,.\, 1 \,.\, \frac{1}{x_0-x_a} \qquad = +\frac{x_0-x_a}{(x_0-x_a)^2+(y_0-y_a)^2}
\end{aligned}\right\} 15)$$

Die nach dem ersten Anschreiben der Differentialquotienten sich anscheinend ergebende nicht symmetrische Form beider verschwindet also sofort wieder, sobald sie nur auf gleiche Benennung gebracht werden. Beachtet man, daß im Nenner der letzten Form rechter Hand von 15) das Quadrat der Entfernung der Punkte A und P_0 steht, so wird also, wenn diese Entfernung mit s_a bezeichnet wird

$$\frac{\partial \operatorname{arc\,tang} \ldots}{\partial X}\Bigg|_{\ldots}^{\ldots} = -\frac{y_0-y_a}{s_a^{\,2}}; \qquad \frac{\partial \operatorname{arc\,tang} \ldots}{\partial Y}\Bigg|_{\ldots}^{\ldots} = +\frac{x_0-x_a}{s_a^{\,2}}, \quad . \; . \; 16)$$

wobei diesen Werten noch mit Rücksicht auf

$$s_a \,.\, \cos(AP_0) = x_0 - x_a; \qquad s_a \,.\, \sin(AP_0) = y_0 - y_a \; . \; . \; . \; 17)$$

die bekannten andern Formen gegeben werden können, insbesondere die meist benützte

$$-\frac{\sin(AP_0)}{s_a}, \qquad +\frac{\cos(AP_0)}{s_a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 18)$$

Es wird also, da ferner

$$(AP_0) = \operatorname{arc\,tang} \frac{y_0-y_a}{x_0-x_a} \,.\, \varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 19)$$

ist, aus der Gleichung 9) gemäß 13) und nach Einsetzen von 19) und 18):

$$(A\underline{P}) = (AP_0) - \xi \,.\, \frac{\sin(AP_0)}{s_a} \,.\, \varrho'' + \eta \,.\, \frac{\cos(AP_0)}{s_a} \,.\, \varrho'' . \; . \; . \; 20)$$

Bezeichnen demnach endlich $(AP)_{\text{gemess.}}$ den «beobachteten» Richtungswinkel (AP), vergl. den Eingang von **1**., und v_a die zu seiner «Ausgleichung» erforderliche Verbesserung, so daß also

$$(\underline{AP}) = (AP)_{\text{gemess.}} + v_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21)$$

ist, so erhält man die «Verbesserungsgleichung» in der bekannten Form, wobei rechts ξ, η und s_a im gleichen Maß zu nehmen und alle Glieder in $''$ ausgedrückt sind:

$$v_a'' = -\frac{\sin(AP_0)}{s_a}\varrho''\cdot\xi + \frac{\cos(AP_0)}{s_a}\varrho''\cdot\eta + [(AP_0) - (AP)_{\text{gemess.}}]'' \quad .\ .\ 22)$$

3. Gegen diese meist gewählte und auf wenigen Zeilen ausführlich zu gebende Herleitung der Gleichung 22) ist kaum etwas einzuwenden in Beziehung auf Einfachheit und Durchsichtigkeit auch für den Anfänger. Auch ist wichtig der unmittelbare Zusammenhang mit den in jedem Fall der vermittelnden Messungen brauchbaren und am natürlichsten sich darbietenden Gleichungen 11) und 14). Will man trotzdem andere Wege versuchen, so kann dazu Veranlassung geben die zuerst sich zeigende (freilich sofort wieder zu beseitigende) Asymmetrie der ersten rechten Seiten von 15) oder auch die Befürchtung, es möge dem Anfänger bei der Differentiation des arc tang in 9) nach 15) überhaupt leichter ein Versehen zustoßen, als bei anderen ihm vielleicht geläufigeren Funktionen. Auf solche, nämlich die Potenzen 1 und -1 der Variabeln, kommt man, wenn man mit W e r k m e i s t e r von der Gleichung 8) ausgeht. Erreicht man damit nun Vorteile? Denn darauf kommt es an, nicht darauf, daß die Ableitung «von der sonst üblichen abweicht». Die zuerst sich zeigende Asymmetrie tritt selbstverständlich auch hier auf, vergl. die Gleichung S. 210, Z. 3 von oben, ist nicht sofort mit gutem Grund zu beseitigen wie oben in 15), und verschärft sich sogar auf dem weitern W e r k m e i s t e r'schen Wege immer mehr, siehe die Gleichungen S. 210, Z. 9 und 15 von unten (die Gleichungen sind dort nicht numeriert). Der Anfänger wird sich auch bei der einfachen Annahme, es könne in der vorletzten Gleichung S. 210 $\cos\alpha_i = \cos\alpha_{o,i}$ und damit auch $\cos^2\alpha_i = \cos^2\alpha_{o,i}$ gesetzt werden, nicht ohne weiteres beruhigen, da beide Annahmen bei gewissen Werten von α sehr verschiedene Rechenschärfen in den Koeffizienten von $\triangle x$ und $\triangle y$ andeuten. Verschiebungen des Näherungspunkts P_0 um mehrere Dezimeter, um ihn nach P zu bringen, sind ja leicht möglich; beträgt die Verschiebung 0,3 *m* quer zu $\overline{AP_0}$ und ist s_a ziemlich klein, z. B. 600 *m*, so sind die Richtungswinkel (AP_0) und $(A\underline{P})$ um rund 2' verschieden. Ist nun z. B. $\alpha_i = 89^0\,00'$, $\alpha_{o,i} = 89^0\,02'$, so ist (im zweiten Glied rechter Hand, S. 210, Z. 9 v. u.) $\cos\alpha_i : \cos\alpha_{o,i} = 1{,}03$, dagegen (im ersten Glied rechts) $\cos^2\alpha_i : \cos^2\alpha_{o,i} = 1{,}07$; wie genau ist demnach in den Koeffizienten von $\triangle x$ und $\triangle y$ zu rechnen, auf 3 v. H. oder auf 7 v. H? Ist gar $\alpha_i = 269^0\,55'$, $\alpha_{o,i} = 269^0\,57'$, so ist $\cos\alpha_i : \cos\alpha_{o,i} = 1{,}667$ (um $^2/_3$ von der Einheit verschieden), $\cos^2\alpha_i : \cos^2\alpha_{o,i} = 2{,}778$ (um $1^7/_9$ von der Einheit verschieden), beide werden einander gleich, $= 1$ gesetzt, wobei (im ersten Glied) dann ferner allerdings $\sin\alpha_{o,i}$ sehr klein ist, (im zweiten Glied) aber $\cos\alpha_{o,i}$ absolut $= 1$. Es ist ja leicht zu sehen, wie dieser Zweifel zu heben wäre.

Es soll aber jetzt hierauf nicht weiter eingegangen, sondern erst am Schluß von **5.** noch ein Wort über diesen Weg gesagt werden.

4. Versuchen wir zunächst noch die dritte Möglichkeit, nämlich von der Gleichung 10) auszugehen. Ich darf hier wohl daran erinnern, daß ich schon oft, nicht nur im Unterricht stets, sondern auch in Veröffentlichungen (s. z. B. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Bd. 31, S. 203 bis 207, 1902) darauf aufmerksam gemacht habe, daß in der Ausgleichungsrechnung, einer praktischen Differentialrechnung, Rechnungsabkürzungen dadurch zu erreichen sind, daß vor der Differentiation kompliziert in Produkt- und Quotientform gebauter Funktionen zuerst logarithmiert wird. Aus 10)

$$\log \operatorname{tang} (A\underline{P}) = \log (y_0 + \eta - y_a) - \log (x_0 + \xi - x_a)$$

folgt, wenn wir uns die Logarithmen im natürlichen System genommen denken,

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} (A\underline{P}) &= \log (y_0 - y_a) + \frac{\eta}{y_0 - y_a} - \log (x_0 - x_a) - \frac{\xi}{x_0 - x_a} \\ &= \log \frac{y_0 - y_a}{x_0 - x_a} - \frac{\xi}{x_0 - x_a} + \frac{\eta}{y_0 - y_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 23) \end{aligned}$$

oder

$$\log \operatorname{tang} (A\underline{P}) = \log \operatorname{tang} (AP_0) - \frac{\xi}{x_0 - x_a} + \frac{\eta}{y_0 - y_a} \quad \ldots\ldots 24)$$

Hier ist also von Anfang an keinerlei Unsymmetrie vorhanden. Höchstens wird der folgende Schritt dem Anfänger vielleicht etwas ungewohnt vorkommen; es ist nämlich, wenn $(A\underline{P})$ und (AP_0) genügend wenig von einander verschieden sind, gemäß dem Differential von log tang zu setzen:

$$\begin{aligned} \overset{e}{\log} \operatorname{tang} (A\underline{P}) - \overset{e}{\log} \operatorname{tang} (AP_0) &= \frac{[(A\underline{P}) - (AP_0)]''}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang} (AP_0)} \cdot \frac{1}{\cos^2 (AP_0)} \\ &= \frac{[(A\underline{P}) - (AP_0)]''}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\sin (AP_0) \cdot \cos (AP_0)} \quad \ldots 25) \end{aligned}$$

Damit wird aus 24)

$$(A\underline{P}) - (AP_0) = -\frac{\xi}{x_0 - x_a} \sin (AP_0) \cos (AP_0) \cdot \varrho'' + \frac{\eta}{y_0 - y_a} \sin (AP_0) \cos (AP_0) \cdot \varrho'', \quad \ldots 26)$$

oder da, vergl. 21):

$$(A\underline{P}) = (AP)_{\text{gemess.}} + v_a$$

zu setzen ist und mit Rücksicht auf 17):

$$v_a'' = -\frac{\sin (AP_0)}{s_a} \varrho'' \cdot \xi + \frac{\cos (AP_0)}{s_a} \varrho'' \cdot \eta + [(AP_0) - (AP)_{\text{gemess.}}]''. \quad 27)$$

5. Diese Ableitung in **4.** ist ebenso einfach und ungekünstelt, wie die in **2.** angegebene nächstliegende und verdient als die vielleicht kürzeste jedenfalls nicht, wie es in den Lehrbüchern geschieht, übergangen zu werden. Die einzige kleine Schwierigkeit besteht für den Anfänger, wie schon angedeutet, in der Gleichung 25), in der zudem wegen des Nenners des letzten Bruchs rechts eine ähnliche Bemerkung gemacht werden kann, wie am Schluß von **3.**, die sich freilich ebenfalls einfach erledigt. Ich möchte hier darauf aufmerksam machen, daß die Schlußweise von Gleichung 25), die in allen ähnlichen Fällen ja nichts anderes vorstellt als die gewöhnlichen Differentialformeln, mit Rücksicht auf vielerlei Anwendungen allgemeiner geübt werden sollte, als es der Fall ist. Z. B. was ist, wenn α_1 und α in Gradmaß genommen werden und genügend wenig von einander abweichen (d. h. für die angestrebte Genauigkeit genügend wenig), $\cos\alpha_1 - \cos\alpha$? Antwort: $-\frac{(\alpha_1 - \alpha)''}{\varrho''} \cdot \sin\alpha$, wobei rechts statt $\sin\alpha$ natürlich gleich berechtigt wäre $\sin\alpha_1$. Es ist hier auch didaktisch der Hinweis geboten, daß sich der Bereich dieser Differentialformeln oft dadurch bedeutend erweitern läßt, daß in unserem Beispiel geschrieben wird $\sin\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$; z. B. sei $\alpha_1 = 52^0$, $\alpha = 53^0$, dann ist auf 5 Dez. genau $\cos 52^0 - \cos 53^0 = + 0{,}01385$, ferner ist $\frac{1^0}{\varrho^0} \cdot \sin 52^0 = 0{,}01375$, $\frac{1^0}{\varrho^0} \cdot \sin 53^0 = 0{,}01394$, dagegen $\frac{1^0}{\varrho^0} \sin 52^1{}_2{}^0 = 0{,}01385$. Oder, was ist $\overset{10}{\log}\, 102 - \overset{10}{\log}\, 100$? Antwort: $\frac{2}{100} \cdot M_{10}$ oder $\frac{2}{102} \cdot M_{10}$, noch besser $\frac{2}{101} \cdot M_{10}$; die drei Zahlen geben bis auf die 6. Dezimale genau 0,008686, 0,008516 und 0,008600 und es ist richtig 6stellig $\overset{10}{\log}\, 102 = 2{\cdot}008600$. Solche Dinge sollten im elementaren Unterricht in der Infinitesimalrechnung **zahlenmäßig** geübt werden; ihr Nutzen für die **Praxis** und selbst für die mathematische **Anschauung** ist nicht zu unterschätzen.

Um jetzt nochmals zu **3.** zurückzukehren: die rechte Seite der Gleichung 8) in **2.** liefert durch Entwicklung:

$$\operatorname{tang}(\underline{AP}) = \frac{y_0 - y_a}{x_0 - x_a} + \eta \cdot \frac{1}{x_0 - x_a} - \xi \cdot \frac{y_0 - y_a}{(x_0 - x_a)^2} \quad \ldots \ldots 28)$$

oder

$$\operatorname{tang}(\underline{AP}) = \operatorname{tang}(AP_0) - \xi \cdot \frac{y_0 - y_a}{(x_0 - x_a)^2} + \eta \cdot \frac{1}{x_0 - x_a} \quad \ldots \ldots 29)$$

Die hier wieder vorhandene Unsymmetrie auf der rechten Seite der letzten Gleichung ließe sich dadurch verringern (aber nicht beseitigen), daß im letzten Glied gesetzt würde $\eta \cdot \frac{x_0 - x_a}{(x_0 - x_a)^2}$. Wichtiger ist, daß in 28) wieder geschlossen wird: bei genügend geringer Verschiedenheit der zwei Richtungswinkel $(\underline{AP})$ und (AP_0) kann man, gemäß dem Differential von tang, setzen:

$$\operatorname{tang}(\underline{AP}) - \operatorname{tang}(AP_0) = \frac{[(\underline{AP}) - (AP_0)]''}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\cos^2(AP_0)}, \quad \ldots 30)$$

womit man, wenn noch gleich mit $\cos^2(AP_0)$ und mit ϱ'' durchmultipliziert wird, erhält:

$$(\underline{AP}) - (AP_0) = -\xi \cdot \frac{(y_0 - y_a)\cos^2(AP_0)}{(x_0 - x_a)^2} \cdot \varrho'' + \eta \cdot \frac{\cos^2(AP_0)}{x_0 - x_a} \cdot \varrho'' \quad 31)$$

oder mit Rücksicht auf 21): $(\underline{AP}) = (AP)_{\text{gemess.}} + v_a$ und auf die Gleichung 17) abermals

$$v_a'' = -\frac{\sin(AP_0)}{s_a}\varrho'' \cdot \xi + \frac{\cos(AP_0)}{s_a}\varrho'' \cdot \eta + [(AP_0) - (AP)_{\text{gemess.}}]'', \quad \ldots 32)$$

wie in 22) und 27); mehrere der wenig übersichtlichen Umformungen von S. 210 sind damit vermieden.

Literaturbericht.

1. Bücherbesprechungen.

Zur Rezension gelangen nur Bücher, welche der Redaktion der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen zugesendet werden.

Bibliotheks-Nr. 550. Karl Mühlenhardt, Städt. Oberlandmesser: Deutscher Landmesser-Kalender für das Jahr 1915. Vierzehnter Jahrgang, I. Teil, mit Beilage. Liebenwerda, Verlag von R. Reiss, in dauerh. Leinen geb. Mk. 2·—.

Die Firma R. Reiss zu Liebenwerda in Sachsen, welche Instrumente und Geräte für alle Zweige des Vermessungswesens sowie technische Artikel in anerkannt guter Qualität liefert und sich so einen im hohen Maße geachteten Ruf erworben hat, gibt seit Jahren den «Deutschen Landmesser-Kalender» heraus, den der städtische Oberlandmesser Karl Mühlenhardt in Berlin redigiert.

Der vorliegende 14. Jahrgang reiht sich seinen Vorgängern in jeder Richtung würdig an und hält, was Inhalt und Ausstattung betrifft, den Vergleich mit ähnlichen Werken vollends aus.

Neben einem Terminkalender findet sich eine reiche Sammlung mathematischer Tabellen: Quadrattafeln, eine vierstellige Logarithmentafel, eine logarithmisch-trigonometrische Tafel für neue und alte Teilung, Längen und Sehnen der Kreisbögen für den Halbmesser 10, eine Tafel der natürlichen Zahlen der Sin., Cosin., Tang. und Cotang., eine Kreis- und Kubiktafel, eine Reziproken- und Produktentafel u. s. w.; ferner eine wünschenswerte Zusammenstellung über Münzen, Maße und Gewichte. Auszüge aus der preußischen Landmesser-Prüfungsordnung, Notizen aus dem preußischen Landmesser-Reglement, über die Bezahlung der Landmesserarbeiten, Tabelle über Gebühren der Preußischen Katasterordnung, Wohnungsgeldzuschüsse, Reise- und Umzugskosten der preußischen Staatsbeamten. Notizen betreffend das geltende bürgerliche Recht werden den deutschen Fachkollegen gewiß gute Dienste leisten.

Eine kurze Darstellung der Prüfung und Berichtigung geodätischer Instrumente, das Wichtigste über Flächenberechnung, Kurvenabsteckung, das trigonometrische und barometrische Höhenmessen, die Bestimmung des Meridians durch Sonnenbeobachtung, weiters Notizen aus der Mathematik, der Physik, über den Bau und Betrieb der Eisenbahnen, die Drainage, für die Aufstellung von Kanalisationsprojekten und dergl. werden einem jeden in der Praxis stehenden Geometer willkommen sein.

Berücksichtigt man weiter, daß Notizen über den Eisenbahn-, Post- und Telegraphenverkehr, daß auch astronomische Daten, die Zeitgleichung 1915, Deklination der Sonne 1915, Zeitunterschiede zwischen M. E. Z. und den Ortszeiten verschiedener Orte Deutschlands usw. in dem Kalender enthalten sind, so wird er in der Tat dem Landmesser für die verschiedensten Bedürfnisse nötige Anhaltspunkte bieten und daher von großem Nutzen sein, aus welchem Grunde auch seine große Verbreitung bei den Landmessern Deutschlands und seine Beliebtheit erklärlich sind.

Die Beilage zum Deutschen Landmesser-Kalender für das Jahr 1915 ist gleichfalls von Oberlandmesser Mühlenhardt bearbeitet, sie enthält eine gediegene Zusammenstellung der bedeutendsten Firmen all jener Artikel, deren der Landmesser bei seinen Arbeiten bedarf.

Wir können den Mühlenhardt'schen Deutschen Landmesser-Kalender auf das beste empfehlen. *D.*

2. Neue Bücher.

Boldt Alb.: Das Ende des Fermat'schen Spukes. Großer Fermat'scher Satz. 16 S. Naumburg a. d. S., Selbstverlag. (Nur direkt.) Mk. 1·80.

Hanausek Gust., Hofrat Dr.: Veräußerung von Grundstücken. Eine Studie aus dem österreichischen Privatrecht. 30 S. Wien 1914, Manz. Mk. 0·75.

Joly Hubert: Technisches Auskunftsbuch f. d. J. 1915. Eine alphabet. Zusammenstellung des Wissenswerten aus Theorie und Praxis auf dem Gebiete des Ingenieur- u. Bauwesens. 22. Jahrg. 1537 u. 58 S. m. Fig. u. 1 Karte. Leipzig 1914, K. F. Koehler.

Klingatsch A., Professor: Ueber ein astronomisches Diagramm. (Aus «Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch.») 12 S. m. 1 Fig. u. 1 Taf. Wien 1914, A. Hölder. Mk. 0·44.

Müller P. Joh., Prof.: Das Rätsel der Schwerkraft, gelöst durch die Raumenergetik. 51 S. Teschen 1914, K. Prochaska. Mk. 1·20.

---

3. Zeitschriftenschau.

a) Zeitschriften vermessungstechnischen Inhalts:

Allgemeine Vermessungs-Nachrichten:

Nr. 42. Rohleder: Die Mitwirkung des Landmessers bei dem Wiederaufbau der zerstörten ostpreußischen Ortschaften.

Der Landmesser:

Nr. 34. Schröer B.: Fremdwörter im Anzeigenteil unserer Fachzeitschriften.

Schweizerische Geometerzeitung:

Nr. 12. Leemann H., Dr.: Das Stockwerkseigentum, insbesondere seine Überleitung in das neue Recht. — Roesgen Ch.: Katastervermessung und Vermessungsinstruktion. — Das aargauische Grundbuch. — Das Vermessungswesen an der Schweizerischen Landesausstellung in Bern 1914 (Forts.)

Zeitschrift für Instrumentenkunde:

Nr. 11. Stadthagen H., Dr.: Beziehung der englischen und amerikanischen Längeneinheit, der englischen und amerikanischen Yard, zur metrischen Längeneinheit, dem Meter.

Zeitschrift für Vermessungswesen:

Nr. 26. Degner, Dr.: Erkundung I. Ordnung und Signalbau der Königl. Landesaufnahme in neuerer Praxis. (Schluß) — Höser A.: Der Deutsche Geometerverein und der Krieg. — Eggert: Druckfehler in Jordan's sechsstelliger Logarithmentafel.

b) Fachliche Artikel aus verschiedenen Zeitschriften:

Breithaupt Wilhelm: «Das Messen mit dem Theodolit in tonnlägigen Schächten, steil einfallenden Strecken, Bremsbergen usw.» in «Mitteilungen aus dem Markscheidewesen». 3. Folge, 1914.

Hammer E., Dr.: «Kohlschütter über die Ostafrikanische Pendelexpedition» in «Petermann's Mitteilungen», Novemberheft.

Hilber V., Prof. Dr.: «Barometrische Höhenmessungen in den griechisch-türkischen Grenzländern» in «Petermann's Mitteilungen», Novemberheft.

Špaček St.: «Die Regulierung des unteren Iserflußes» in «Oesterr. Wochenschrift für den öffentl. Baudienst», Heft 49 u. 50.

Tichy Anton, Oberinspektor: «Rationelle Vorgänge der Absteckung bedeutend langer Eisenbahn-Tunnels» in «Zeitschrift des österr. Ingenieur- u. Architektenvereines» Nr. 47/48, 49/50 (Forts.)

Vereins- und Personalnachrichten.

1. Vereinsangelegenheiten.

Für die P. T. Mitglieder von **Niederösterreich, Kärnten** und **Böhmen** wurden im Dezemberhefte 1914 **Erlagscheine** zu dem Zwecke eingelegt, damit diese Herren ihre Mitgliedsbeiträge einzahlen können.

2. Bibliothek des Vereines.

Der Bibliothek des Vereines sind zugekommen:

F. Auerbach: Die graphische Darstellung. Aus «Natur und Geisteswelt». Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. Bd. 437. Teubner, Leipzig und Berlin 1914.

Dr. K. Graff: Grundriß der geographischen Ortsbestimmung aus astronomischen Beobachtungen. Göschen'sche Verlagshandlung, Berlin und Leipzig 1914.

E. Hegemann: Das topographische Zeichnen. Eine Sammlung von 12 Musterblättern. Paul Parey, Berlin 1914.

K. Mühlenhardt: Deutscher Landmesserkalender für das Jahr 1915. Reiss, Liebenwerda.

3. Personalien.

Staatsprüfung an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Im Herbsttermine 1914 haben die Staatsprüfung an der Geometer-Abteilung die Herren Firkuschny Friedrich und Mayer Friedrich bestanden.

Ernennungen. Zu Geometern II. Kl. (XI. Rangskl.) die Eleven: Petružela Anton (1./II. 1914), Cleva Ernst (30./X. 1914), Baldassar Rud. (19./XI. 1914) und Pertramer Ignatz (28./XI. 1914).

Bestellungen. Zu Revisionsgeometern für agrarische Operationen: Inspektor Morpurgo Artur für Steiermark und Inspektor Machaček Wenzel für Mähren.

Elevenaufnahme. Schiffmann Franz (1894) mit 15./XII. 1914. Wien I—IV.

Pensionierung. Obergeometer I. Kl. Pařik Anton.

Todesfall. Geometer Klonner Franz.

Eigentum und Verlag des Vereines. — Verantwortlicher Redakteur: Johann Wladarz in Baden.
Druck von Joh. Wladarz in Baden

Bei Bestellungen und Korrespondenzen an die hier inserierenden Firmen bitten wir, sich immer auch auf unsere Zeitschrift berufen zu wollen.

Eigentum und Verlag des Vereines. — Verantwortlicher Redakteur: Johann Wladarz in Baden.