Die Koeffizienten für die Bedingungs- und Normalgleichungen beim Ausgleiche trigonometrischer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate

Ernst Engel

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **2** (6, 7), S. 81–90, 97–104

1904


```
@ARTICLE{Engel_VGI_190411,
Title = {Die Koeffizienten f{\"u}r die Bedingungs- und Normalgleichungen beim
    Ausgleiche trigonometrischer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate
    },
Author = {Engel, Ernst},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {81--90, 97--104},
Number = {6, 7},
Year = {1904},
Volume = {2}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III. Kübeckgasse 12.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175

Erscheint am 1. und 16. jeden Monats.
Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch
Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei
Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr. 6. Wien, am 16. März 1904. II. Jahrgang.

Die Koëffizienten für die Bedingungs- und Normalgleichungen beim Ausgleiche trigonometrischer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Von **Ernst Engel**, Obergeometer und Honorardozent.

Ich habe im Hefte Nr. 7 des ersten Jahrganges dieser Zeitschrift eine nicht unwesentliche Vereinfachung des gebräuchlichen Ausgleichsverfahrens für trigonometrische Punkte nach vermittelnden (Richtungs-) Beobachtungen veröffentlicht, musste jedoch, durch den Beruf und andere Pflichten daran gehindert, damals auf eine eingehende theoretische Begründung dieses Verfahrens verzichten. Auch wollte ich die praktische Erprobung der seither als Sonderabdruck erschienenen Tabellen der Koëffizienten für die Bedingungs- und Normalgleichungen, ihre Anwendung für innere Richtungen und auf das Problem der Ausgleichung mehrerer Punkte im Zusammenhange abwarten, um sodann auch diese Fälle in den Bereich einer nachträglichen Besprechung ziehen zu können.

Das Wesen des diesem vereinfachten Rechnungsverfahren zugrundegelegten Vorganges besteht nach den Ausführungen im Hefte Nr. 7 des ersten Jahrganges dieser Zeitschrift darin, das System der einen trigonometrischen Punkt bestimmenden Strahlen durch ein g l e i c h w e r t i g e s von g l e i c h e r S t r a h l e n l ä n g e zu ersetzen.

Rechnerisch wird dies dadurch erreicht, daß die Bedingungsgleichungen der Reihe nach mit $\frac{s_1}{\varrho''}$, $\frac{s_2}{\varrho''}$, $\frac{s_3}{\varrho''}$ u. s. w. multipliziert werden. Es stellen somit s_1, s_2, s_3 die Maße der den einzelnen Richtungen zukommenden Genauigkeit oder s_1^2, s_2^2, s_3^2 u. s. w. ihre Gewichte vor.

Es ist nun die Frage, ob dieser Vorgang mit Rücksicht auf die Forderungen der Methode der kleinsten Quadrate eingehalten werden darf und, wenn dies möglich erscheint, welche Wirkung durch die geänderte Rechnung auf die Resultate der Ausgleichung zu gewärtigen ist.

Zur Vereinfachung der Rechnung wird bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in der Geodäsie fast allgemein vorausgesetzt, daß die Genauigkeit, resp. der mittlere Fehler für alle zur Bestimmung eines trigonometrischen Punktes dienenden Richtungen gleich sei. Diese Voraussetzung kann jedoch nur als eine Konzession an die Vereinfachung des Rechnungsganges angesehen werden und ist nur dann unbedenklich, wenn die Strahlen in ihren Längen nur unwesentlich abweichen. Tritt jedoch das Gegenteil ein, und dies ist bei Netzen niederer Ordnung fast die Regel, dann muss unter allen Umständen von der Voraussetzung gleicher Genauigkeit für alle Strahlen abgegangen werden, falls man sich des wirklichen Nutzens, den die Methode der kleinsten Quadrate unzweifelhaft bringen kann, nicht begeben will. Um hiefür einen einfachen Beleg zu bringen, denken wir uns einen Punkt aus einem Dreiecke bestimmt, welcher zwei lange und eine sehr kurze Seite besitzt. Wird der in diesem Dreiecke vorhandene Winkelwiderspruch nach der Methode der kleinsten Quadrate ohne Berücksichtigung der den einzelnen Strahlen zufolge ihrer Länge zukommenden Gewichte ausgeglichen, dann ist derselbe bekanntlich auf die drei Winkel des Dreiecks gleichmäßig zu verteilen. Es würden daher die an der kurzen Seite des Dreieckes liegenden beiden Winkel dieselben Verbesserungen erhalten als der von den beiden langen Schenkeln eingeschlossene spitze Dreieckswinkel.

Trotz Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate könnten wir kaum einen größeren theoretischen wie praktischen Fehler begehen. Es ist eben nicht die Aufgabe der Ausgleichung trigonometrischer Netze, die sich ergebenden Winkelwidersprüche allein zu beseitigen, sondern den wahrscheinlichsten Ort für die zu bestimmenden Punkte zu suchen, d. h. für dieselben solche Koordinaten zu finden, daß die aus diesen abgeleiteten gegenseitigen Entfernungen der Punkte möglichst gleich seien den in der Wirklichkeit vorhandenen. Hiefür aber genügt die Anbringung möglichst kleiner Winkelverbesserungen ohne Berücksichtigung der Wirkungen derselben auf die Länge der Dreiecksseiten, wie dies bei der Annahme gleicher Genauigkeit und des gleichen Gewichtes für alle Strahlen der Fall ist, nicht.

Die Vernachlässigung der Gewichte hat zur Folge, dass kurze Visuren in der Ausgleichsrechnung eine über ihre Bedeutung weit hinausreichende Berücksichtigung erfahren müssen. Da in diesem Falle nicht [p vv], sondern [vv] zu einem Minimum gemacht wird, ist es nur im bescheidensten Maße möglich, den Forderungen weiterer Visuren gerecht zu werden, weil eine auch noch so geringe lineare Verschiebung des auszugleichenden Punktes eine bedeutende Änderung im Winkelwerte der Richtungsverschiebung kurzer Visuren hervorrufen muss und dann [vv] kein Minimum werden kann.

Treten aber bei der Ausgleichung von trigonometrischen Punkten bei Anwendung dieses Verfahrens mehrere kurze Visuren neben längeren auf, und sind die an den ersteren nach der Rechnung anzubringenden Winkel-Aerbesserungen keine geringen, dann ist man genötigt, über diese Tatsache mit dem Argumente hinwegzukommen, dass diesen Winkelwerten lineare Verschiebungen des vorläufig bestimmten Punktes entsprechen, welche für die Genauigkeit der Punktbestimmungen von keinem Belange sind.

Hiebei soll keineswegs angenommen werden, daß die Genauigkeit einer Richtung nur von ihrer Länge abhängig ist. Es können bei Einhaltung dieses Rechnungsganges, insbesondere wenn es sich um einfache Zahlen handelt, alle jene Momente in Rechnung gebracht werden, wie die Anzahl der gemachten Beobachtungen, die Umstände der Messung, die Güte des Instrumentes und Exaktheit des Beobachters, welche die Genauigkeit der Richtung beeinflussen können.

Sind die für die Festlegung von Richtungen erforderlichen Einzelbeobachtungen in wenigstens praktisch ausreichender Anzahl — wie bei Gradmessungen — vorhanden, dann ist es möglich, den wahrscheinlichen mittleren Fehler jeder Richtung und ihr Gewicht aus der Abweichung der Einzelbeobachtungen von ihrem Mittelwerte zu bestimmen und in der Ausgleichsrechnung zu berücksichtigen.

Ist jedoch die Zahl der Einzelbeobachtungen wie in fast allen für die Praxis in Betracht kommenden Fällen eine nur beschränkte, somit die Möglichkeit von Gewichtsbestimmungen der erwähnten Art ausgeschlossen, dann sind durch die Ausgleichsrechnung nicht mehr die Quadrate der jeder Richtung anhaftenden unvermeidlichen Winkelfehler, deren Grösse sich unserer Beurteilung vollkommen entzieht, sondern die Quadrate ihrer Wirkungen auf die Bestimmung der Länge der Dreiecksseiten zu einem Minimum zu machen.

Diese Auffassung des Wesens der Methode der kleinsten Quadrate in ihrer Anwendung auf Richtungsbeobachtungen bietet uns aber nicht allein die Möglichkeit, den nur in beschränkter Zahl vorliegenden Einzelbeobachtungen weit mehr als unter Zugrundelegung gleicher Gewichte gerecht zu werden, sondern überdies den nicht zu unterschätzenden Vorteil, diese Ausgleichsrechnungen mit einem wenigstens erträglichen Aufwande an Zeit und Mühe und einem wesentlichen gesteigerten Grade von Zuverlässigkeit zu bewältigen.

Die Wirkung eines Winkelfehlers ω bei einer Visur von der Länge s ist gegeben durch die Grösse $\frac{s}{\varrho''}\omega$. Unter Berücksichtigung der im Vorstehenden angedeuteten Gesichtspunkte gehen somit die allgemeinen Fehlergleichungen

$$\rho'' \frac{\sin \sigma_1'}{s_1} \delta x + \rho'' \frac{\cos \sigma_1'}{s_1} \delta y + \omega_1 = 0$$

$$\rho'' \frac{\sin \sigma_2'}{s_2} \delta x + \rho'' \frac{\cos \sigma_2'}{s_2} \delta y + \omega_2 = 0$$

$$\rho'' \frac{\sin \sigma_3'}{s_3} \delta x + \rho'' \frac{\cos \sigma_3'}{s_3} \delta y + \omega_3 = 0$$

u. s. w. über in die Form

$$\sin \sigma_1' \delta x + \cos \sigma_1' \delta y + \frac{s_1 \omega}{\rho''} = 0$$

$$\sin \sigma_2' \delta x + \cos \sigma_2' \delta y + \frac{s_2 \omega_2}{\rho''} = 0$$

$$\sin \sigma_3' \delta x + \cos \sigma_3' \delta y + \frac{s_3 \omega_3}{\rho''} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Es erscheinen somit die allgemeinen Fehlergleichungen außer mit dem indifferenten Faktor $\frac{1}{\rho''}$ mit dem jeder Richtung zukommendem Maße ihrer Genauigkeit, d. i. der Wurzel s des Gewichtes s^2 multipliziert.

Wird weiters jede dieser Gleichungen mit 100 multipliziert und die Seite s in Kilometern ausgedrückt ($s = 1000\ k$), dann lauten die Fehlergleichungen folgend:

$$100 \sin \sigma_1' \delta x + 100 \cos \sigma_1' \delta y + \frac{100\ k_1\ 1000}{\rho''} \omega_1 = 0$$

$$100 \sin \sigma_2' \delta x + 100 \cos \sigma_2' \delta y + \frac{100\ k_2\ 1000}{\rho''} \omega_2 = 0$$

$$100 \sin \sigma_3' \delta x + 100 \cos \sigma_3' \delta y + \frac{100\ k_3\ 1000}{\rho''} \omega_3 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Wird in diesen Gleichungen $100 \sin \sigma' = \alpha$
$100 \cos \sigma' = \beta$ und
$\frac{100\ k\ 1000}{\rho''} \omega_1 = \gamma k\omega =$
$0{\cdot}48482\ k\omega$ gesetzt, dann sind die Fehlergleichungen für die

Angleichung eines Punktes nach äußeren Richtungen:

$$\alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y + \gamma\ k_1\ \omega_1 = 0$$

$$\alpha_2 \delta x + \beta_2 \delta y + \gamma\ k_2\ \omega_2 = 0$$

$$\alpha_3 \delta x + \beta_3 \delta y + \gamma\ k_3\ \omega_3 = 0 \text{ u. s. w.}$$

und die hieraus abgeleiteten Normalgleichungen

$$[\alpha\alpha] \delta x + [\alpha\beta] \delta y + [\alpha\ \gamma\ k\omega] = 0$$

$$[\beta\alpha] \delta x + [\beta\beta] \delta y + [\beta\ \gamma\ k\omega] = 0$$

Hierin bedeuten

$$[\alpha\alpha] = \alpha_1\ \alpha_1 + \alpha_2\ \alpha_2 + \alpha_3\ \alpha_3 + \ldots = a_1$$

$$[\alpha\beta] = \alpha_1\ \beta_1 + \alpha_2\ \beta_2 + \alpha_3\ \beta_3 + \ldots = b_1$$

$$[\alpha\ \gamma\ k\omega] = \alpha_1\ \gamma\ k_1\ \omega_1 + \alpha_2\ \gamma\ k_2\ \omega_2 + \ldots = c_1$$

$$[\beta\beta] = \beta_1\ \beta_1 + \beta_2\ \beta_2 + \beta_3\ \beta_3 + \ldots = b_2$$

$$[\beta\ \gamma\ k\omega] = \beta_1\ \gamma\ k_1\ \omega_1 + \beta_2\ \gamma\ k_2\ \omega_2 \ldots = c_2$$

Die Auflösung der Normalgleichungen ergiebt sodann folgende Werte für die Unbekannten:

$$\delta x = -\frac{b_2\ c_1 - b_1\ c_2}{a_1\ b_2 - b_1\ b_1}$$

$$\delta y = -\frac{a_1\ c_2 - b_1\ c_1}{a_1\ b_2 - b_1\ b_1}$$

I. Beispiel.

Bestimmung des Punktes 3 nach äusseren Richtungen.*)

I. Bildung der absoluten Glieder für die Bedingungsgleichungen.

Bezeichnung der gegeb. Punkte	Vorläufige Südwinkel σ'			Endgiltige Südwinkel σ			Orientierte Richtungen + 180°			ω	k	kω	v	vv
	°	′	″	°	′	″	°	′	″					
Spielberg	78	34	55·3				78	34	54	+ 1·3	3·9	+ 5·1		
4	108	33	15·3				108	33	17	— 1·7	2·8	— 4·8		
1	138	50	50·8				138	50	50	+ 0·8	2·6	+ 2·1		
Hadi	213	03	52·5				213	03	55	— 2·5	2·7	— 6·8		
Neuer Berg	327	55	10·3				327	55	11	— 0·7	1·0	— 0·7		

II. Die Koëfficienten und absoluten Glieder für die Bedingungs- und Normalgleichungen.

Gegebene Punkte	α	β	$\alpha\alpha$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma k\omega$	$\beta\beta$	$\beta\gamma k\omega$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$k\omega$
Spielberg	+ 98·0	— 19·8	+ 9604	— 1940	+ 242	+ 392	— 49	+ 47·5	— 9·6	+ 5·1
4	+ 94·8	+ 31·8	8987	+ 3015	— 221	1011	— 74	+ 46·0	+ 15·4	— 4·8
1	+ 65·8	+ 75·3	4330	+ 4955	+ 67	5670	+ 77	+ 31·9	+ 36·5	+ 2·1
Hadi	— 54·6	+ 83·8	2981	— 4575	+ 180	7022	— 276	— 26·5	+ 40·6	— 6·8
Neuer Berg	— 53·1	— 84·7	2820	+ 4498	+ 18	7174	+ 29	— 25·7	— 41·1	— 0·7
				+ 12468	+ 507		+ 106			
				— 6515	— 221		— 399			
			+ 28722	+ 5953	+ 286	+ 21269	— 293			
			a_1	b_1	c_1	b_2	c_2			

*) Die Angaben für dieses und die folgenden Beispiele sind der österreichischen Instruktion für Polygonalvermessungen entnommen.

III. Auflösung der Normalgleichungen.

Logarithmen	Zahlen	Logarithmen	Zahlen
$b_2 = 4{\cdot}32775$		$a_1 = 4{\cdot}45821$	
$c_1 = 2{\cdot}45637$		$c_2 = 2{\cdot}46687\ n$	
$6{\cdot}78412$	$b_2 c_1 = +\ 6083000$	$6{\cdot}92508\ n$	$a_1 c_2 = -\ 8415500$
$b_1 = 3{\cdot}77474$		$b_1 = 3{\cdot}77474$	
$c_2 = 2{\cdot}46687\ n$		$c_1 = 2{\cdot}45637$	
$6{\cdot}24161\ n$	$b_1 c_2 = -\ 1744240$	$6{\cdot}23111$	$b_1 c_1 = +\ 1702680$
	$z_1 = +\ 7827240$		$z_2 = -\ 10118180$
$a_1 = 4{\cdot}45821$		$z_1 = 6{\cdot}89361$	
$b_2 = 4{\cdot}32775$		$n = 8{\cdot}76001$	
$8{\cdot}78596$	$a_1 b_2 = +\ 610885700$	$\delta x = 8{\cdot}13360$	$-\ 0{\cdot}0136$
$b_1 = 3{\cdot}77474$			
$b_1 = 3{\cdot}77474$		$z_2 = 7{\cdot}00510\ n$	
$7{\cdot}54948$	$b\,b_1 = +\ 35439000$	$n = 8{\cdot}76001$	
	$n = +\ 575446700$	$\delta y = 8{\cdot}24509$	$+\ 0{\cdot}0176$

IV. Ermittlung der Verbesserungen.

Gegebene Punkte	$\alpha\delta x$	$\beta\delta y$	$\gamma k\delta\sigma = \alpha\delta x + \beta\delta y$	$k\delta\sigma$	$k\omega$	$kv = k\delta\sigma + k\omega$	$k^2\omega^2$	$k^2 v^2$	v
Spielberg	$-1{\cdot}33$	$-0{\cdot}35$	$-1{\cdot}68$	$-\ 3{\cdot}4$	$+\ 5{\cdot}1$	$+\ 1{\cdot}7$	$26{\cdot}0$	$2{\cdot}9$	$+\ 0{\cdot}4$
4	$-1{\cdot}29$	$+0{\cdot}56$	$-0{\cdot}73$	$-\ 1{\cdot}5$	$-\ 4{\cdot}8$	$-\ 6{\cdot}3$	$23{\cdot}0$	$39{\cdot}7$	$-\ 2{\cdot}2$
1	$-0{\cdot}89$	$+1{\cdot}32$	$+0{\cdot}43$	$+\ 0{\cdot}9$	$+\ 2{\cdot}1$	$+\ 3{\cdot}0$	$4{\cdot}4$	$9{\cdot}0$	$+\ 1{\cdot}1$
Hadi	$+0{\cdot}74$	$+1{\cdot}47$	$+2{\cdot}21$	$+\ 4{\cdot}4$	$-\ 6{\cdot}8$	$-\ 2{\cdot}4$	$46{\cdot}2$	$5{\cdot}8$	$-\ 0{\cdot}9$
Neuer Berg	$+0{\cdot}72$	$-1{\cdot}49$	$-0{\cdot}77$	$-\ 1{\cdot}5$	$-\ 0{\cdot}7$	$-\ 2{\cdot}2$	$0{\cdot}5$	$4{\cdot}8$	$-\ 2{\cdot}2$
							$100{\cdot}1$	$62{\cdot}2$	

Die Ausgleichung eines Punktes nach inneren Richtungen.

Die Bedingungsgleichungen für innere Richtungen lauten allgemein:

$$a_1\ \delta x + b_1\ \delta y + \omega_1 + z_1 = 0$$
$$a_2\ \delta x + b_2\ \delta y + \omega_2 + z_2 = 0$$
$$a_3\ \delta x = b_3\ \delta x + \omega_3 + z_3 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

In denselben wird bekanntlich bei der Ausgleichung mit gleichen Gewichten, damit die Resultate der Ausgleichung durch die Schlußorientierung keine Änderung erfahre $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z$ gesetzt und diese neue Unbekannte nach dem Gauß'schen Verfahren eliminiert.

Die obigen Gleichungen gehen bei Einführung des Maßes für die Genauigkeit der Einzelvisuren $= \frac{s}{\gamma \pi}$ und unter Berücksichtigung der im Vorstehenden eingeführten Bezeichnungen über in

$$\alpha_1 .\ \delta x + \beta_1\ \delta y + \gamma\ k_1\ \omega_1 + \gamma\ k_1\ z_1 = 0$$
$$\alpha_2\ \delta x + \beta_2\ \delta y + \gamma\ k_2\ \omega_2 + \gamma\ k_2\ z_2 = 0$$
$$\alpha_3\ \delta x + \beta_3\ \delta y + \gamma\ k_3\ \omega_3 + \gamma\ k_3\ z_3 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Damit die im Ausgleichsverfahren ermittelten Richtungsverbesserungen von der Form k v durch die endgiltige Orientierung des Systems keine Änderung erfahren, setzen wir in diesen Gleichungen

$$\gamma\ k_1\ z_1 = \gamma\ k_2\ z_2 = \gamma\ k_3\ z_3 = z.$$

Hiedurch wird entsprechend dem vorliegenden Ausgleichsverfahren der Forderung desselben, daß die Einzelvisuren auch bei der Orientierung nach Maßgabe des ihnen zukommenden Genauigkeitsgrades berücksichtigt werden, Rechnung getragen.

Es gehen somit die obigen Gleichungen über in die Form

$$\text{Anzahl} = n \begin{cases} \alpha_1\ \delta x + \beta_1\ \delta y + \gamma\ k_1\ \omega_1 + z = 0 \\ \alpha_2\ \delta x + \beta_2\ \delta y + \gamma\ k_2\ \omega_2 + z = 0 \\ \alpha_3\ \delta x + \beta_3\ \delta y + \gamma\ k_3\ \omega_3 + z = 0 \end{cases}$$

u. s. w.

Zum Zwecke der Elimination der Unbekannten z werden die obigen Gleichungen zunächst addiert,

$$[\alpha]\ \delta x + [\beta]\ \delta y + [\gamma\ k\ \omega] + nz = 0$$

diese Gleichung sodann durch n dividiert:

$$\frac{[\alpha]}{n}\ \delta x + \frac{[\beta]}{n}\ \delta y + \frac{[\gamma\ k\ \omega]}{n} + z = 0$$

und dieser erhaltene Wert schließlich von jeder der Bedingungsgleichungen subtrahiert. Dies ergibt:

$$\left(\alpha_1 - \frac{[\alpha]}{n}\right) \delta x + \left(\beta_1 - \frac{[\beta]}{n}\right) \delta y + \left(\gamma\ k_1\ \omega_1 - \frac{[\gamma\ k\ \omega]}{n}\right) = 0$$
$$\left(\alpha_2 - \frac{[\alpha]}{n}\right) \delta x + \left(\beta_2 - \frac{[\beta]}{n}\right) \delta y + \left(\gamma\ k_2\ \omega_2 - \frac{[\gamma\ k\ \omega]}{n}\right) = 0$$
$$\left(\alpha_3 - \frac{[\alpha]}{n}\right) \delta x + \left(\beta_3 - \frac{[\beta]}{n}\right) \delta y + \left(\gamma\ k_3\ \omega_3 - \frac{[\gamma\ k\ \omega]}{n}\right) = 0$$

u. s. w.

Um jedoch nicht die einzelnen Koëffizienten und die absoluten Glieder der Bedingungsgleichungen reduzieren zu müssen, sei im Folgenden ein Verfahren zur direkten Bildung der Koëffizienten und absoluten Glieder der Normalgleichungen abgeleitet. Dasselbe bietet auch unter der Voraussetzung gleicher Gewichte und insbesondere bei der Ausgleichung mehrerer Punkte im Zusammenhange gegenüber dem gebräuchlichen Verfahren nicht zu unterschätzende Vereinfachungen des Rechnungsganges.

Die Koëffizienten und absoluten Glieder der reduzierten Normalgleichungen haben die nachstehende Form, u. zw.:

$$[\alpha\alpha]_r = \left(\alpha_1 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\alpha_1 - \frac{[\alpha]}{n}\right) = \alpha_1\,\alpha_1 - 2\,\frac{[\alpha]}{n}\,\alpha_1 + \frac{[\alpha]^2}{n^2}$$
$$+ \left(\alpha_2 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\alpha_2 - \frac{[\alpha]}{n}\right) = \alpha_2\,\alpha_2 - 2\,\frac{[\alpha]}{n}\,\alpha_2 + \frac{[\alpha]^2}{n^2}$$
$$+ \left(\alpha_3 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\alpha_3 - \frac{[\alpha]}{n}\right) = \alpha_3\,\alpha_3 - 2\,\frac{[\alpha]}{n}\,\alpha_3 + \frac{[\alpha]^2}{n^2}$$

$$[\alpha\alpha]_r = \qquad [\alpha\alpha] - 2\,\frac{[\alpha]^2}{n} + \frac{[\alpha]^2}{n} =$$
$$= [\alpha\alpha] - \frac{[\alpha]\,[\alpha]}{n}$$

$$[\alpha\beta]_r = \left(\alpha_1 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\beta_1 - \frac{[\beta]}{n}\right) = \alpha_1\,\beta_1 - \frac{[\alpha]}{n}\,\beta_1 - \frac{[\beta]}{n}\,\alpha_1 + \frac{[\alpha]\,[\beta]}{n^2}$$
$$+ \left(\alpha_2 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\beta_2 - \frac{[\beta]}{n}\right) = \alpha_2\,\beta_2 - \frac{[\alpha]}{n}\,\beta_2 - \frac{[\beta]}{n}\,\alpha_2 + \frac{[\alpha]\,[\beta]}{n^2}$$
$$+ \left(\alpha_3 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\beta_3 - \frac{[\beta]}{n}\right) = \alpha_3\,\beta_3 - \frac{[\alpha]}{n}\,\beta_3 - \frac{[\beta]}{n}\,\alpha_3 + \frac{[\alpha]\,[\beta]}{n^2}$$

$$[\alpha\beta]_r = \qquad [\alpha\beta] - \frac{[\alpha]\,[\beta]}{n} - \frac{[\alpha]\,[\beta]}{n} + n\,\frac{[\alpha]\,[\beta]}{n^2} =$$
$$= [\alpha\beta] - \frac{[\alpha]\,[\beta]}{n}$$

$$[\alpha\,\gamma\,k\,\omega_1]_r = \left(\alpha_1 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\gamma\,k_1\,\omega_1 - \frac{[\gamma\,k\,\omega]}{n}\right) = \alpha_1\,\gamma\,k_1\,\omega_1 - \frac{[\alpha]}{n}\,\gamma\,k_1\,\omega_1 -$$
$$\frac{[\gamma\,k\,\omega]}{n}\,\alpha_1 + \frac{[\alpha]\,[\gamma\,k\,\omega]}{n^2}$$
$$+ \left(\alpha_2 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\gamma\,k_2\,\omega_2 - \frac{[\gamma\,k\,\omega]}{n}\right) = \alpha_2\,\gamma\,k_2\,\omega_2 - \frac{[\alpha]}{n}\,\gamma\,k_2\,\omega_2 -$$
$$\frac{[\gamma\,k\,\omega]}{n}\,\alpha_2 + \frac{[\alpha]\,[\gamma\,k\,\omega]}{n^2}$$
$$+ \left(\alpha_3 - \frac{[\alpha]}{n}\right)\left(\gamma\,k_3\,\omega_3 - \frac{[\gamma\,k\,\omega]}{n}\right) + \alpha_3\,\gamma\,k_3\,\omega_3 - \frac{[\alpha]}{n}\,\gamma\,k_3\,\omega_3 -$$
$$\frac{[\gamma\,k\,\omega]}{n}\,\alpha_3 + \frac{[\alpha]\,[\gamma\,k\,\omega]}{n^2}$$

$$[\alpha\gamma k\omega]\, r = [\alpha\gamma k\omega] - \frac{[\alpha][\gamma k\omega]}{n} - \frac{[\alpha][\gamma k\omega]}{n} + \frac{n\,[\alpha][\gamma k\omega]}{n^2}$$

$$= [\alpha\gamma k\omega] - \frac{[\alpha][\gamma k\omega]}{n} = [\alpha\gamma k\omega] - \frac{[\alpha]\,\gamma\,[k\omega]}{n}$$

Da wir durch die Reduktion der $k\omega$ im Vorhinein $[k\omega] = o$ machen können, so entfallen hiedurch die Reduktionsglieder für die absoluten Glieder der **Normalgleichungen.** Wir erhalten somit für die Koëffizienten und absoluten Glieder der **Normalgleichungen** folgende einfache Werte:

$$[\alpha\alpha]\, r = [\alpha\alpha] - \frac{[\alpha][\alpha]}{n}$$

$$[\alpha\beta]\, r = [\alpha\beta] - \frac{[\alpha][\beta]}{n}$$

$$[\alpha\omega]\, r = [\alpha\omega]$$

$$[\beta\beta]\, r = [\beta\beta] - \frac{[\beta][\beta]}{n}$$

$$[\beta\omega]\, r = [\beta\omega]$$

II. Beispiel

Bestimmungen des Punktes 53 nach inneren Richtungen.

I. Bildung der absoluten Glieder für die Bedingungsgleichungen.

Bezeichnung der gegebenen Punkte	Vorl. Südwinkel σ′			Mittel der Beobachtungen Rm			σ′ — Rm			r_0 = Km + σ′			$\omega = \sigma' - r_0$	k	kω	kωr
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″				
2	287	54	50	0	00	05	287	54	45	287	54	55	— 5	1·5	— 7·5	— 6·7
15	8	18	39	80	23	33	287	55	06	8	18	23	+ 16	0·8	+ 12·8	+ 13·6
16	48	42	15	120	47	30	287	54	45	48	42	20	— 5	0·9	— 4·5	— 3·7
4	74	35	45	146	40	56	287	54	49	74	35	46	— 1	1·1	— 1·1	— 0·3
1	173	48	08	245	53	23	287	54	45	173	48	13	— 5	0·7	— 3·5	— 2·7
						:5)		274	10				+ 16		+ 12·8	+ 13·6
						σ′ =	287	54	50				— 16		— 16·6	— 13·4
													0	:5)	— 3·8	+ 0·2
															— 0·8	

II Die Koëffizienten und absoluten Glieder für die Bedingungs- und Normalgleichungen.

Gegeb. Punkte	α	β	$\alpha\alpha$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma k\omega$	$\beta\beta$	$\beta\gamma k\omega$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$k\omega$
2	− 95·1	− 30·8	+ 9044	+ 2929	+ 309	+ 949	+ 99	− 46·1	− 14·9	− 6·7
15	+ 14·5	− 98·9	210	− 1434	+ 95	9781	− 653	+ 7·0	− 48·0	+ 13·6
16	+ 75·1	− 66·0	5640	− 4957	− 135	4356	+ 118	+ 36·4	− 32·0	− 3·7
4	+ 96·4	− 26·6	9293	− 2564	− 14	708	+ 4	+ 46·7	− 12·9	− 0·3
1	+ 10·8	+ 99·4	117	+ 1074	− 14	9880	− 130	+ 5·2	+ 48·2	− 2·7
	+ 196·8	+ 99·4		+ 4003	+ 404		+ 221			
	− 95·1	− 222·3		− 8955	− 163		− 783			
:5)	+ 101·7	− 122·9	+ 24304	− 4952	+ 241	+ 25674	− 562			
	+ 20·3	− 24·6	− 2065	+ 2500		− 3021				
Reduzierte Glieder			+ 22239	− 2452	+ 241	+ 22653	− 562			
			a_1	b_1	c_1	b_2	c_2			

Die Auflösung der Normalgleichungen ergibt sodann für die Koordinatenverbesserungen folgende Werte:

$$\delta y = + 0{\cdot}024\ ,\ \delta x = - 0{\cdot}008.$$

III. Ermittlung der Verbesserungen.

Gegebene Punkte	$\alpha\delta y$	$\beta\delta y$	$\gamma k\delta\sigma = \alpha\delta x + \beta\delta y$	$k\delta_\sigma$	$k\delta\sigma r$	$k\omega r$	$kv = k\delta_\sigma + k\omega r$	$k^2\omega^2$	k^2v^2	v
2	+ 0·78	− 0·74	+ 0·04	+ 0·1	+ 1·6	− 6·7	− 5·1	45	26	− 3·4
15	− 0·12	− 2·37	− 2·49	− 5·0	− 3·5	+ 13·6	+ 10·1	185	102	+ 12·4
16	− 0·62	− 1·58	− 2·20	− 4·4	− 2·9	− 3·7	− 6·6	14	44	− 7·3
4	− 0·79	− 0·64	− 1·43	− 2·8	− 1·3	− 0·3	− 1·6	0	3	− 1·4
1	− 0·09	+ 2·38	+ 2·29	+ 4·6	+ 6·1	− 2·7	+ 3·4	7	12	+ 4·9
				+ 4·7	+ 7·7	+ 13·6	+ 13·5	251	187	
				− 12·2	− 7·7	− 13·4	− 13·3			
			:5)	− 7·5	0·0	+ 0·2	+ 0·2			
				− 1·5						

(Fortsetzung folgt:)

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration:
Wien, III. Kübeckgasse 12.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.

Erscheint am 1. und 16. jeden Monats.
Preis:
12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme
durch
Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei
Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr 7. Wien, am 1. April 1904. II. Jahrgang.

Die Koëffizienten für die Bedingungs- und Normalgleichungen beim Ausgleiche trigonometrischer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Von **Ernst Engel**, Obergeometer und Honorardozent.

(Fortsetzung und Schluß).

III. Beispiel.

Bestimmung des Punktes 2 durch kombiniertes Einschneiden.

I. Bildung der absoluten Glieder für die Bedingungsgleichungen.

Bezeichnung der gegebenen Punkte	Vorläufiger Südwinkel σ'			Mittel der Beobachtungen Rm			σ' — Rm			$r'_0 = R_0 \pm 180°$ / $r_0 = Rm + 0'$			ω: $\sigma' - r'_0$ / $\sigma' - r_0$	k	kω	$k\omega_r$
	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"				
Äußere Richtungen.																
Spielberg	68	12	25·8							68	12	25	+0·8	4·01	+ 3·2	
4	94	01	56·0							94	02	04	−8·0	2·49	−19·9	
1	128	09	43·9							128	09	43	+0·9	1·93	+ 1·7	
Stromberg	154	38	22·1							154	38	19	+3·1	4·95	+15·3	
Innere Richtungen.																
Spielberg	68	12	25·8	273	34	12	154	38	13·8	68	12	29·3	−3·5	4·01	−14·0	−14·8
4	94	01	56·0	299	23	40	154	38	16·0	94	01	57·3	−1·3	2·49	− 3·2	− 4·0
1	128	09	43·9	333	31	29	154	38	14·9	128	09	46·3	− 2·4	1·93	− 4·6	− 5·4
Stromberg	154	38	22·1	0	00	03	154	38	19·1	154	38	20·3	+1·8	4·95	+ 8·9	+ 8·1
Hadi	225	59	04·0	71	20	38	154	38	26·0	225	58	55·3	+8·7	2·27	+19·7	+18·9
3	348	31	40·3	193	53	26	154	38	14·3	348	31	43·3	− 3·0	0·72	− 2·2	− 3·0
								:6)	104·1				+10·5		−28·6	+27·0
						o·	154	38	17·3				−10·2		−24·0	−27·2
													+ 0·3	:6)	+ 4·6	− 0·2
															+ 0·8	

II. Die Koëffizienten und absoluten Glieder für die Bedingungs- und Normalgleichungen.

Gegebene Punkte	Richtungen	α	β	$\alpha\alpha$	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma k\omega$	$\beta\beta$	$\beta\gamma k\omega$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$k\omega$
Spielberg	äußere	+92·9	—37·1	+8630	—3447	+ 144	+1376	— 58	+45·0	—18 0	+ 3·2
4		+99·8	+ 7·0	9960	+ 699	— 963	49	— 68	+48·4	+ 3·4	— 19·9
1		+78,6	+61·8	6178	+4857	+ 65	3819	+ 51	+38·1	+30·0	+ 1·7
Stromberg		+42·8	+90·4	1832	+3869	+ 318	8172	+670	+20·8	+43·8	+15·3
Spielberg	innere	+92·9	—37·1	8630	—3447	— 666	1376	+266	+45·0	—18 0	—14·8
4		+99·8	+ 7·0	9960	+ 699	— 194	49	— 14	+48·4	+ 3·4	— 4·0
1		+78·6	+61·8	6178	+4857	— 206	3819	—162	+38·1	+30·0	— 5·4
Stromberg		+42·8	+90·4	1832	+3869	+ 168	8172	+355	+20·8	+43 8	+ 8·1
Hadi		—71·9	+69·5	5170	—4997	— 660	4830	+637	—34·9	+33·7	+18·9
3		—19·9	—98·0	396	+1950	+ 29	9604	+143	— 9·7	—47·5	— 3·0
		+314·1	+228·7	+58766	+20800	+ 724	+41266	+2122			
		—91·8	—135·1		—11891	—2689		— 302			
: 6)		+222·3	+93·6								
		+37·0	+15·6								
				+58766	+ 8909	—1965	+41266	+1820			
Reduktionsglieder				— 8225	— 3468		— 1460				
				+50541	+ 5441	—1965	+39806	+1820			
				a_1	b_1	c_1	b_2	c_2			

Die Auflösung der Normalgleichungen ergibt sodann für die Koordinatenverbesserungen die folgenden Werte: $\delta y = -0{\cdot}052$, $\delta x = +0{\cdot}045$.

Die Bestimmung der an den einzelnen Richtungen anzubringenden Verbesserungen erfolgt analog dem im Beispiele 1 und 2 beobachteten Verfahren.

Durch die Vorführung dieses Beispieles sei das in Heft Nr. 7 des ersten Jahrganges dieser Zeitschrift veröffentlichte, bei welchem eine Reduktion bezüglich der inneren Richtung nicht stattgefunden hat, berichtigt.

IV. Beispiel.

Bestimmung der Punkte 1, 4 und 5 im Zusammenhange.

I. Bildung der absoluten Glieder für die Bedingungsgleichungen.

Post-No.	Bezeichnung der Punkte	Richtungen	r' °	'	"	Km °	'	"	r'—Km °	'	"	$r'_0 - K_0 + 180°$ / $r_0 - Km - O'$ °	'	"	ω	k	kω	kω'
	Zu bestimmender Punkt 1.																	
1	Spielberg	äußere	39	28	10·1							39	28	09	+1·1	3·47	+3·8	
2	Kozja	äußere	99	02	48·3							99	02	49	−0·7	1·62	−3·2	
3	Stromberg	äußere	169	35	13·5							169	35	12	+1·5	3·33	+5·0	
4	Hadi	äußere	263	04	01·9							263	04	03	−1·1	3·17	−3·5	
5	Neuer Berg	äußere	321	20	34·2							321	20	34	+0·2	3·47	+0·7	
6	Spielberg	innere	39	28	10·1	229	52	51	169	35	19·1	39	28	09·0	+1·1	3·47	+3·8	+4·1
7	4	innere	43	41	35·8	234	06	15			20·8	43	41	33·0	+2·8	1·41	+3·9	+4·2
8	Kozja	innere	99	02	48·3	289	27	28			20·3	99	02	16·0	+2·3	4·62	+10·6	+10·9
9	Stromberg	innere	169	35	13·5	0	00	00			13·5	169	35	18·0	−4·5	3·33	−15·0	−14·7
10	Hadi	innere	263	04	01·9	93	28	46			15·9	263	04	04·0	−2·1	3·17	−6·7	−6·4
11	5	innere	345	47	20·4	176	12	02			18·4	345	47	20·0	+0·4	4·73	+1·9	+2·2
								:(6)			168·0						+20·2	+21·4
								O' =	169	35	18·0						−21·7	−21·1
																:(6)	−1·5	+0·3
																	−0·3	
	Zu bestimmender Punkt 4.																	
12	Spielberg	äußere	36	36	25·9							36	36	27	−1·1	2·07	−2·3	
13	Kozja	äußere	115	53	51·6							115	53	58	−6·4	3·99	−25·5	
14	Strombg.	äußere	184	54	10·0							184	54	11	−1·0	1·31	−1·3	
15	Hadi	äußere	251	13	57·6							251	13	59	−1·4	4·35	−6·1	
16	Neuer Berg	äußere	298	22	05·0							298	22	05	0·0	3·57	0·0	
17	Spielberg	innere	36	36	25·9	211	42	21	184	54	04·9	36	36	21·3	+1·6	2·07	+3·3	+5·9
18	Kozja	innere	115	53	51·6	290	59	55		53	56·6	115	53	58·3	−6·7	3·99	−26·7	−24·4
19	Strombg.	innere	184	54	10·0	0	00	07		54	03·0	184	54	10·3	−0·3	1·31	−1·3	+1·3
20	1	innere	223	41	35·8	38	47	27		54	08·8	223	41	30·3	+5·5	1·41	+7·8	+10·4
21	Hadi	innere	251	13	57·6	66	19	53		54	01·6	251	13	56·3	+1·3	4·35	+5·7	+8·3
22	Neuer Berg	innere	298	22	05·0	113	28	03		54	02·0	298	22	06·3	−1·3	3·57	−4·6	−2·0
								:(6)			19·9						+16·8	+25·9
								O' =	184	54	03·3						−32·6	−26·1
																:(6)	−15·8	−0·2
																	−2·6	
	Zu bestimmender Punkt 5.																	
23	Langenf.	äußere	56	59	44·3							56	59	41	+3·3	5·41	+18·0	
24	Spielberg	äußere	119	25	33·1							119	25	32	+1·1	3·87	+4·3	
25	Neuer Berg	äußere	208	23	41·7							208	23	42	−0·3	2·12	−0·6	
26	Langenf.	innere	56	59	44·3	57	00	08	359	59	36·3	56	59	40·6	+3·7	5·41	+20·1	+18·9
27	Spielberg	innere	119	25	33·1	119	26	00			33·1	119	25	32·6	+0·5	3·87	+1·9	+0·7
28	1	innere	165	47	20·4	165	47	51			29·4	165	47	23·6	−3·2	4·73	−15·1	−16·3
29	Neuer Berg	innere	208	23	41·7	208	24	10			31·7	208	23	42·6	−0·9	2·12	−1·9	−3·1
									:(4)		130·5						+22·0	+19·6
								O' =	359	59	32·6						−17·0	−19·4
																:(4)	+5·0	+0·2
																	1·2	

II. Die Koëffizienten der Bedingungsgleichungen.

Post-Nr.	Zu bestimmender Punkt	Richtungen	Bezeichnung der Punkte	α_1	β_1	α_4	β_4	α_5	β_5
1	1	äußere	Spielberg	+ 63·6	— 77·2				
2			Kozja	+ 98·8	+ 15·7				
3			Stromberg	+ 18·1	+ 98·3				
4			Hadi	— 99·3	+ 12·1				
5			Neuer Berg	— 62·4	— 78·1				
6		innere	Spielberg	+ 63·6	— 77·2				
7			4	+ 69·1	— 72·3	— 69·1	+ 72·3		
8			Kozja	+ 98·8	+ 15·7				
9			Stromberg	+ 18·1	+ 98·3				
10			Hadi	— 99·3	+ 12·1				
11			5	— 24·6	— 96·9			+ 24·6	+ 96·9
				+249·6	+126·1				
				—123·9	—246·5				
			:6)	+125·7	—120·3	— 69·1	+ 72·3	+ 24·6	+ 96·9
				+ 21·0	— 20·1	— 11·5	+ 12·1	+ 4·1	+ 16·2
12	4	äußere	Spielberg			+ 59·6	— 80·3		
13			Kozja			+ 89·9	+ 43·7		
14			Stromberg			— 8·5	+ 99·6		
15			Hadi			— 94·7	+ 32·2		
16			Neuer Berg			— 88·0	— 47·5		
17		innere	Spielberg			+ 59·6	— 80·3		
18			Kozja			+ 89·9	+ 43·7		
19			Stromberg			— 8·5	+ 99·6		
20			1	+ 69·1	— 72·3	— 69·1	+ 72·3		
21			Hadi			— 94·7	+ 32·2		
22			Neuer Berg			— 88·0	— 47·5		
						+149·5	+247·8		
						—260·3	—127·8		
			:6)	+ 69·1	— 72·3	—110·8	+120·0		
				+ 11·5	— 12·1	— 18·5	+ 20·0		
23	5	äußere	Langenfeld					+ 83·8	— 54·5
24			Spielberg					+ 87·1	+ 49·1
25			Neuer Berg					— 47·6	+ 87·9
26		innere	Langenfeld					+ 83·8	— 54·5
27			Spielberg					+ 87·1	+ 49·1
28			1	— 24·6	— 96·9			+ 24·6	+ 96·9
29			Neuer Berg					— 47·6	+ 87·9
								+195·5	+233·9
								— 47·6	— 54·5
			:4)	— 24·6	— 96·9			+147·9	+179·4
				— 6·2	— 24·2			+ 37·0	+ 44·9

III. Bildung der Koëffizienten und absoluten Glieder der Normalgleichungen.

Post-No	$\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_1\beta_1$	$\beta_1\beta_1$	$\alpha_1\gamma$	$\beta_1\gamma$	$\alpha_1\gamma k\omega$	$\beta_1\gamma k\omega$	$k\omega$
1	+4045	—4910	+5960	+30·8	—37·4	+117	—142	+3·8
2	9761	+1551	246	+47·9	+7·6	—153	—24	—3·2
3	328	+1779	9663	+8·8	+47·7	+44	+239	+5·0
4	9860	—1202	146	—48·1	+5·9	+168	—21	—3·5
5	3894	+4873	6100	—30·3	—37·9	—21	—27	+0·7
6	4045	—4910	5960	+30·8	—37·4	+126	—153	+4·1
7	4775	—4996	5227	+33·5	—35·1	+141	—147	+4·2
8	9761	+1551	246	+47·9	+7·6	+522	+83	+10·9
9	328	+1779	9663	+8·8	+47·7	—129	—701	—14·7
10	9860	—1202	146	—48·1	+5·9	+308	—38	—6·4
11	605	+2384	9390	—11·9	—47·0	—26	—103	+2·2
	$\alpha_4\alpha_4$	$\alpha_4\beta_4$	$\beta_4\beta_4$	$\alpha_4\gamma$	$\beta_4\gamma$	$\alpha_4\gamma k\omega$	$\beta_4\gamma k\omega$	$k\omega$
12	+3552	—4786	+6448	+28·9	—38·9	—66	+89	—2·3
13	8082	+3929	1910	+43·6	+21·2	—1116	—543	—25·6
14	72	—847	9920	—4·1	+48·3	+18	—208	—4·3
15	8968	—3049	1037	—45·9	+15·6	+280	—95	—6·1
16	7744	+4180	2256	—42·7	—23·0	0	0	0·0
17	3552	—4786	6448	+28·9	—38·9	+171	—230	+5·9
18	8082	+3929	1910	+43·6	+21·2	—1051	—511	—24·1
19	72	—847	9920	—4·1	+48·3	—5	+63	+1·3
20	4775	—4996	5227	—3·5	+35·1	—348	+365	+10·4
21	8968	—3049	1037	—45·9	+15·6	—381	+129	+8·3
22	7744	+4180	2256	—42·7	—23·0	+85	+46	—2·0
	$\alpha_5\alpha_5$	$\alpha_5\beta_5$	$\beta_5\beta_5$	$\alpha_5\gamma$	$\beta_5\gamma$	$\alpha_5\gamma k\omega$	$\beta_5\gamma k\omega$	$k\omega$
23	+7022	—4567	+2970	+40·6	—26·4	+731	—475	+18·0
24	7586	+4277	2411	+42·2	+23·8	+181	+102	+4·3
25	2266	—4184	7726	—23·1	+42·6	+14	—26	—0·6
26	7022	—4567	2970	+40·6	—26·4	+767	—499	+18·9
27	7586	+4277	2411	+42·2	+23·8	+30	+17	+0·7
28	605	+2384	9390	+11·9	+47·0	—194	—766	—16·3
29	2266	—4184	7726	—23·1	+42·6	+72	—133	—3·1

IV. Die Koeffizienten und absoluten Glieder der Normalgleichungen.

Post-No.		$\alpha_1]$	$\beta_1]$	$\alpha_4]$	$\beta_4]$	$\alpha_5]$	$\beta_5]$	$\gamma k\omega$
1		+4045	−4910					+ 117
2		9761	+1551					— 153
3		328	+1779					+ 44
4		9860	−1202					+ 168
5		3894	+4873					— 21
6	$[\alpha_1$	4045	−4910					+ 126
7		4775	−4996	−4775	+4996			+ 141
8		9761	+1551					+ 522
9		328	+1779					— 129
10		9860	−1202					+ 308
11		605	+2384			— 605	−2384	— 26
20		4775	−4996	−4775	+4996			+ 348
28		605	+2384			— 605	−2384	+ 194
		+62642	−5915	−9550	+9992	−1210	−4768	+1639
Red. glied		— 3587	+2795	+2725	— 2903	+ 395	— 930	—.—
Red. Koëf		+59055	−3120	−6825	+7089	— 815	−5698	+1639
1			+5960					— 142
2			246					— 24
3			9663					+ 239
4			146					— 21
5			6100					— 27
6	$[\beta$		5960					— 153
7			5227	+4996	−5227			— 147
8			246					+ 83
9			9663					— 701
10			146					— 38
11			9390			−2384	−9390	— 103
20			5227	+4996	−5227			— 365
28			9390			−2384	−9390	+ 766
			+67364	+9992	−10454	−4768	−18780	— 633
		Reduktgl	— 5638	−2721	+ 2902	+4078	+ 6300	
		Red. Koëff.	+61726	+7271	−7552	— 690	−12480	— 633

Post-Nr.		α_1]	β_1]	α_4]	β_4]	α_5]	β_5]	$\gamma_{k\omega}$]
7				+4775	−4996			−141
12				3552	−4786			−66
13				8082	+3929			−1116
14				72	−847			+18
15	[α_4			8968	−3049			+289
16				7744	+4180			0
17				3552	−4786			+171
18				8082	+3929			−1051
19				72	−847			−5
20				4775	−4996			−348
21				8968	−3049			−384
22				7744	+4180			+85
				+66386	−11138			−2546
		Reduktionsglied		−2845	+3052	+283	+1119	
		Red. Koëff.		+63541	−8086	+283	+1119	−2546
7					+5227			+147
12					6448			+89
13					1910			−543
14					9920			−208
15	[β_4				1037			−95
16					2256			0
17					6448			−230
18					1910			−511
19					9920			+63
20					5227			+365
21					1037			+129
22					2256			+46
					+53596			−748
		Reduktionsglied.			−3275	−296	−1171	
		Red. Koëff.			+50321	−296	−1171	−748
11						+605	+2384	+26
23						7022	−4567	731
24						7586	+1277	181
25	[α_5					2266	−4184	+14
26						7022	−4567	+767
27						7586	+4277	+30
28						605	+2384	−194
29						2266	−4184	+72
						+34968	−4180	
				Reduktionsglied.		−5573	−7040	+1627
				Red. Koëff.		+29385	−11220	+1627
11							+9390	+103
23							2970	475
24							2411	+102
25	[β_5						7726	+26
26							2970	−499
27							2411	+17
28							9390	−766
29							7726	−133
							+44994	−1677
				Reduktionsglied.			−9625	
				Red. Koëff.			+35369	−1677

Es lauten somit die reduzierten Normalgleichungen:

δx_1	δy_1	δx_4	δy_4	δx_5	δy_5	abs. Glied	
+59055	− 3120	− 6825	+ 7089	− 815	− 5698	+ 1639	= 0
− 3120	+61726	+ 7271	− 7552	− 690	−12480	− 633	= 0
− 6825	+ 7271	+63541	− 8086	+ 283	+ 1119	− 2546	= 0
+ 7089	− 7552	− 8086	+50321	− 296	− 1171	− 748	= 0
− 815	− 690	+ 283	− 296	+29385	−11220	+ 1627	= 0
− 5698	−12480	+ 1119	− 1171	−11220	+35369	− 1677	= 0

Die Auflösung der Normalgleichungen ergibt folgende Koordinatenverbesserungen:

−0·0225	+0·0151	+0·0394	+0·0272	−0·0424	+0·0350		

Entsprechen unsere heutigen Katastralmappen allen an sie gestellten Anforderungen?

Kritische Betrachtung von Professor **Friedrich Croy**.

(Fortsetzung und Schluß).

3. Die heutigen Anforderungen an die Katastralmappen.

Im ersten Abschnitte dieser Betrachtungen wurde nachgewiesen, daß der einzige Zweck, den man bei der Katastralvermessung klar im Auge hatte, nur die Ermittlung der richtigen Flächenmaße des steuerbaren und steuerfreien Bodens nach dem faktischen Besitze für eine gerechte Verteilung der Grundsteuer war.

Zu dieser Forderung, welche die Katastralmappen auch heute noch zu erfüllen haben, und welcher sie auch gerecht werden, soweit die Parzellengrenzen unverändert geblieben sind, sind im Laufe der Zeit noch wesentlich andere Anforderungen gekommen, welche seiner Zeit nicht im Zwecke der Katastralvermessung gelegen waren.

In dieser Hinsicht ist hauptsächlich zu nennen: die Verwendung der Katastralmappen zu Begrenzungen, und die Verwendung zur Herstellung von Forstkarten.

Verwendung der Katastralmappen zu Begrenzungen.

Wenn die Grenzen zwischen Grundstücken verschiedener Besitzer strittig sind, so ist heute die wichtigste, zumeist sogar die einzige Grundlage für die