Paper-ID: VGI_190420

Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Neustift bei Scheibbs*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **2** (12, 13, 14, 15, 16), S. 181–190, 197–210, 213–219, 229–235, 246–253

1904

BibTeX:


```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_190420,
Title = {Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer
   Systeme},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {181--190, 197--210, 213--219, 229--235, 246--253},
Number = {12, 13, 14, 15, 16},
Year = {1904},
Volume = {2}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN

Redaktion und Administration: Wien, III. Kübeckgasse 12.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.

Erscheint am 1. und 16. jeden Monats.
Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch
Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei
Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr. 12. Wien, am 16. Juni 1904. II. Jahrgang.

Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme.

Von S. Wellisch, Oberingenieur der Stadt Wien.

»Aus der Mannigfaltigkeit der Kombinationen diejenigen auszuwählen, welche der Sache am besten dienen, ist unstreitig bei der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften eine der wichtigsten Aufgaben.«

(Gauß: Theoria combinationis.)

Einleitung.

Jeder unregelmäßige Beobachtungsfehler ist als die algebraische Summe einer großen Anzahl von Einzelfehlern anzusehen, die verschiedenen Fehlerquellen entspringen. Die Ursachen dieser Fehler sind so beschaffen, daß ihre Wirkungsweise von veränderlichen Umständen abhängt, welche unter sich und mit den Beobachtungen selbst in keinem wesentlichen Zusammenhange zu stehen scheinen und somit so aufgefaßt werden können, wie von außenher wirkende Kräfte, welche von Beobachtung zu Beobachtung sich ändern und demgemäß die einzelnen Beobachtungsresultate in unregelmäßiger Weise, insbesondere auch in positivem und negativem Sinne gleich wahrscheinlich deformieren.

Im Geiste dieser Betrachtung kann jede Messungsgröße, sei es eine Länge oder eine Richtung, verglichen werden mit einem dünnen elastischen Stabe, welcher vermöge der Elastizität des Materiales die Eigenschaft besitzt, durch äußere

Ursachen innerhalb gewisser Grenzen sich zu deformieren und nach Aufhören der äußeren Einwirkungen in die ursprüngliche Form wieder zurückzukehren. Die wahre Messungsgröße ist dann zu betrachten, wie ein Stab in seinem spannungslosen Anfangszustande, während die mit unregelmäßigen Beobachtungsfehlern behafteten Größen den durch verschiedene äußere Kräfte einzeln beanspruchten und daher auch verschieden deformierten Stab vorstellen. Bei gleichzeitigem Zusammenwirken aller äußern Kräfte auf einen und denselben Stab wird nach Verrichtung einer Summe von mechanischen Arbeiten schließlich ein Gleichgewichtszustand eintreten, welcher der ausgeglichenen Größe entspricht. In diesem Zustande des Gleichgewichtes und der Ruhe erfolgt im Sinne des natürlichen Erhaltungsprinzips für den Stab eine solche Formveränderung und bleibt in ihm eine Spannung von solcher Größe zurück, daß die in seinem Innern in gebundener Form aufgespeicherte Arbeit oder Energie ein Minimum wird.

Seit Jul. Rob. Mayer's Forschungen auf dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie hat das Wort »Arbeit« oder »Energie« einen so achtungsgebietenden Klang erhalten, daß — wie ein Gelehrter bildlich sich ausdrückt — »fast jeder Naturforscher den Hut zieht, wenn von ihr die Rede ist«. Es sei daher gestattet, uns etwas eingehender mit dieser »ungemein exzellenten Größe« zu befassen.

I. Die Theorie der Deformationsarbeit.

Wirken auf ein elastisches Stabsystem, das unserer Auffassung gemäß mit einer geometrischen Messungsfigur vergleichbar ist, äußere Kräfte in der Weise ein, daß sie sich gegenseitig das Gleichgewicht halten und das System als Ganzes keine Bewegung machen kann, so treten im Innern des Systems Spannungen auf, welche mit Ortsveränderungen innerhalb der Elastizitätsgrenze des Stabmateriales oder innerhalb der zulässigen Fehlergrenze bei Beobachtungen verbunden sind. Indem auf diese Weise auch die Kraftangriffspunkte kleine Verrückungen erfahren, leisten die äußeren Kräfte in mechanischem Sinne eine Arbeit, welche in der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme als Deformationsarbeit bezeichnet wird. Die von den äußern Kräften geleistete Arbeit bleibt nämlich in gebundenem Zustande als Energie im Innern des elastischen Systems zurück, wo sie sich in den auftretenden Spannungen äußert und dadurch kundgibt, daß sie nach dem Entfernen der äußern Kräfte das deformierte System in die ursprüngliche Form wieder zurückführt. Diese Arbeit läßt sich also sowohl als Funktion der äußern Kräfte und der betreffenden Verschiebungen ihrer Angriffspunkte, als auch als die Summe der im Innern des Systems angesammelten Energie auffassen und demgemäß auch in zweifacher Weise ausdrücken.

Zu diesem Behufe denken wir uns aus einem im Gleichgewichte gehaltenen Stabsystem einen einzelnen Stab herausgegriffen und die an den andern Stäben wirklich tätigen Spannungen durch Gegenkräfte ersetzt, welche an dem herausgegriffenen Stab den bestandenen Gleichgewichtszustand wieder herstellen. Dann wird eine neu hinzutretende Kraft bei dem einzelnen Stab — für sich allein betrachtet — dieselbe Formveränderung erzeugen, wie in Verbindung mit dem ganzen Systeme. Von diesem statischen Gesichtspunkte aus wollen wir zunächst die Wirkung einer äußern Kraft auf einen einzelnen materiellen Stab betrachten, um sodann auf die Messungslinie und den Strahl überzugehen.

1.) Wenn sich ein gerader elastischer Stab durch die Einwirkung einer in seiner Achse tätigen Kraft, einer Achsial- oder Normalkraft, von seiner ursprünglichen Länge l bis zur Länge $l \pm \lambda_p$ ausdehnt oder verkürzt, so zwar, daß die Kraft infolge der Elastizität des beanspruchten Stabes nur allmählich, in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis zu ihrem Endwerte P anwächst, so ist die Arbeit dieser Kraft oder die Arbeit einer sofort mit ihrem Endwerte einwirkenden, jedoch mit ihrem Angriffspunkte nach und nach von Null bis λ_p nachrückenden oder zurückweichenden Kraft ausgedrückt durch das begrenzte Integral $\int_0^{\lambda_p} P . d \lambda_p$

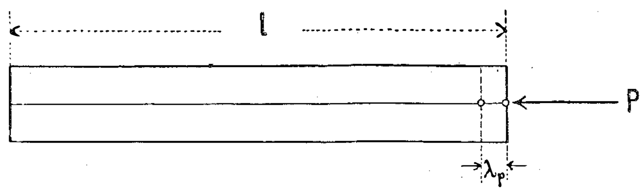


Fig. 1.

Ist P die Achsialspannung des homogenen Stabes,
l dessen Länge,
F die Fläche des Querschnittes,
λ_p die Verlängerung oder Verkürzung,
E der Elastizitätskoeffizient der Dehnung,
so lautet die Elastizitätsgleichung:

$$\lambda_p = \frac{P\,l}{E\,F}$$

und es ist hieraus:

$$P = \frac{E\,F}{l} . \lambda_p \text{ und } d\,\lambda_p = \frac{1}{E\,F} . d\,P.$$

Setzt man den Wert für P unter das Integralzeichen, so erhält man für die innere Deformationsarbeit:

$$A_p = \int_0^{\lambda_p} P . d\,\lambda_p = \frac{E\,F}{l} \int_0^{\lambda_p} \lambda_p . d\,\lambda_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{E\,F}{l} . \lambda_p^2.$$

Setzt man hingegen den Wert für d λ_p unter das Intregralzeichen, so erhält man die Arbeit der äußern Kraft:

$$A_p = \int_0^{\lambda_p} P . d\,\lambda_p = \frac{1}{E\,F} \int_0^{P} P . d\,P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E\,F} . P^2 = \frac{1}{2} \lambda_p\,P.$$

Aus dem Umstande, daß die innere Deformationsarbeit auch in einer Funktion der äußern Kraft ausgedrückt werden kann, geht hervor, daß die

Deformationsarbeit nur von dem Endwerte der äußern Kräfte und nicht von dem Gesetze abhängig ist, nach welchem diese Kräfte von Null bis zu ihrem Endwerte wachsen. Weiter erhellt daraus, daß die von einer Kraft geleistete Arbeit, welche bei starren Systemen gleich ist dem Produkte aus der Kraft in die zur Kraftrichtung projektierte Verschiebung, bei elastischen Systemen nur halb so groß ist.

2. Wirkt auf einen geraden, elastischen Stab eine an einem seiner Enden angreifende, normal zur Stabachse gerichtete Kraft, eine Quer- oder Schubkraft Q, welche, da der von den Gegenkräften gehaltene Stab sich nicht von der Stelle rühren kann, den Endquerschnitt um den der Schubelastizität entsprechenden Betrag λ_q verschiebt, so daß die in der Stabachse gelegene Faser um den kleinen Winkel $v = \frac{\lambda_q}{l}$ abgelenkt wird, so ist die dabei verrichtete äußere Schubarbeit ausgedrückt durch:

$$A_q = \frac{1}{2} \lambda_q Q.$$

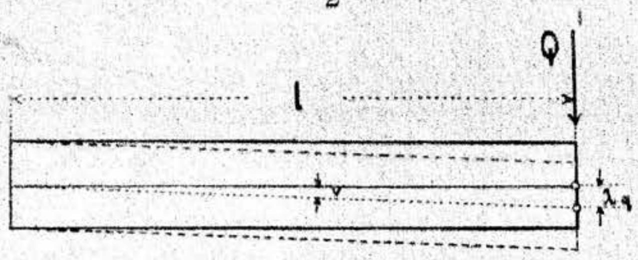


Fig. 2

Setzt man hierin für Q den aus der Elastizitätsgleichung für Schiebung sich ergebenden Betrag:

$$Q = \frac{G F}{l} \lambda_q$$

worin G den Gleitmodul oder den Elastizitätskoeffizienten der Schiebung bedeutet, so erhält man die innere Deformationsarbeit:

$$\mathfrak{A}_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{G F}{l} \cdot \lambda_q^2.$$

Hiezu ist die Bemerkung zu machen, daß die Stabachse nicht eine Biegung wie ein an einem Ende eingespannter Stab, sondern eine Drehung erfährt, da nach der Elastizitätsgleichung die Querverschiebung λ_q der Stablänge l direkt proportional ist, daß aber diese Drehung bloß als die Folge der elastischen Schubwirkung aufzufassen, nicht aber zu verwechseln ist mit den dynamischen Bewegungserscheinungen eines an einem Ende gelenkartig befestigten und an seinem freien Ende von einer äußern Transversalkraft beanspruchten Stabes, welcher keinen elastischen Schub, sondern eine dynamische Ablenkung erleidet.

3.) Was für Achsial- und Querkräfte gilt, findet auch auf beliebig gerichtete Kräfte sinngemäße Anwendung. Wirkt auf einen geraden elastischen Stab eine Kraft R, deren Richtung im Allgemeinen geneigt ist zur Stabachse

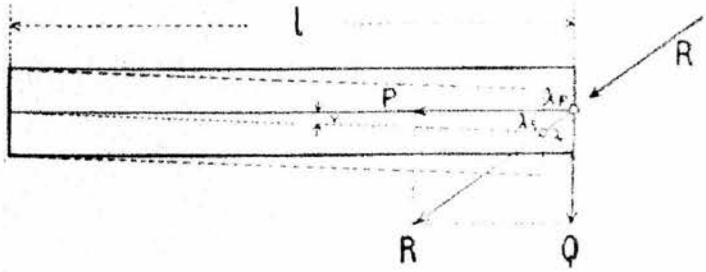


Fig. 3.

und deren Angriffspunkt im Schwerpunkte des einen Endquerschnittes liegt, so wird der Stab nicht nur in seiner Länge verändert, sondern auch gedreht. Denn denkt man sich die Kraft R in zwei Komponenten zerlegt, und zwar in eine Achsialkomponente P und in eine Querkomponente Q, so bewirkt die erste eine Längsverschiebung λ_p, die zweite eine Querverschiebung λ_q und es ist die Deformationsarbeit der schief gerichteten Resultierenden R gleich der Summe:

$$A = A_p + A_q = \frac{1}{2}\frac{E\,F}{l}\lambda_p^2 + \frac{1}{2}\frac{G\,F}{l}\lambda_q^2.$$

4.) Treffen in einer Ecke mehrere Stäbe zusammen, so ist die Deformationsarbeit aller durch die äußern Kräfte in den Stäben geweckten Widerstände gleich der Summe:

$$\mathfrak{A} = \sum A = \frac{1}{2}\sum \frac{E\,F}{l}\lambda_p^2 + \frac{1}{2}\sum \frac{G\,F}{l}\lambda_q^2,$$

welche Arbeitssumme den geringsten Wert erlangt, wenn dabei die geringsten Formänderungen und zugleich die geringsten Spannungen erzeugt werden, was offenbar im Zustande der wieder eingetretenen Ruhe immer der Fall sein muß. Es wird also nach beendeter Deformation die in den Stäben des elastischen Systems verbleibende Energie diejenige sein, welche die Summe der mit den entsprechenden Elastizitätsfaktoren multiplizierten Quadrate der auf die Kraftrichtung projezierten Verschiebungen zu einem Minimum macht.

Dieses Prinzip geht unmittelbar hervor aus dem Lehrsatz von der kleinsten Arbeit, der von dem französischen Kapitän V è n e im Jahre 1818 entdeckt worden ist, den aber erst im Jahre 1873 C a s t i g l i a n o in seiner Diplomsdissertation als Ingenieur in Turin zum erstenmale strenge bewiesen hat.

II. Anwendbarkeit des Prinzips der kleinsten Deformationsarbeit auf geodätische Operationen

Vergleicht man ein geometrisches Liniengebilde, z. B. eine Messungslinie, einen Polygonzug oder ein Triangulierungsnetz, mit einem elastischen Systeme: einem Balken, einem Gitterträger oder einem Fachwerke, so lassen sich an der mit unregelmäßigen Beobachtungsfehlern behafteten Figur analoge Erscheinungen beobachten, wie an einem von äußern Kräften beanspruchten Stabsysteme ähnlicher Form, wobei die gemessene Länge oder die beobachtete Richtung die in der Stabachse gelegene Faser vertreten. Die Ursachen der

Längenfehler stellen dann die in der Richtung der Stabachse wirkenden Achsialkräfte dar, während die Ursachen der auftretenden Winkelfehler oder der Richtungsabweichungen an Stelle der Querkräfte treten. Für Biegungsmomente hat man in der praktischen Geometrie kein Analogon, weil geometrische Linien wie Stäbe von unendlich kleinen Querschnittsflächen, also wie Fäden aufzufassen sind, welche keine Querschnittsverdrehungen erleiden. Die Resultierende der Ursachen aller an einer Seite oder Richtung wirkenden Messungsfehler ist somit wie eine im allgemeinen schief gegen einen geraden Stab, aber durch den Schwerpunkt eines Endquerschnittes gehende Kraft zu betrachten, welche sich nur in eine Achsialkomponente und eine Querkomponente zerlegen läßt, aber kein Biegungsmoment erzeugt. Demgemäß entsprechen die an den Seiten und Richtungen einer geometrischen Messungsfigur anzubringenden Verbesserungen, welche die durch die begangenen Messungsfehler deformierte Figur in ihre natürliche Gestalt wieder möglichst zurückzuführen haben, jenen Verrückungen, durch welche die innern Achsial- und Querwiderstände überwunden werden sollen. Hiebei sind die Achsialwiderstände je nachdem sie als Spannungen oder Pressungen (Zug oder Druck — Verlängerung oder Verkürzung) sich äußern und die Querwiderstände, je nachdem sie in dem einen oder andern Sinne drehen, positiv oder negativ in Rechnung zu nehmen.

Entsprechend dieser Vorstellung hat man sich auch zu denken, daß bei jeder Ausgleichung von Beobachtungsresultaten innere Spannungen wachgerufen werden. Mit diesen Spannungen, welche im elastischen Systeme die Materialbeanspruchungen erzeugen, könnte man in geometrischer Bedeutung den einer zwangsweisen Änderung einer Beobachtung entgegengesetzten moralischen Widerstand oder die durch die vorzunehmende Änderung aufzuwendende Anstrengung oder kurz den »Zwang« bezeichnen, den man einer geometrischen Messungsfigur durch Änderung der Messungsgrößen antut. So wie die Materialbeanspruchung im elastischen Systeme im äußersten Falle einen Bruch herbeiführt, bewirkt eine übermäßige Änderung der Beobachtungsgrößen eines Messungssystems die Unvereinbarkeit mit seiner wahren natürlichen Gestalt; was in der Festigkeitslehre die zulässige Materialbeanspruchung besagt, bedeutet im Vermessungswesen die zulässige Fehlergrenze.

Die durch irgend ein Ausgleichungsverfahren in einem Liniensysteme stattfindenden Veränderungen äußern sich also nicht nur in den vollzogenen Punktverschiebungen allein, sondern auch in den, allen Beobachtungsstücken zukommenden Spannungen oder Zwangszuständen. Man kann nun eine Messungsfigur durch Anbringung verschiedener Verbesserungen verschieden deformieren, d. h. man kann nach verschiedenen Prinzipien ausgleichen, aber es werden dann nach jedem Verfahren andere Verschiebungen und andere Spannungen oder Zwangslagen von verschiedener Güte eintreten. Unter allen möglichen Ausgleichungsmethoden wird nun diejenige der Theorie der kleinsten Deformationsarbeit, somit auch dem Ausgleichungsgegenstande am besten dienen, welche eine der Gleichgewichtslage möglichst naheliegende Systemgestaltung oder die natürlichste Formveränderung der Messungsfigur erzeugt, was offenbar dann der Fall ist, wenn das geometrische System wie ein elastisches behandelt wird, d. h. wenn sowohl die vollzogenen Verschiebungen, als auch die zurückbleibenden Spannungen gleichzeitig solche Werte annehmen, daß die Summe ihrer Produkte ein Minimum werde. Nicht allein das »möglichst nahe Liegen« ist es, was das System am besten verändert, sondern gleichzeitig auch der »geringste Zwang«, der ihm dabei angetan wird.

Geschieht doch das Auftreten und der Verlauf aller Vorgänge in der Natur derart, daß der natürliche Zustand möglichst ungeändert bestehen bleibt, daß der ursprüngliche Zustand zwangweise sich nur so wenig als möglich ändert und mit dem Aufhören der äußern Einwirkungen, welche die aufgezwungenen Veränderungen herbeigeführt haben, der bestandene, natürliche Zustand sich wieder einstellt. Es ist ein den exakten Naturwissenschaften zu Grunde liegendes Prinzip, daß die Wirkung jeder Ursache einer Zustandsänderung so gering als möglich ist, indem die Natur jeder Änderung des von ihr hergestellten Gleichgewichtszustandes widerstrebt und bei gewaltsamen, das bestehende Gleichgewicht störenden Eingriffen den kürzesten und am schnellsten zum Ziele führenden Weg einschlägt, um diese Änderung vollführen zu lassen. Kurz, es liegt in den allgemeinen Naturgesetzen begründet, daß bei allen durch natürliche Kräfte besorgten Verrichtungen stets die geringste Arbeit geleistet wird. — Schwingende Bewegungen pflanzen sich auf den kürzesten Weg, geradlinig fort; das fließende Wasser schlägt von selbst immer die Linie des größten Gefälles ein; der freie Fall, der Wurf, die Planetenbewegungen u. s. w. sind Beispiele für das Prinzip der möglichsten Erhaltung des Naturzustandes, aus welchem das mechanische Prinzip der kleinsten Arbeit unmittelbar entspringt.

Angewendet auf die Ausgleichungsrechnung ist dieses Naturprinzip der Ausdruck dafür, daß die Formänderungen eines Messungssystems zutreffend sind mit denjenigen, welche eintreten würden, wenn das System ein elastisches wäre. Wird daher dieses Prinzip auf die Lösung von Aufgaben der Ausgleichungsrechnung angewendet, so hat man hiefür den natürlichsten Weg betreten, ob es gleich zugegeben werden muß, daß er nicht immer auch der einfachste und bequemste ist. Wenn es sich aber — um mit Prof. Czuber zu reden — »um Feststellung der Wahrheit handelt, darf Einfachheit und Bequemlichkeit der Rechnung nicht ausschlaggebend sein«.

Da nach diesem Prinzipe die Summe von Produkten zu einem Minimum gemacht wird, so sei der der Ausgleichung zu Grunde liegende Rechnungsvorgang als »die Methode der kleinsten Produkte« benannt, welche auch als eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet werden kann.

III. Beziehung der Methode der kleinsten Produkte zur Methode der kleinsten Quadrate.

Setzt man in dem Ausdrucke für die Deformationsarbeit

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \sum \frac{E\,F}{l} \cdot \lambda_p^2 + \frac{1}{2} \sum \frac{G\,F}{l} \cdot \lambda_q^2$$

an die Stelle von λ_p die Längenverbesserungen v' und an die Stelle von λ_q die durch die Richtungsverbesserungen v_r bewirkten Querverschiebungen $v'' = \frac{l\,v_r}{\varsigma}$, worin ς den Übergang von Bogenmaß in Gradmaß herstellt; führt man überall den konstanten Querschnitt $F = 1$ ein und ersetzt man die Elastizitätskoeffizienten E und G, das Maß der elastischen Ausdehnungsfähigkeit des Stabes in Bezug auf Dehnung und Gleitung, durch das in der Geodäsie das Genauigkeitsmaß einer Beobachtung ausdrückende Gewicht p, welche Zahlen den im gleichen Sinne auf die Verschiebungsgröße einflußnehmenden Faktor darstellen, so erhält man unter Einführung der Gauß'schen Schreibweise für Quadratsummen die allgemeine Arbeitsgleichung in der Form

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\left[\frac{p\,v'\,v'}{l}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{p\,v''\,v''}{l}\right]$$

oder allgemeiner:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\left[\frac{p\,v\,v}{l}\right]$$

und die Minimumsbedingung für die Methode der kleinsten Produkte:

$$\left[\frac{p\,v\,v}{l}\right] = \text{min.}$$

Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt, daß die Summe der Quadrate, beziehungsweise die Summe der mit den Gewichtszahlen multiplizierten Quadrate der Verbesserungen ein Minimum werde, nämlich: $[p\;v\;v] = \text{min.}$

Der Unterschied zwischen beiden Methoden besteht nun im wesentlichen darin, daß die Methode der kleinsten Quadrate die Quadratsumme der absoluten Verbesserungen, die Methode der kleinsten Produkte hingegen die Summe der auf die Längeneinheit reduzierten Quadrate der Verbesserungen zu einem Minimum werden läßt. Man kann diesen Unterschied auch in den Gewichten zum Ausdrucke bringen. Setzt man $\frac{p}{l} = \pi$ und nennt man π die reduzierten oder natürlichen Gewichte zum Unterschiede von den absoluten Gewichten p, so erscheinen beide Methoden in ihrer mathematischen Formulierung vollkommen gleich, denn die Ausdrücke $[p\;v\;v]$ und $[\pi\;v\;v]$ unterscheiden sich dann nur durch den numerischen Wert der einzelnen Faktoren. Es erscheint sohin die Methode der kleinsten Quadrate insofern als ein spezieller Fall der neuen Methode, als sie von der direkten Einflußnahme der Beobachtungen Abstand nimmt. Man könnte aber auch umgekehrt die neue Methode gewissermaßen als einen speziellen Fall der Gauß'schen Methode ansehen, indem zu der bedingungslos aufgestellten Forderung des »möglichst nahe Liegens« die Erfüllung einer speziellen, von den Beobachtungen oder von dem Fehlergesetze abhängenden Nebenbedingung, die Forderung des »geringsten Zwanges« hinzutritt. Im Vermessungswesen (Geodäsie und Astronomie), wo es sich nur um Längen und Richtungen handelt, werden beide Methoden nur in dem einen Falle identisch, in dem die Längenelemente sämtlicher Beobachtungsgrößen einander gleich sind, also wenn überall gleiche Seiten- oder Strahlenlängen in Betracht kommen.

In der praktischen Geometrie empfindet man bei Ausgleichungen von Längenfehlern die Nichtberücksichtigung des Längeneinflusses umsomehr, je größere Verschiedenheiten die in Betracht kommenden Längen verhältnismäßig aufweisen. Der Geometer sucht sich über diese Schwierigkeit dadurch hinwegzuhelfen, daß er ein der Natur der Längenmessung sich anpassendes Fehlergesetz aufzustellen bemüht ist, um es der Ausgleichungsrechnung als Bedingung zu Grunde zu legen und so den Einfluß der Verschiedenheit in den Seitenlängen indirekt in Berücksichtigung zu ziehen. Man hat umfassende Versuche angestellt, um auf empirischem Wege ein mit der Wahrscheinlichkeitstheorie im Einklange stehendes Fehlerverteilungsgesetz zu konstruieren und damit die Methode der kleinsten Quadrate mit dem »überall befriedigenden Verfahren durch Proportional-Verteilung« in Übereinstimmung zu bringen. Allein die vielen auf diesem Wege erhaltenen und zum Teil auch amtlich gebrauchten Verteilungsformeln, wie: al; $a + bl$; $a\sqrt{l}$; $al + b\sqrt{l}$; $\sqrt{a + bl^2}$; $\sqrt{al + bl^2}$; $\sqrt{a + bl + cl^2}$ u. s. w. lassen erkennen, daß die Frage nicht definitiv gelöst ist, oder vielmehr auf diesem Wege nicht gelöst werden kann. Es gibt demnach, sagt Prof. Dr. K. Reinhertz, »kein durch eine einfache Formel ausdrückbares und allgemein für jede beliebige Längenmessung giltiges Gesetz für die Anordnung der Längenmessungsfehler.« (Die Ergebnisse der Messung der Bonner Basis, in Zeitschr. f. Verm. 1896.) Bei Ausgleichungen von Richtungsbeobachtungen sind die Strahlenlängen nicht ohne weiters zu vernachlässigen, soll die Fehlerverteilung in natürlicher, gerechter Weise erfolgen. Nimmt man beispielsweise die Verteilung des Winkelwiderspruches beim Dreieckabschlusse vor, so wird der Winkelwiderspruch nach der Methode der kleinsten Quadrate auf alle drei Winkel zu gleichen Teilen aufgeteilt. Man kann sich aber dabei der Empfindung nicht verschließen, bei sehr spitzen Dreiecken nicht ganz unparteiisch vorgegangen zu sein, indem man den spitzen Winkel am wenigsten geändert sehen möchte, da er sonst die ihm gegenüberliegende kürzeste Seite, die ja auch direkt gemessen sein kann, in ungerechtfertigter Weise zu viel in Mitleidenschaft zieht. In ungenügender Kenntnis des natürlichen Fehlergesetzes könnte da die Einführung von Strahlengewichten der Ausgleichung zum Vorteile gereichen. Hat doch Dr. Reinhertz das allmähliche Abnehmen der Fehlergröße mit der Strahlenlänge aus seiner reichen Erfahrung bestätigt und ist dabei zu folgendem Schlusse gelangt: »Fällt bei rationell gestalteten Netzen der Gewichtsansatz im allgemeinen von selbst weg, so könnte man dagegen bei stark abweichenden Strahlenlängen die Einführung von Gewichten in Frage ziehen.« (Einige Bemerkungen über Kleintriangulierungen, in Zeitschr. f. Verm. 1892, S. 461). Wird nun nach der Methode der kleinsten Produkte ausgeglichen, so wird diesem Umstande insofern in befriedigender Weise Rechnung getragen, als durch die Anwendung des Prinzips der kleinsten Deformationsarbeit, wonach die Formänderung nur von der Einwirkung der Fehlerursachen, nicht aber von dem Fehlerfortpflanzungsgesetze abhängt, auch das ganze Ausgleichungsverfahren von vorneherein unabhängig gemacht wird von dem unbekannten Gesetze, nach welchem die Fehlerursachen bei Längen- und Winkelmessungen wirksam sind, und demgemäß die Ausgleichung so erfolgt, wie wenn sie nach der Methode der kleinsten Quadrate, jedoch unter Zugrundelegung eines **natürlichen** Fehlergesetzes und dementsprechender Strahlengewichte vorgenommen worden wäre.

In den folgenden Abschnitten sei die Methode der kleinsten Produkte an besondere Fällen der Ausgleichungsrechnung in Anwendung gebracht.

(Fortsetzung folgt.)

Ergänzung der Spezialgesetze, um dieselben mit den Vorschriften rücksichtlich des Katasters und Grundbuches in Einklang zu bringen.

Von **Friedrich Goethe,** k. k. Obergeometer.

Wie allgemein bekannt ist, bietet der Kataster mit seinen Mappen in den meisten Verwaltungszweigen oft die Basis zu Amtshandlungen und zu Verfügungen, die auf Grund verschiedener Gesetze und Verordnungen erlassen werden. Unter diesen will ich nur auf die vielen Gesetze bezüglich der agrarischen Operationen, die Gesetze bezüglich Anlegung neuer Grundbücher, ferners auf die bezugnehmenden Verordnungen und Erlässe der einzelnen Zentralstellen hinweisen, die heute zwar einen schon ganz bedeutenden Umfang angenommen haben, in der Praxis aber in vielen Fällen doch nicht das erreichten und erreichen konnten, was sie bezweckten.

Die Hauptursache in letzterer Hinsicht dürfte wohl die sein, daß eben diese Verordnungen in vielen Fällen ohne Mitwirkung des hiedurch tangierten zweiten oder dritten Verwaltungszweiges zusammengestellt und hinausgegeben wurden.

Das Evidenzhaltungsgesetz ist nach den Worten unseres Memorandums wohl eine der glücklichsten Schöpfungen auf dem Gebiete der Gesetzgebung und tief einschneidend in die wirtschaftlichen Fragen der grundbesitzenden Bevölkerung. Es findet daher unter letzterer auch überall den lebhaftesten Anklang und immer wieder werden Stimmen laut zu intensiveren Anwendung der darin enthaltenen Bestimmungen, wie Herbeiführung der Übereinstimmung des Grundbuches mit dem Kataster, Vermarkung der Besitzgrenzen, Neuvermessungen etc.

Leider gibt es jedoch andere Gesetze, die unserem Evidenzhaltungsgesetze und seinen Vollzugsbestimmungen nicht die beabsichtigte Wirkung

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III. Kübeckgasse 12. K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.	Erscheint am 1. und 16. jeden Monats. Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.	Expedition und Inseratenaufnahme durch Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr. 13. Wien, am 1. Juli 1904. II. Jahrgang.

Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme.

Von **S. Wellisch,** Oberingenieur der Stadt Wien.

(Fortsetzung).

IV. Ausgleichung direkter Beobachtungen.

Liegen wiederholte Beobachtungen einer und derselben Größe vor, z. B. mehrere Messungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$ einer Länge L und sind die Differenzen

$$L - l_1 = v_1$$
$$L - l_2 = v_2$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$L - l_n = v_n$$

die an den Beobachtungsgrößen anzubringenden Verbesserungen, so erklärt das Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit diejenige Länge als den natürlichsten Mittelwert, zu deren Erlangung durch Zurückführung der deformierten Längen die geringste Formänderungsarbeit erforderlich ist.

Die zu den einzelnen Längenänderungen aufzuwendenden Arbeiten sind:

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1}{L} \cdot v_1{}^2 = \frac{1}{2}\, p_1 \frac{(L - l_1)^2}{L}$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{p_2}{L} \cdot v_2{}^2 = \frac{1}{2}\, p_2 \frac{(L - l_2)^2}{L}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$A_n = \frac{1}{2}\frac{p_n}{L} \cdot v_n{}^2 = \frac{1}{2}\, p_n \frac{(L - l_n)^2}{L}$$

deren Summe ist $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\left[\frac{p\,v\,v}{L}\right] = \frac{1}{2}\left[p\,\frac{(L - l)^2}{L}\right]$

Sollen die Verschiebungen oder Verbesserungen $v = L - l$ die Deformationsarbeit $\mathfrak{A}$ zu einem Minimum machen, so ist der Differenzialquotient der Arbeit nach der veränderlichen l gleich Null zu setzen, das gibt, da L konstant ist, die Differenzialgleichung

$$\frac{d\,\mathfrak{A}}{d\,l} = \Big[p\,(L - l)\Big] = 0$$

somit ist

$$L\,[p] = [p\,l]$$

und

$$L = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

d. i. das allgemeine arithmetische Mittel.

Für gleich genaue Beobachtungen ist $p = 1$, $[p] = n$ und

$$L = \frac{[l]}{n}$$

d. i. das einfache arithmetische Mittel.

Der aus der Methode der kleinsten Produkte berechnete Mittelwert ist daher mit dem aus der Methode der kleinsten Quadrate hervorgehenden arithmetischen Mittel identisch, welches sohin unter allen möglichen Mittelwerten zugleich auch der natürlichste ist.

Die Regel von dem arithmetischen Mittel gilt jedoch nur für die Beobachtungsgrößen selbst, nicht aber auch für deren Fehler, die, um Null herum liegend, teils positiv teils negativ auftreten. Wenn eine Anzahl n wahrer Beobachtungsfehler $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$ vorliegt, so wird nicht das arithmetische Mittel, auch nicht das durchschnittliche Mittel, sondern derjenige Mittelwert als der beste erklärt, welcher nach der Gleichung

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}$$

gebildet wird und welchen Gauß in die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate eingeführt und den »mittleren zu fürchtenden Fehler« genannt hat. Von diesem mittleren Fehler, der sich besser wie jeder andere zu Genauigkeitsbestimmungen eignet, sagt aber Jordan, daß man seine Einführung wohl als zweckmässig darstellen kann, daß es jedoch nicht gelingt, »diese Wahl eines Genauigkeitsmaßes als notwendig nachzuweisen«. Gauß selbst spricht sich hierüber wie folgt aus: »Wenn jemand den Einwand erheben würde, es sei dieser Grundsatz ohne zwingende Notwendigkeit willkürlich gewählt, so werden wir gerne zustimmen, da diese Frage der Natur der Sache nach etwas unbestimmtes enthält, das nur durch ein gewissermaßen willkürliches Prinzip eingeschränkt werden kann.«

Wir wollen nun versuchen, diese für das gesamte Vermessungswesen überaus wichtige Formel nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme abzuleiten und so deren strenge Gültigkeit auf mechanischem Wege nachzuweisen.

Betrachten wir zu diesem Behufe einen geraden, elastischen Stab an Stelle einer gemessenen Linie oder einer beobachteten Richtung, welche dann die in der Stabachse gelegene Faser vertreten, so lassen sich die wahren Beobachtungsfehler wie die Längs- oder Querverschiebungen eines von Achsial-, beziehungsweise Schubkräften beanspruchten Stabes auffassen. Bezeichnen

v_1' v_2' . . . . v_μ' die positiven Fehler von der Anzahl μ.

v_1'' v_2'' . . . . v_ν'' die negativen Fehler von der Anzahl ν.

Q_1' Q_2' . . . Q_μ' die positiven Kräfte,

Q_1'' Q_2'' . . . Q_ν'' die negativen Kräfte, welche einzeln diese Fehler oder Deformationen verursachen, in ihrer Zusammenwirkung aber ihrer ungleichen Größe und Anzahl wegen nach dem wieder eingetretenen Gleichgewichtszustande im allgemeinen eine Ablenkung von der ursprünglichen Ruhelage bewirken, (welche Ablenkung dem Unterschiede des Mittelwertes von dem wahren Werte oder dem w a h r e n Fehler des Mittels gleichkommt); ist ferner

L die Länge des in Vergleich gezogenen Stabes,

F die Fläche des Querschnittes und

p der Elastizitätsmodul der Dehnung oder Gleitung, je nachdem es sich um die Beanspruchung von Achsial- oder Schubkräften handelt, so besteht im Zustande des Gleichgewichtes zwischen der äußeren und inneren Arbeit die Gleichgewichtsgleichung in ihrer Allgemeinheit:

$$[Q\,v] = \frac{p\,F}{L}\,[v\,v] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Denkt man sich die μ positiven Kräfte Q' und die ν negativen Kräfte Q'', die alle von verschiedener Größe sind, durch ebensoviele, aber durchaus gleiche Kräfte P ersetzt, so daß die μ positiven Kräfte P und die ν negativen Kräfte P die gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Verschiebungen $+$ m und $-$ m von der resultierenden Gleichgewichtslage des deformierten Stabes erzeugen und daher in ihrer Zusammenwirkung an dem vorhandenen Gleichgewichtszustande nichts ändern, so besteht in diesem Falle, wenn $\mu + \nu = n$ gesetzt wird, die spezielle Gleichgewichtsgleichung:

$$n\,.\,P\,m = n\,.\,\frac{p\,F}{L}\,m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es stellt dann nicht nur die Kraft P den natürlichsten Mittelwert der Kräfte Q dar, sondern es ist zugleich auch die der Mittelkraft P entsprechende Verschiebung m der natürlichste Mittelwert aller Verschiebungen v. Da die Wahl von P und m so getroffen ist, daß sich an dem Gleichgewichtszustande nichts ändert, also auch die Summe der äußeren Arbeiten nicht, so ist die Summe aller Produkte Q v gleich dem n-fachen Produkte P m oder e s i s t d i e A r b e i t d e r M i t t e l k r a f t P g l e i c h d e m a r i t h m e t i s c h e n M i t t e l d e r A r b e i t e n a l l e r E i n z e l k r ä f t e Q und es besteht die Beziehung:

$$[Q\,v] = n\,.\,P\,m,$$

welche mit Bezug auf die beiden Gleichgewichtsgleichungen (1) und (2) zur Relation

$$\frac{pF}{L}[vv] = n\frac{pF}{L}m^2$$

führt, woraus der natürlichste Mittelwert der Beobachtungsfehler oder der Gauß'sche mittlere Fehler

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$$

erhalten wird.

V. Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

a) Ausgleichung von Längenmessungen.

Es sei in einer Geraden von unabänderlicher Länge L ein Teilpunkt eingemessen, der von den beiden Enden der Geraden die gemessenen Abstände l_1 und l_2 habe. Infolge der bei der Längenmessung gemachten unvermeidlichen Fehler wird sich ein Widersprnch ω ergeben, so daß die Gleichung besteht:

$$L = l_1 + l_2 + \omega.$$

Sind L_1 und L_2 die verbesserten Teilstrecken, also $L_1 + L_2 = L$, die an den gemessenen Längen anzubringenden Verbesserungen somit

$$v_1 = L_1 - l_1 \text{ und } v_2 = L_2 - l_2,$$

so ist es Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, den Längenwiderspruch ω so zum Verschwinden zu bringen, daß der Bedingungsgleichung

$$(L_1 - l_1) + (L_2 - l_2) = v_1 + v_2 = \omega$$

Genüge geleistet werde. Da diese Gleichung zwei Unbekannte enthält, so kann sie nur durch Einführung einer weitern Bedingung gelöst werden. Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt unter gleichzeitiger Annahme des »Quadratwurzelgesetzes« und Einführung der aus diesem Gesetze abgeleiteten Gewichte, daß die Summe der mit diesen Gewichten multiplizierten Quadrate der Verbesserungen ein Minimum werde, woraus dann das »überall befriedigende Proportional-Verteilungsverfahren« selbstverständlich resultieren muß, indem — der mittlere Längenmessungsfehler proportional der Quadratwurzel der Länge wachsend angenommen — das Gewicht einer Längenmessung umgekehrt proportional sein muß der Länge selbst. Die Methode der kleinsten Produkte hingegen fordert, daß die Summe der auf die Längeneinheit reduzierten Quadrate der Längenverbesserungen ein Minimum werde, nämlich

$$\left[\frac{vv}{L}\right] = \left\{\frac{(L_1 - l_1)^2}{L_1} + \frac{(L_2 - l_2)^2}{L_2}\right\} = \text{min.}$$

Differenziert man nach den beiden Veränderlichen l_1 und l_2, so erhält man die Differenzialgleichung:

$$\frac{L_1 - l_1}{L_1}\,dl_1 + \frac{L_2 - l_2}{L_2}\,dl_2 = 0.$$

Infolge des Bestehens der Bedingungsgleichung sind die Differenziale dl und dl_2 nicht unabhängig von einander. Differenziert man daher die Bedingungsgleichung nach den beiden Veränderlichen l_1 und l_2 und multipliziert sie mit dem vorläufig noch unbestimmten Korrelat k, so erhält man zunächst

$$-k\,(d\,l_1 + d\,l_2) = 0$$

und wenn man die Koeffizienten der gleichen Differenziale einander gleichsetzt, die Korrelatengleichungen:

$$-k = \frac{L_1 - l_1}{L_1} = \frac{L_2 - l_2}{L_2}$$

Substituiert man die daraus hervorgehenden Verbesserungen

$$L_1 - l_1 = -k\,L_1 \text{ und } L_2 - l_2 = -k\,L_2$$

in die Bedingungsgleichung, so ergibt sich die Normalgleichung:

$$k\,(L_1 + L_2) = \omega$$

und hieraus:

$$-k = \frac{\omega}{L_1 + L_2} = \frac{\omega}{L}.$$

Somit sind die Verbesserungen:

$$L_1 - l_1 = v_1 = \frac{\omega}{L} \cdot L_1$$

$$L_2 - l_2 = v_2 = \frac{\omega}{L} \cdot L_2,$$

das heißt, die Methode der kleinsten Produkte verlangt die Verteilung des Längenwiderspruches proportional den Längen, gibt also direkt ohne Zuhiltenahme von Gewichten dasselbe Resultat, welches die Methode der kleinsten Quadrate erst durch die Annahme eines speziellen Fehlergesetzes und unter Einführung der entsprechenden Gewichte liefert. Jedes andere Fehlergesetz würde nach der Methode der kleinsten Quadrate abweichende und daher unrichtige Resultate ergeben, woraus hervorgeht, daß die Methode der kleinsten Quadrate nur unter Zugrundelegung eines der Natur der Messung angepaßten Fehlerfortpflanzungsgesetzes natürliche Resultate liefert und dann auch mit der neuen Methode vollkommen übereinstimmt. Damit erscheint die Anwendung der Theorie der kleinsten Deformationsarbeit auf geodätische Operationen zu mindestens in demselben Maße gerechtfertigt, wie die Anwendung des mit der Methode der kleinsten Quadrate verwandten mechanischen Prinzips des kleinsten Zwanges von Gauß.

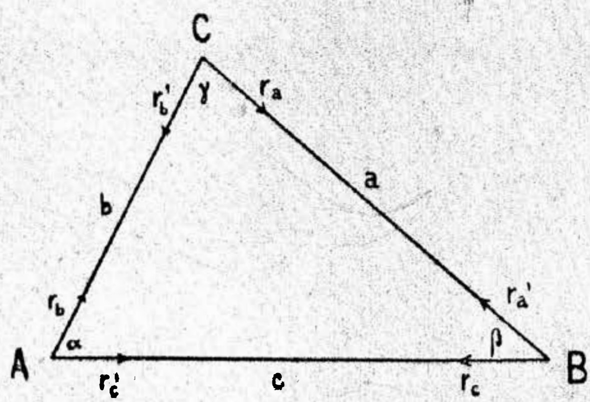
b) Ausgleichung von Winkelmessungen.

In einem Dreiecke seien alle Winkel gemessen, deren Summe infolge unvermeidlicher Beobachtungsfehler der Bedingung des Dreiecksabschlusses

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

nicht voll Genüge leistet, sondern einen Winkelwiderspruch ω aufweist, der durch Verteilung auf die drei Winkel so getilgt werden soll, daß er mit den drei Winkelverbesserungen die Gleichung erfülle:

$$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma = \omega.$$



Jede Winkelverbesserung ist die Differenz zweier Richtungsverbesserungen. Bezeichnet man die Verbesserungen der im Dreieckspunkte A beobachteten Richtungen r_b und r_c' mit v_b und v_c' und analog die Verbesserungen der in B und C beobachteten Richtungen mit v_c und v_a', beziehungsweise v_a und v_b', so sind die Winkelverbesserungen:

$$v_\alpha = v_b - v_c'$$
$$v_\beta = v_c - v_a'$$
$$v_\gamma = v_a - v_b'$$

und es besteht die Bedingungsgleichung für die Richtungsverbesserungen:

$$v_a + v_b + v_c - v_a' - v_b' - v_c' = \omega.$$

Da in diesem Falle Verdrehungen, aber keine Längsverschiebungen stattfinden, so sind in dem allgemeinen Ausdrucke $\left[\frac{p\,v\,v}{l}\right]$ für v die durch die Richtungsverbesserungen v_r bewirkten Querverschiebungen $v = \frac{l\,v_r}{\varrho}$ zu setzen und man hat für gleiche Genauigkeiten $(p = 1)$ die Minimumsbedingung in der Form:

$$[l\,v_r\,v_r] = \text{min}.$$

und, indem man für l die entsprechenden Dreiecksseiten a, b, c setzt, die Differenzialgleichung:

$$a\,(v_a\,dv_a + v_a'\,dv_a') + b\,(v_b\,dv_b + v_b'\,dv_b') + c\,(v_c\,dv_c + v_c'\,dv_c') = 0.$$

Die Bedingungsgleichung nach allen Veränderlichen differenziert und mit dem Korrelat k multipliziert, gibt:

$$k\,(dv_a + dv_b + dv_c - dv_a' - dv_b' - dv_c') = 0$$

ferner die Korrelatengleichungen:

$$k = a\,v_a = b\,v_b = c\,v_c = -\,a\,v_a' = -\,b\,v_b' = -\,c\,v_c'.$$

Substituiert man die daraus hervorgehenden Verbesserungen in die Bedingungsgleichung, so erhält man die Normalgleichung:

$$2\left(\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c}\right) = \omega$$

und hieraus:

$$k = \frac{\omega}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

Somit ist

$$v_a = -v_a' = \frac{k}{a} \qquad v_\alpha = k\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$v_b = -v_b' = \frac{k}{b} \quad \text{und} \quad v_\beta = k\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$$

$$v_c = -v_c' = \frac{k}{c} \qquad v_\gamma = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Bildet man das Verhältnis: $\frac{v_\alpha}{v_\beta} = \frac{a\,(b + c)}{b\,(c + a)}$

und analog die Verhältnisse $\frac{v_\beta}{v_\gamma}$ und $\frac{v_\gamma}{v_\alpha}$, so erhält man die Doppelgleichung:

$$\frac{v_\alpha}{a\,(b + c)} = \frac{v_\beta}{b\,(c + a)} = \frac{v_\gamma}{c\,(a + b)}$$

welche die Verteilung des Winkelwiderspruches im Verhältnis zu den drei Seiten darstellt. In Worten ausgedrückt lautet das Resultat: Die natürlichste Gestalt des Dreieckes wird durch eine solche Verteilung des Winkelwiderspruches erzielt, welche den Produkten aus der gegenüberliegenden Seite in die Summe der beiden anliegenden Seiten proportional vorgenommen wird.

Damit erscheint eine spezielle Aufgabe gelöst, welche Prof. Dr. Reinhertz in seinen »Bemerkungen über Kleintriangulierungen« allgemein wie folgt gestellt hat: »Die beste gegenseitige Punktlage würde eine solche sein, bei welcher die mittleren Fehler der Punktabstände mit den Längenmessungsfehlern in Beziehung stehen. Es liegt daher nahe zu untersuchen, welcher Wert für die Strahlengewichte am meisten dieser Bedingung entspricht, das heißt, festzustellen, wenn ein Neupunkt durch Strahlen von verschiedener Länge festgelegt wird, welche Gewichte der Strahlenschnitte den Ort des Neupunktes am besten in Übereinstimmung mit den Anforderungen der Längenmessung setzen.«

Für $a = b = c$ geht die Doppelgleichung über in $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma$, das heißt, bei einem gleichseitigen Dreiecke erfolgt die Verteilung des Winkelwiderspruches nach der Methode der kleinsten Produkte auf die drei Winkel zu gleichen Teilen, in diesem speziellen Falle also ebenso wie nach der Methode der kleinsten Quadrate, wonach die Gauß'sche Methode als ein spezieller Fall der neuen Methode sich darzustellen scheint.

Beispiel für gleiche Genauigkeitsgewichte.

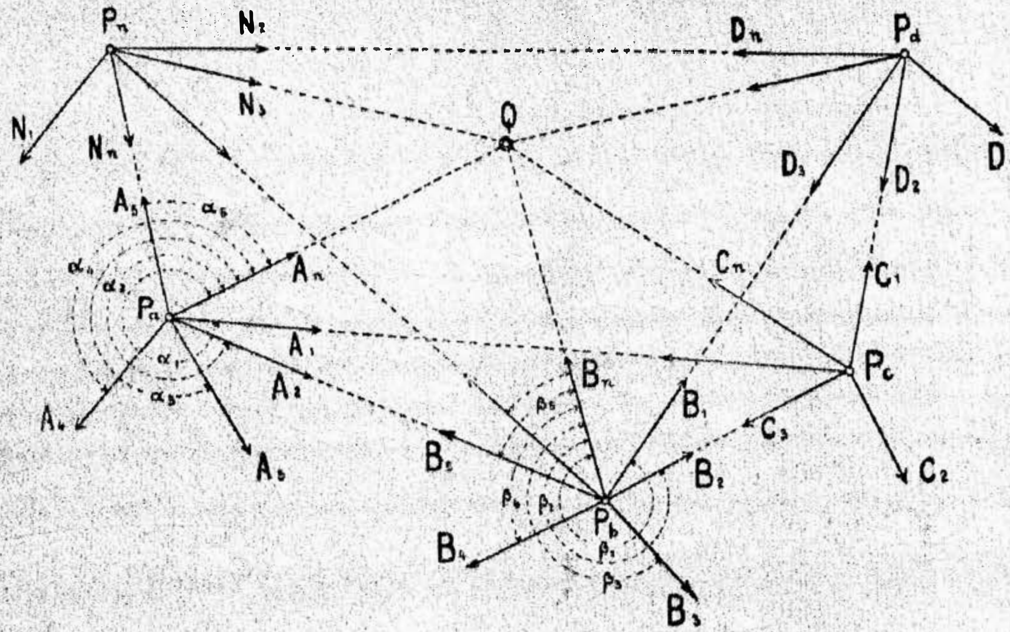
Gemessene Winkel	Seiten		Verbesserungen nach der Methode der kleinsten Quadrate	Produkte
$\alpha = 73^\circ\,07'\,00''$	$a = 481$	$\frac{1000}{a} = 2{\cdot}1$	$v_\alpha = -10{\cdot}0''$	$v_\alpha = -12{\cdot}8''$
$\beta = 95\;\;24\;\;20$	$b = 500$	$\frac{1000}{b} = 2{\cdot}0$	$v_\beta = -10{\cdot}0$	$v_\beta = -12{\cdot}9$
$\gamma = 11\;\;29\;\;10$	$c = 100$	$\frac{1000}{c} = 10{\cdot}0$	$v_\gamma = -10{\cdot}0$	$v_\gamma = -4{\cdot}3$
$180\;\;00\;\;30$		$14{\cdot}1$		
$\omega = -30''$		$k = 1{\cdot}07$	$\omega = -30{\cdot}0$	$\omega = -30{\cdot}0$

VI. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

a) Vorwärtseinschneiden.

Zur Bestimmung der Koordinaten des Punktes Q durch äußere Richtungen seien auf den gegebenen Punkten P_a P_b . . . P_n Richtungsunterschiede gemessen worden zwischen dem zu bestimmenden Punkte Q und den umliegenden gegebenen Dreieckspunkten A_1 A_2 . . . A_n ; B_1 B_2 . . . B_n ; C_1 C_2 . . . C_n u. s. w. Sind φ_1 φ_2 . . . φ_n die bekannten Richtungswinkel (Südwinkel) der gegebenen Dreieckseiten von P_a nach A_1 A_2 . . . A_n, beziehungsweise von P_b nach B_1 B_2 . . . B_n u. s. w. und ist R der Richtungswinkel von der betreffenden Station nach Q, so hat man, wenn die beobachteten Richtungsunterschiede mit α_1 α_2 . . . α_n bezeichnet werden, für die zu bestimmende Richtung R die verschiedenen, mit unregelmäßigen Beobachtungsfehlern behafteten Werte:

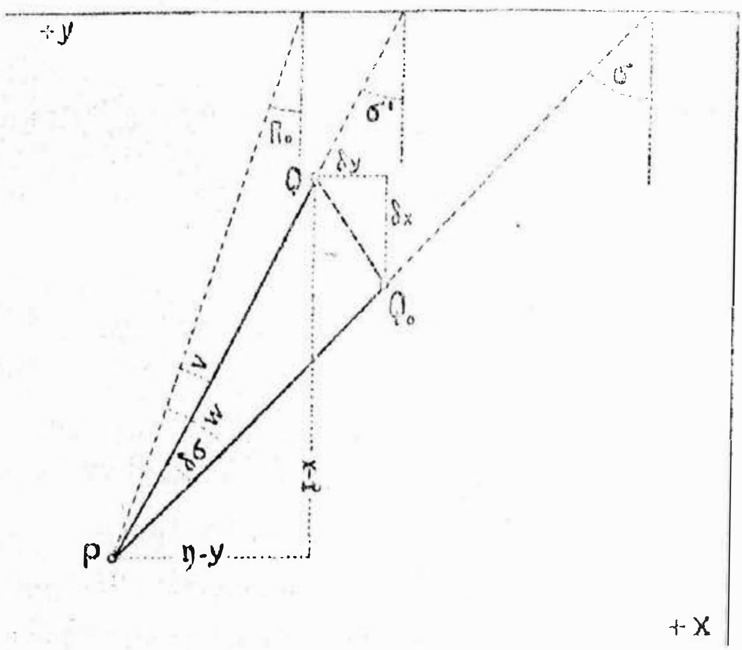
$$R_1 = \varphi_1 + \alpha_1$$
$$R_2 = \varphi_2 + \alpha_2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$R_n = \varphi_n + \alpha_n,$$



deren arithmetisches Mittel die orientierte Richtung R_o der Beobachtungen genannt wird. In gleicher Weise erhält man für jede Beobachtungsstation die den Punkt Q bestimmenden orientierten Richtungen, welche in der weiteren Berechnung den einzelnen Beobachtungen entsprechen und welchen je nach der Anzahl der zu ihrer Bildung herangezogenen Richtungen verschiedene Genauigkeitsgewichte zukommen.

Sind x, y die aus irgendeinem Dreiecke auf elementar-triogonometrischem Wege erhaltenen genäherten oder vorläufigen Koordinaten des Punktes Q; dx, dy die den vorläufigen Koordinaten zukommenden Verbesserungen nach Ausgleichung der bei Benützung aller überschüssigen Beobachtungen sich ergebenden Widersprüche; σ' der aus den gegebenen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ des

Punktes P und den vorläufigen Koordinaten x, y des Punktes Q berechnete vorläufige Südwinkel der Seite QP = s; σ der aus den verbesserten Koordinaten des Punktes Q_0 $(x + dx,\ y + dy)$ und den Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ erhaltene endgültige Südwinkel und $d\sigma$ die an den vorläufigen Südwinkel anzubringende Verbesserung; w die Abweichung der orientierten Richtung R_0 von dem vorläufigen Südwinkel und v die Abweichung der orientierten Richtung von dem endgültigem Südwinkel, so finden für jede beobachtete Richtung die Beziehungen statt:



$$\sigma' - R_0 = w$$
$$\sigma - R_0 = v$$
$$d\sigma = \sigma - \sigma' = v - w$$
$$v = d\sigma + w$$
$$d\sigma = \frac{\varrho \sin \sigma'}{s}\, dx - \frac{\varrho \cos \sigma'}{s}\, dy$$

somit die Richtungsverbesserungen in der üblichen Schreibweise:

$$v = a\,dx + b\,dy + w$$

worin $a = \frac{\varrho \sin \sigma'}{s}$ und $b = -\frac{\varrho \cos \sigma'}{s}$ bedeutet.

Die Minimumsbedingung für die Methode der kleinsten Produkte lautet nach Einführung der Richtungsverbesserungen an Stelle der Querverschiebungen:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\,\varrho^2}\,[p\ s\ v\ v] = \min.$$

Substituiert man für v die obigen Werte und setzt man die partiellen Differenzialquotienten nach den beiden Unbekannten dx und dy gleich Null, so erhält man die Differenzialgleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial dx} = \frac{1}{\varepsilon^2}\,[psa^2 \,.\, dx + psab \,.\, dy + psaw] = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial dy} = \frac{1}{\varepsilon^2}\,[psab \,.\, dx + psb^2 \,.\, dy + psbw] = 0$$

somit die Normalgleichungen für verschiedene Genauigkeitsgewichte:

$$[psaa]\,dx + [psab]\,dy + [psaw] = 0$$
$$[psab]\,dx + [psbb]\,dy + [psbw] = 0$$

und für gleiche Genauigkeitsgewichte:

$$[saa]\,dx + [sab]\,dy + [saw] = 0$$
$$[sab]\,dx + [sbb]\,dy + [sbw] = 0$$

Diese Gleichungen sind von den aus der Methode der kleinsten Quadrate hervorgehenden Normalgleichungen nur dadurch unterschieden, daß statt der einfachen Gewichtszahlen p in den neuen Gleichungen die Gewichtsfaktoren ps auftreten, welche sich aus den Genauigkeitsgewichten p und den Strahlengewichten s zusammensetzen. Demnach sind die Formeln der Methode der kleinsten Produkte für gleiche Genauigkeit ($p = 1$) analog beschaffen, wie die Formeln der Methode der kleinsten Quadrate für ungleiche Genauigkeit ($p = s$).

Beispiel: (Aus der österreichischen »Instruktion zur Ausführung der trig. und polyg. Vermessungen«, S. 106),

Netzpunkte	a	b	σ'	Ro + 180°	w
Spielberg	+ 51·2	— 10·3	78° 34′ 55·3″	78 34′ 54″	+ 1·3″
4	+ 70·4	+ 23·6	108 33 15·3	108 33 17	— 1·7
1	+ 53·8	+ 61·5	138 50 50·8	138 50 50	+ 0·8
Hadi	— 41·3	+ 63·5	213 03 52·5	213 03 55	— 2·5
Neuer Berg	— 114·2	— 182·1	327 55 10·3	327 55 11	— 0·7

s in km.	saa	sab	saw	sbb	sbw
3·95	10.353	— 2.082	+ 265	419	— 51
2·78	13.778	+ 4.618	— 334	1.548	— 111
2·52	7.293	+ 8.339	+ 108	9.531	+ 123
2·72	4.640	— 7.135	+ 280	10.967	— 432
0·96	12.520	+ 19.964	+ 77	31.834	+ 122
12·93	48.584	+ 23.704	+ 396	54.299	— 349

Normalgleichungen:

$$\underline{48.584 \,.\, dx} + 23.704 \,.\, dy + 396 = 0$$
$$\underline{54.299 \,.\, dy} - 349 = 0$$

Koordinatenverbesserungen: $\begin{cases} dy = + 0·013 \\ dx = - 0·014 \end{cases}$

a dx	b dy	dσ	w	v	v v	s v v	m
− 0·717	− 0·134	− 0·9	+ 1·3	+ 0·4	0·16	0·63	$\pm 1''\!\cdot 41$
− 0·986	+ 0·307	− 0·7	− 1·7	− 2·4	5·76	16·01	± 1·68
− 0·753	+ 0·800	+ 0·0	+ 0·8	+ 0·8	0·64	1·61	± 1·77
+ 0·578	+ 0·826	+ 1·4	− 2·5	− 1·1	1·21	3·29	± 1·70
+ 1·599	− 2·367	− 0·8	− 0·7	− 1·5	2·25	2·16	± 2·87
						23·70	

Mittlerer Fehler μ einer beobachteten Richtung von der fingierten Länge $s = 1$ km:

$$\mu = \sqrt{\frac{[s\,v\,v]}{n-q}} = \sqrt{\frac{23{\cdot}70}{5-2}} = \pm 2{\cdot}81$$

Mittlerer Fehler μ' einer beobachteten Richtung von der durchschnittlichen Länge $\frac{[s]}{n} = \frac{12{\cdot}93}{5} = 2{\cdot}59$ km:

$$\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{2{\cdot}59}} = \pm 1''\!{\cdot}75$$

Die mittleren Fehler $m = \frac{\mu}{\sqrt{s}}$ der beobachteten Richtungen $s_1\ s_2 \ldots s_5$ sind in obiger Tabelle ausgewiesen.

Zum Vergleiche setzen wir hier auch die aus der Methode der kleinsten Quadrate hervorgegangenen Ergebnisse an:

$$\text{Koordinatenverbesserungen:} \begin{cases} dy = +\ 0{\cdot}009 \\ dx = -\ 0{\cdot}015 \end{cases}$$

mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung ohne Rücksicht auf deren Länge

$$m = \pm 1''\!{\cdot}70.$$

b) Rückwärtseinschneiden.

Behufs Ausgleichung eines durch innere Richtungen bestimmten Punktes gestalten sich unter Berücksichtigung des unbekannten Orientierungsfehlers z die Formeln wie folgt:

Die Bedingungsgleichungen lauten:

$$a'\,dx + b'\,dy + w' + z = 0 \qquad \text{Anzahl: } p's'$$
$$a''\,dx + b''\,dy + w'' + z = 0 \qquad \text{»} \quad p''s''$$

u. s. w.

Durch Addition dieser Gleichungen und Division der Summe durch die Anzahl der Gleichungen [ps] ergibt sich (als allgemeines arithmetisches Mittel) die Gleichung

$$\frac{[psa]}{[ps]}\,dx + \frac{[psb]}{[ps]}\,dy + \frac{[psw]}{[ps]} + z = 0,$$

welche, von den einzelnen Bedingunsgleichungen subtrahiert, die folgenden, von dem Orientierungsfehler z befreiten, reduzierten Bedingungsgleichungen liefert:

$$\left(a' - \frac{[psa]}{[ps]}\right) dx + \left(b' - \frac{[psb]}{[ps]}\right) dy + \left(w' - \frac{[psw]}{[ps]}\right) = 0$$

$$\left(a'' - \frac{[psa]}{[ps]}\right) dx + \left(b'' - \frac{[psb]}{[ps]}\right) dy + \left(w'' - \frac{[psw]}{[ps]}\right) = 0$$

u. s. w.

Bezeichnet man die Ausdrücke in den Klammern als reduzierte a, b und w oder mit α, β und ω, so hat man die Elemente zur Bildung der Normalgleichungen, die genau so gebaut sind, wie die behufs Ausgleichung eines Punktes durch äußere Richtungen aufgestellten Normalgleichungen.

B e i s p i e l. (Aus der österreichischen »Instruktion zur Ausführung der trigonometrischen und polygonometrischen Vermessungen«. Seite 110).

Netzpunkte	a	b	σ'	Rm	$r_0 = R_m + o$	w
				o=287°54′45″		
2	−129·8	— 42·0	287° 54′ 50″	0° 00′ 05″	287° 54′ 50″	0
15	+ 38·3	—262·3	8 18 39	80 23 33	8 18 18	+21
16	+170·7	—150·0	48 42 15	120 47 30	48 42 15	0
4	+182·5	— 50·3	74 35 45	146 40 56	74 35 41	+ 4
1	+ 30·4	+280·3	173 48 08	245 53 23	173 48 08	0

s in km	sa	sb	sw	α	β	ω	sα	sβ	sω
1·51	—196·0	— 63·4	0	—171·7	+ 8·7	— 4·2	—259·3	+ 13·2	— 6·3
0·78	+ 29·9	—204·6	+16·4	— 3·6	—211·6	+16·8	— 2·8	—165·0	+13·1
0·91	+155·3	—136·5	0	+128·8	— 99·3	— 4·2	+117·2	— 90·4	— 3·8
1·09	+198·9	— 54·8	+ 4·4	+140·6	+ 0·4	— 0·2	+153·3	+ 0·4	— 0·2
0·73	+ 22·2	+204·6	0	— 11·5	+331·0	— 4·2	— 8·4	+241·6	— 3·0
[s]	+210·3	—254·7	+20·8				+270·5	+255·2	+13·1
:5·02	+ 41·9	— 50·7	+ 4·2				—270·5	—255·4	—13·3

Normalgleichungen:

$$\underline{81\,268\ dx} - 16\,019\ dy + 554 = 0$$

$$\underline{123\,992\ dy} - 3463 = 0$$

Koordinaten-Verbesserungen: $\left\{\begin{array}{l} dy = +\ 0{\cdot}028 \\ dx = -\ 0{\cdot}001 \end{array}\right.$

a . dx	b . dy	dσ	s . dσ	red . dσ	red. sdσ	ω	v	svv	m
+0·130	—1·176	—1·046	—1·579	+0·4	+0·6	—4·2	—3·8	21·80	+7″·70
—0·038	—7·344	—7·382	—5·758	—5·9	—4·6	+16·8	+10·9	92·67	+10·76
—0·171	—4·200	—4·371	—3·978	—2·9	—2·6	—4·2	—7·1	45·87	+9·97
—0·183	—1·408	—1·591	—1·734	—0·1	—0·1	+0·2	+0·1	0·01	+9·11
—0·030	+7·848	+7·818	+5·707	+9·3	+6·8	—4·2	+5·1	18·99	+11·14
			—7·342		+7·4			179·34	
		:5·02	—1·46		—7·3				

In dieser Tabelle bestehen die Relationen:

$$d\sigma = a\,.\,dx + b\,.\,dy$$

$$\text{red. } d\sigma = d\sigma - \frac{[s\,.\,d\sigma]}{[s]}$$

$$[\text{red. } s\,.\,d\sigma] = 0 \qquad \text{zur Probe}].$$

$$v = \text{red. } d\sigma + \omega$$

$$m = \sqrt{\frac{[svv]}{s\,(n-q)}}$$

Es ist der mittleren Fehler μ einer beobachteten Richtung von der fingierten Länge $s = 1$ km:

$$\mu = \sqrt{\frac{[svv]}{n-q}} = \sqrt{\frac{179{\cdot}34}{5-3}} = \pm 9''{\cdot}47$$

somit die mittlere Fehler der einzelnen Richtungen von der Länge s_1 s_2 . . . s_5 allgemein

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{s}}$$

welche in der letzten Spalte der obigen Tabelle speziell ausgewiesen sind.

Zum Vergleiche setzen wir hier die aus der Methode der kleinsten Quadrate hervorgehenden Ergebnisse an:

$$\text{Koordinaten-Verbesserungen:} \left\{ \begin{array}{l} dy = +\ 0{\cdot}029 \\ dx = +\ 0{\cdot}007 \end{array} \right.$$

Mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung ohne Rücksicht auf deren Länge:

$$m = \pm 9''{\cdot}89$$

Sind nun auch in diesen Beispielen die Differenzen zwischen den Resultaten beider Methoden nur geringfügige, wie ja überhaupt das Ausgleichungsverfahren um so mehr an Bedeutung verliert, je genauer die Beobachtungen selbst erscheinen, so können doch bei größeren Verschiedenheiten in den Strahlenlängen diese Differenzen unter Umständen so bedenklich anwachsen, daß sie für die Wahl des Ausgleichungsverfahrens bestimmend werden. So ergeben sich beispielweise bei dem in Jordan's Handbuch der Vermessungskunde enthaltenen Schulbeispiele für Vorwärtseinschneiden folgende Resultate:

Nach der Methode der kleinsten Quadrate: dy = — 0·048 dx = — 0·031

» » » » » Produkte: dy = — 0·077 dx = — 0·041

(Fortsetzung folgt).

Lineal zur Ermittlung des Blatteinganges.

Von **Karl Scharf**, k. k Geometer in Leitmeritz.

Im Heft 6, Seite 95 vom Jahre 1903 habe ich mir erlaubt, die Herren Kollegen auf ein von mir konstruiertes Lineal zur Ermittlung des Blatteinganges aufmerksam zu machen.

Damals bemerkte ich, daß ein Lineal an die vorgesetzte Behörde zur Begutachtung und eventueller dienstlicher Einführung beim Kataster von mir eingesendet wurde und habe ich gleichzeitig den Herren Kollegen versprochen, das Resultat seinerzeit bekannt zu geben.

Nachdem mir nun die h. o. Entscheidung zugekommen ist, beeile ich mich, dieselbe den Herren Kollegen zur Kenntnis zu bringen.

Finanz-Ministerium 12.946. Wien, am 22. März 1904.

An die k. k. Finanz-Landes-Direktion Prag.

» . . In Erledigung des Berichtes . . . . . betreffend die Vorlage des vom Evidenzhaltungsgeometer Scharf in Leitmeritz konstruierten Maßstablineales zur Ermittelung des Papiereinganges, wird der k. k. Direktion im Anschlusse eine Äußerung des Triangulierungs- und Kalkulbureaus auszugsweise mitgeteilt.

Mit Rücksicht auf diese Äußerung erscheint das Scharf'sche Lineal zur obligatorischen Einführung bei der Evidenzhaltung des Grundsteuerkatasters nicht geeignet, wohl aber bleibt es den Funktionären derselben unbenommen, sich bei Bestimmung des Papiereinganges der Katastermappen des Scharf'schen Lineals zu bedienen.

Die vom Geometer Scharf angesuchte Bewilligung zum Nachdruck der mit dem Erlasse vom 8. Juli 1901, Zahl 23.583 herausgegebenen Tabelle zur Berechnung des Blatteinganges wird dem Geometer hiemit erteilt.«

Leider wurden mir die Gründe, warum das Lineal zur obligatorischen Einführung nicht geeignet ist, nicht mitgeteilt, so daß ich nur auf Vermutungen angewiesen bin, für die Brauchbarkeit spricht die Entscheidung dennoch, da es ganz ausdrücklich gestattet wurde, sich des Lineales zu bedienen, was wohl nicht geschehen wäre, wenn durch das Lineal der Blatteingang nicht genau bestimmt werden könnte.

Ich habe das Lineal auf ein Jahr in Verwendung gehabt und habe viel Zeit durch dasselbe erspart, da die Ermittlung höchst einfach ist und sowohl bei ganzen, als auch $^1/_2$ und $^1/_4$ Blättern durch zwei Handgriffe und Ablesungen erfolgen kann.

Das Lineal ist nur für den Maßstab 1:2880, respektive Verjüngungen desselben brauchbar, nicht jedoch für Neuaufnahmen im Maße 1:2500, respektive 1:1250.

Die Firma Neuhöfer & Sohn hat sich bereit erklärt, die Erzeugung dieser Lineale zu übernehmen und liefert dieselben zum Preise von neun Kronen samt der Tabelle.

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III, Kübeckgasse 12.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175

Erscheint am 1. und 16. jeden Monats
Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch
Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei
Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr. 14. Wien, am 16. Juli 1904. II. Jahrgang.

Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme.

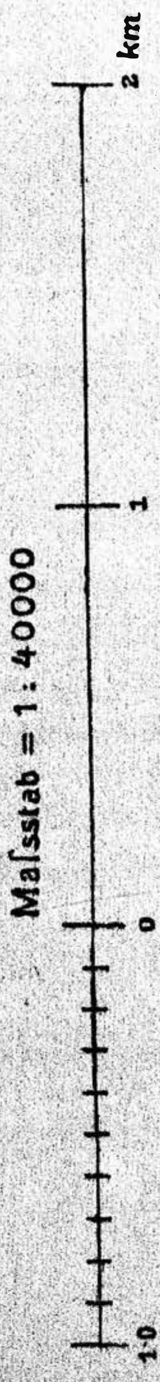
Von **S. Wellisch**, Oberingenieur der Stadt Wien.

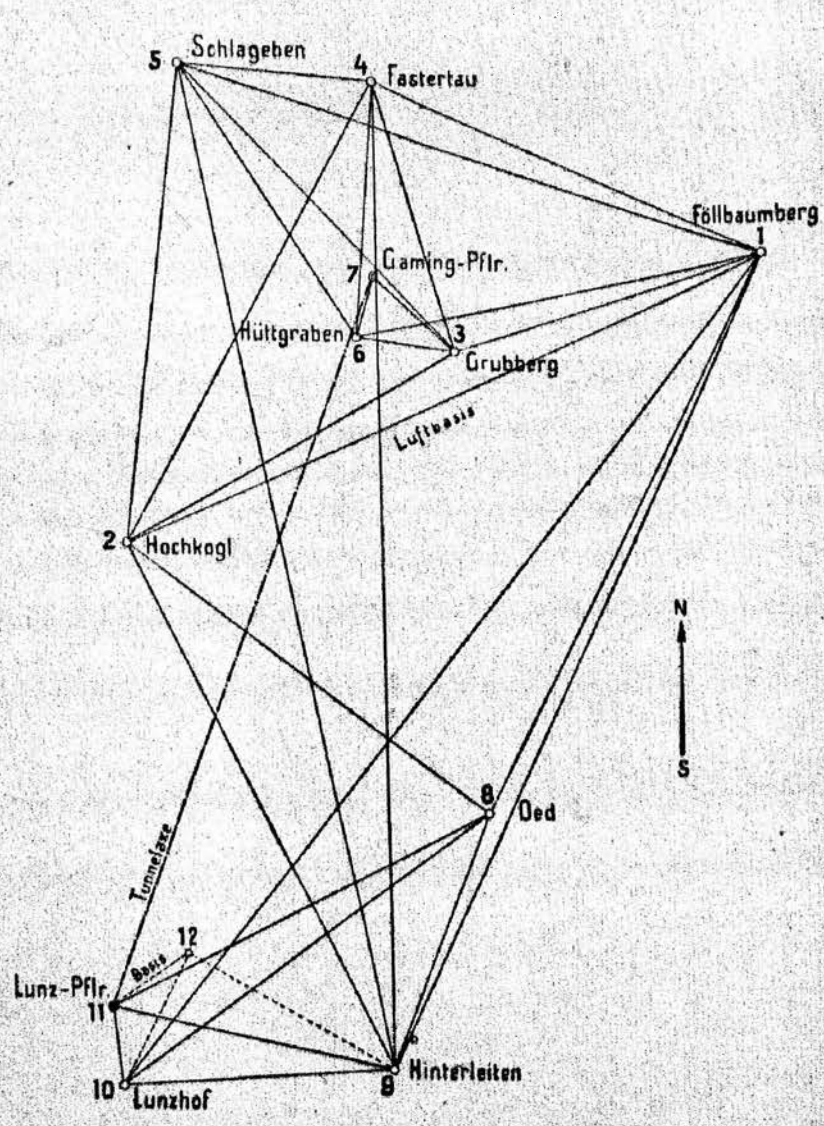
(Fortsetzung.)

VII. Praktisches Beispiel einer Triangulierungsausgleichung.

Für die Absteckung des Stollens der »Zweiten Kaiser Franz Josef-Hochquellenleitung« zwischen Lunz und Gaming in Niederösterreich wurde im Jahre 1903 eine Präzisions-Triangulierung ausgeführt, bei welcher die Fehlerausgleichungsmethode nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme zur Anwendung gekommen ist. Bei Triangulierungen für Landesvermessungen oder Stadtaufnahmen kann immer darauf Bedacht genommen werden, daß die einzelnen Dreiecke eine günstige, wo möglich gleichseitige Form erhalten. Bei Triangulierungen zum Zwecke von Tunnelabsteckungen kann dieser Forderung nicht immer Genüge geleistet werden, weil die beiden Tunnel-Achspunkte behufs möglichster Verkürzung der Tunnel-Länge gewöhnlich in tief eingeschnittenen Tälern zu liegen kommen, die nur ganz bestimmte Ausblicke auf die Bergkuppen der Umgebung gewähren und daher die Anlage eines aus günstigen Dreiecken bestehenden Netzes oft unmöglich machen, wie dies auch aus dem beigefügten Triangulierungsskelette, namentlich in dessen südlichem Teile, ersichtlich ist. In solchen Fällen ist es ratsam, sich des hier vorgeführten Ausgleichungsverfahrens zu bedienen, welches diesem Umstande insoferne Rechnung trägt, als es den Einfluß der Ungleichheit der Dreiecksseiten in Form von Gewichten in Kalkül zieht und dadurch die ungünstige Wirkung einzelner schiefer Schnitte zu paralysieren imstande ist.

Im vorliegenden Falle wurde folgender Rechnungsgang eingeschlagen. Ausgehend von den zwei auf der Wasserscheide gelegenen Endpunkten der Luftbasis »1 Föllbaumberg — 2 Hochkogel«, deren Koordinaten aus einer an das Landestriangulierungsnetz angeschlossenen älteren Triangulierung gegeben waren, wurden zunächst die beiden Vierecke: »1 — 2 — 5 — 4« und »1 — 2 — 9 — 8« für sich nach der Methode bedingter Beobachtungen mit vollen Richtungssätzen und hierauf die Punkte »3 — 6« einerseits, sowie »10 — 11« andererseits nach der Methode vermittelnder Richtungsbeobachtungen im Zusammenhange ausgeglichen, so daß die ersten sechs Punkte als Punkte gleichen Ranges von der I. Güte, die letzteren vier Punkte als solche von der II. Güte erscheinen, während die noch übrigbleibenden Punkte »7 und 12« als Punkte III. Güte rangieren. Mit Hilfe einer in Lunz





direkt gemessenen Basis »11 — 12« von 440·25 m Länge wurde die Richtigkeit der gegebenen Koordinaten der Anfangspunkte »1 und 2« kontrolliert.

Die nach beiden Methoden gerechneten Resultate wurden wie folgt erhalten.

a) Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

1) Gleichzeitige Bestimmung des Viereckes »1 — 2 — 5 — 4« durch bedingte Beobachtungen mit Korrelaten.

Werden die gegebenen Koordinaten von »1 Föllbaumberg« als feststehend angenommen und der Richtungswinkel der Seite »1 Föllbaumberg — 2 Hochkogel« zur vorläufigen Orientierung benützt, so erhalten die gemessenen Richtungen nachstehende Orientierung:

Richtung							Vorläufige Orientierung		
Nr.	1 =	von	2 Hochkogel	nach	5 Schlageben		187°	25′	50″9
»	2 =	»	»	»	4 Fastertau		211	10	11·8
»	3 =	»	»	»	1 Föllbaumbg.		249	12	19·9
»	4 =	»	1 Föllbaumberg	»	2 Hochkogel		69	12	19·9
»	5 =	»	»	»	5 Schlageben		108	04	42·0
»	6 =	»	»	»	4 Fastertau		113	46	21·7
»	7 =	»	4 Fastertau	»	1 Föllbaumbg.		293	46	19·1
»	8 =	»	»	»	2 Hochkogel		31	10	11·8
»	9 =	»	»	»	5 Schlageben		95	35	13·9
»	10 =	»	5 Schlageben	»	4 Fastertau		275	35	20·4
»	11 =	»	»	»	1 Föllbaumbg.		288	04	42·0
»	12 =	»	»	»	2 Hochkogel		7	25	49·2

Hierin stimmen die Richtungen 3 mit 4, 2 mit 8 und 5 mit 11 bloß aus dem Grunde vollkommen mit einander überein, weil dies bei der willkürlich anzunehmenden Anfangsrichtung so gewählt worden ist. Daß die übrigen Richtungen, z. B. 1 mit 12 nicht genau zusammenstimmen, hat in den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern seinen Grund.

Die Summenproben der vier Dreiecke sind:

3 — 1 =	61°	46′	29″0	3 — 2 =	38°	02′	08″1
5 — 4 =	38	52	22·1	8 — 7 =	97	23	52·7
12 — 11 =	79	21	07·2	6 — 4 =	44	34	01·8
	179	59	58·3		180	00	02·6
		ω =	— 1·7			ω =	+ 2·6

6 — 5 =	5°	41′	39″7	9 — 8 =	64°	25′	02″1
9 — 7 =	161	48	54·8	12 — 10 =	91	50	28·8
11 — 10 =	12	29	21·6	2 — 1 =	23	44	20·9
	179	59	56·1		179	59	51·8
		ω =	— 3·9			ω =	— 8·2

Hieraus entspringen bei Ausscheidung von max ω, wenn die Richtungskorrektionen mit $v_1\ v_2\ v_3 \ldots$ bezeichnet werden, folgende Winkelbedingungsgleichungen:

$$v_3 - v_1 + v_5 - v_4 + v_{12} - v_{11} - 1{\cdot}7 = 0$$
$$v_3 - v_2 + v_8 - v_7 + v_6 - v_4 + 2{\cdot}6 = 0$$
$$v_6 - v_5 + v_9 - v_7 + v_{11} - v_{10} - 3{\cdot}9 = 0$$

Hiezu kommt die auf den Zentralpunkt »4 Fastertau« bezogene günstigste Seitengleichung:

$$\frac{\sin(2-1)\,\sin(6-4)\,\sin(11-10)}{\sin(3-2)\,\sin(6-5)\,\sin(12-10)} = 1$$

Die entsprechende Bedingungsgleichung ergibt sich durch Logarithmierung wie folgt:

log sin (23° 44′ 20″·9) = 9·6048448	$\triangle$ log sin für 10″ = + 479
» » (44 34 01·8) = 9·8461793	» » + 214
» » (12 29 21·6) = 9·3349719	» » + 950
log Zähler = 8·7859960	
» » (38° 02′ 08″·1) = 9·7896870	» » + 269
» » (5 41 39·7) = 8·9966072	» » + 2112
» » (91 50 28·8) = 9·9997757	» » — 7
log Nenner = 8·7860699	

$$\omega = \text{log Zähler} - \text{log Nenner} = -\,0{\cdot}0000739$$

Für Einheiten der sechsten Logarithmenstelle hat man sohin die Seitenbedingungsgleichung:

$$+\,4{\cdot}79\,(v_2 - v_1) + 2{\cdot}14\,(v_6 - v_4) + 9{\cdot}50\,(v_{11} - v_{10}) - 2{\cdot}69\,(v_3 - v_2)$$
$$-\,21{\cdot}12\,(v_6 - v_5) + 0{\cdot}07\,(v_{12} - v_{10}) - 73{\cdot}9 = 0$$

Dieselbe nach $v_1\ v_2\ v_3 \ldots$ geordnet lautet:

$$-\,4{\cdot}79\,v_1 + 7{\cdot}48\,v_2 - 2{\cdot}69\,v_3 - 2{\cdot}14\,v_4 + 21{\cdot}12\,v_5 - 18{\cdot}98\,v_6 - 9{\cdot}57\,v_{10} + 9{\cdot}50\,v_{11} + 0{\cdot}07\,v_{12} - 73{\cdot}9 = 0$$

Hierin muß die Summe der Koeffizienten gleich Null sein.

Zusammenstellung der Koeffizienten der vier Bedingungsgleichungen:

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	ω
a	−4·79	+7·48	−2·69	−2·14	+21·12	−18·98	.	.	.	−9·57	+9·50	+0·07	−73·9
b	−1	.	+1	−1	+1	.	.	.	.	.	−1	+1	− 1·7
c	.	−1	+1	−1	.	+1	−1	+1	.	.	.	.	+ 2·6
d	.	.	.	.	−1	+1	−1	.	+1	−1	+1	.	− 3·9

Die Normalgleichungen lauten allgemein:

$$[aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + [ad]\,k_4 + \omega_1 = 0$$
$$[bb]\,k_2 + [bc]\,k_3 + [bd]\,k_4 + \omega_2 = 0$$
$$[cc]\,k_3 + [cd]\,k_4 + \omega_3 = 0$$
$$[dd]\,k_4 + \omega_4 = 0$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$
\begin{aligned}
\underline{1078{\cdot}84\ k_1} + 15{\cdot}93\ k_2 - 27{\cdot}01\ k_3 - 20{\cdot}93\ k_4 - 73{\cdot}90 &= 0\\
\underline{6{\cdot}00\ k_2} + \ 2{\cdot}00\ k_3 - \ 2{\cdot}00\ k_4 - \ 1{\cdot}70 &= 0\\
\underline{6{\cdot}00\ k_3} + \ 2{\cdot}00\ k_4 + \ 2{\cdot}60 &= 0\\
\underline{6{\cdot}00\ k_4} - \ 3{\cdot}90 &= 0
\end{aligned}
$$

Die Auflösung durch sukzessive Elimination der Unbekannten gibt:

$$k_1 = +\ 0{\cdot}059,\quad k_2 = +\ 0{\cdot}959,\quad k_3 = -\ 0{\cdot}990,\quad k_4 = +\ 1{\cdot}505.$$

Nach Anleitung der obigen Koeffizienten-Zusammenstellung erhält man folgende tabellarische Berechnung der Korrektionen v:

Nr.	$k_1\,a$	$k_2\,b$	$k_3\,c$	$k_4\,d$	v		vv
1	−0·283	−0·959	.	.	1·242		1·543
2	+0·441	.	+0·990	.	+1·431	0·001	2·048
3	−0·159	+0·959	−0·990	.	0·190		0·036
4	−0·126	−0·959	+0·990	.	0·095		0·009
5	+1·246	+0·959	.	−1·505	+0·700	0·000	0·490
6	−1·120	.	−0·990	+1·505	−0·605		0·366
7	.	.	+0·990	−1·505	0·515		0·265
8	.	.	−0·990	.	0·909	0·000	0·980
9	.	.	.	+1·505	+1·505		2·265
10	−0·565	.	.	1·505	2·070		4·285
11	+0·561	−0·959	.	+1·505	+1·107	0·000	1·225
12	−0·004	+0·959	.	.	+0·963		0·927
							14·439

Eine Probe für $[vv]$ bekommt man durch die Formel $[vv] = -[k\omega]$.

$$
\begin{aligned}
-\ k_1\ \omega_1 &= +\ 4{\cdot}360\\
-\ k_2\ \omega_2 &= +\ 1{\cdot}630\\
-\ k_3\ \omega_3 &= +\ 2{\cdot}574\\
-\ k_4\ \omega_4 &= \underline{+\ 5{\cdot}870}\\
-\ [k\omega] &= 14{\cdot}434\\
[vv] &= \underline{14{\cdot}439}\\
\text{Mittel}\ & \ \ 14{\cdot}4365
\end{aligned}
$$

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung ist, wenn r die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} = \sqrt{\frac{14{\cdot}4365}{4}} = \pm\ 1''{\cdot}90$$

Fügt man die Verbesserungen v zu den beobachteten Richtungen hinzu, so erhält man die ausgeglichenen Richtungen:

Nr.	Beobachtet			v	Ausgeglichen		
1	187°	25′	50″9	—1″2	187°	25′	49″7
2	211	10	11·8	+1·4	211	10	13·2
3	249	12	19·9	—0·2	249	12	19·7
4	69	12	19·9	—0·1	69	12	19·8
5	108	04	42·0	+0·7	108	04	42·7
6	113	46	21·7	—0·6	113	46	21·1
7	293	46	19·1	—0·5	293	46	18·6
8	31	10	11·8	—1·0	31	10	10·8
9	95	35	13·9	+1·5	95	35	15·4
10	275	35	20·4	—2·1	275	35	18·3
11	288	04	42·0	+1·1	288	04	43·1
12	7	25	49·2	+1·0	7	25	50·2

Ausgeglichene Winkel.

3—1 = 61° 46′ 30″0			3—2 = 38° 02′ 06″5		
5—4 = 38 52 22·9			8—7 = 97 23 52·2		
12—11 = 79 21 07·1			6—4 = 44 34 01·3		
180 00 00·0			180 00 00·0		
6—5 = 5° 41′ 38″4			9—8 = 64° 25′ 04″6		
9—7 = 161 48 56·8			12—10 = 91 50 31·9		
11—10 = 12 29 24·8			2—1 = 23 44 23·5		
180 00 00·0			180 00 00·0		

Prüfung der Seitengleichung:

log sin (23° 44′ 23″5) = 9·6048573
» » (44 34 01·3) = 9·8461782
» » (12 29 24·8) = 9·3350023
8·7860378

» » (38° 02′ 06″5) = 9·7896827
» » (5 41 38·4) = 8·9965795
» » (91 50 31·9) = 9·9997755
8·7860377

Mit den ausgeglichenen Winkeln erhält man alle Dreiecksseiten auf allen Wegen übereinstimmend, folglich auch widerspruchsfrei die Koordinaten der zu bestimmenden Punkte.

Gegeben: »1 Föllbaumberg« : y = 97397·290 x = 34088·020
»2 Hochkogel« : y = 100460·220 x = 35251·181
Basis »1—2« : s = 3276·352 log s = 3·5153906

Südwinkel (1—2) = σ_1 = 69° 12′ 19″8

Koordinaten von »5 Schlageben« : y = 100189·642 x = 33176·497
»4 Fastertau« : y = 99260·223 x = 33267·435.

2) Gleichzeitige Bestimmung der Punkte »3 6« durch vermittelnde Richtungsbeobachtungen.

Abriß für den zu bestimmenden Punkt 3.

Punkt	$R_0 \pm 180$	σ′	R_m	r_0
			65° 26′ 35·3″	
1	252° 53 32·0″	252° 53′ 30·6″	187° 26′ 56·4″	252° 53 31·7″
4	163 04 39·4	163 04 40·0	97 38 06·6	163 04 41·9
5	136 01 52·1	136 01 56·4	70 35 22·1	136 01 57·4
2	65 56 07·3	65 56 03·0	0 29 27·7	65 56 03·0
3	. . .	97 59 46·4	32 33 09·0	97 59 44·3

Abriß für den zu bestimmenden Punkt 6.

Punkt	$R_0 \pm 180$	σ′	R_m	r_0
			147° 00′ 11·0″	
1	. . .	258° 45′ 16·1″	111° 45′ 09·0″	258° 45′ 20·0″
4	184° 04′ 05·4″	184 04 06·2	37 03 59·2	184 04 10·2
5	147 00 02·0	147 00 11·0	0 00 00·0	147 00 11·0
6	. . .	277 59 46·4	130 59 33·0	277 59 44·0

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen.

Richtungen	Punkte		a		b		c		d		ω	
äussere	3	1		−127·7		+39·3						−1·4
		4		+45·1		+148·1						+0·6
		5		+75·5		+78·2						+4·3
		2		+108·3		−48·4						−4·3
innere		1	−127·7	−233·8	+39·3	−16·1		+85·4		+12·0	−1·1	−0·7
		4	+45·1	−60·5	+148·1	+92·7		+85·4		+12·0	−1·9	−1·5
		5	+75·5	−30·1	+78·2	+22·8		+85·4		+12·0	−1·0	−0·6
		2	+108·3	+2·7	−48·4	−103·8		+85·4		+12·0	0	+0·4
		6	+427·0	+321·4	+60·0	+4·6	−427·0	−341·6	−60·0	−48·0	+2·1	+2·5
äussere	6	4						−12·1		+169·8		+0·8
		5						+72·5		+111·7		+9·0
innere		1		−106·8		−15·0	−101·8	+15·3	+20·2	−40·2	−3·9	−2·5
		4		−106·8		−15·0	−12·1	+105·0	+169·8	+109·4	−4·0	−2·6
		5		−106·8		−15·0	+72·5	+189·6	+111·7	+51·3	0	+1·4
		3	+427·0	+320·2	+60·0	+45·0	−427·0	−309·9	−60·0	−120·4	+2·4	+3·8

(Fortsetzung folgt.)

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
DER VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III. Kübeckgasse 12.
Österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175

Erscheint am 1. und 16. jeden Monats.
Preis:
12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch
Ad. della Torre's Buch- & Kunstdruckerei:
Wien, IX. Porzellangasse 28.

Nr. 15. Wien, am 1. August 1904. II. Jahrgang.

Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme.

Von **S. Wellisch,** Oberingenieur der Stadt Wien.

(Fortsetzung).

Normalgleichungen:

$$\underline{334818\,.\,dx_3} + 20198\,.\,dy_3 - 269548\,.\,dx_6 - 70703\,.\,dy_6 + 2754 = 0$$

$$\underline{54803\,.\,dy_3} - 20541\,.\,dx_6 - 7599\,.\,dy_6 + 633 = 0$$

$$\underline{294853\,.\,dx_6} + 84450\,.\,dy_6 - 1640 = 0$$

$$\underline{74901\,.\,dy_6} + 423 = 0$$

Vorläufige Koordinaten von 3:	$y' = 98872{\cdot}422$	$x' = 34542{\cdot}060$
Koordinaten - Verbesserungen:	$dy_3 = \underline{0{\cdot}010}$	$dx_3 = \underline{0{\cdot}008}$
Definitive Koordinaten von 3:	$y = 98872{\cdot}412$	$x = 34542{\cdot}052$
Vorläufige Koordinaten von 6:	$y' = 99346{\cdot}149$	$x = 34475{\cdot}514$
Koordinaten - Verbesserungen:	$dy_6 = \underline{-0{\cdot}020}$	$dx_6 = \underline{+0{\cdot}004}$
Definitive Koordinaten von 6:	$y = 99346{\cdot}129$	$x = 34475{\cdot}518$

Bestimmung des mittleren Fehlers m einer beobachteten Richtung.

Nr.	dσ	red dσ	m	v	vv
1	+0·629		—1·4	—0·8	0·64
2	—1·842		+0·6	—1·2	1·44
3	—1·386		+4·3	+2·9	8·41
4	—0·382		—4·3	—4·7	22·09
5	+0·629	+2·130	—0·7	+1·4	1·96
6	—1·842	—0·341	—1·5	—1·8	3·24
7	—1·386	+0·115	—0·6	—0·5	0·25
8	—0·382	+1·119	+0·4	+1·5	2·25
9	—4·524	—3·023	+2·5	—0·5	0·25
10	—3·444		+0·8	—2·6	6·76
11	—1·944		+9·0	+7·1	50·41
12	—0·811	+1·870	—2·5	—0·6	0·36
13	—3·444	—0·763	—2·6	—3·4	11·56
14	—1·944	+0·737	+1·4	+2·1	4·41
15	—4·524	—1·843	+3·8	+2·0	4·00
					118·03

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-q}} = \sqrt{\frac{118{\cdot}03}{15-4}} = \pm 3{\cdot}28''$$

3) Die gleichzeitige Ausgleichung des Viereckes »1—2 9 8« liefert die Daten:

Koordinaten von 8: y = 98733·565 x = 36739·159
» » 9: y = 99199·577 x = 37951·849

Mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung: $m = \pm 1''96$

Die gleichzeitige Bestimmung der Punkte »10—11« gibt:
Koordinaten von 10: y = 100488·652 x = 38027·204
» » 11: y = 100530·406 x = 37655·931

Mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung: $m = \pm 2''47$

Es resultiert ferner:

Koordinaten von 7: y = 99261·785 x = 34181·971
» » 12: y = 100174·555 x = 37396·749

Südwinkel der Stollenachse von »7 Gamingpfeiler« nach »11 Lunzpfeiler«:
$20^0\ 03'\ 40''3$

Mittlerer Fehler der Stollenachsrichtung . . . $M = \pm 4''06$
Länge der Stollenachse von Pfeiler zu Pfeiler . S = 3698·351 m
Länge der Kontrollbasis »11—12« . . . . . . B = 440·233 »

b) Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Produkte.

Sind $s_1\, s_2\, s_3 \ldots$ die verschiedenen Strahlenlängen des auszugleichenden Dreiecksnetzes, so tritt bei gleichen Genauigkeitsgewichten an die Stelle von $[v\ v] = \min$ die neue Minimumsbedingung $[s\ v\ v] = \min$. Man hat dann bei Ausgleichungen bedingter Beobachtungen mit vier Korrelaten die Normalgleichungen:

$$\left[\frac{aa}{s}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{s}\right] k_2 + \left[\frac{ac}{s}\right] k_3 + \left[\frac{ad}{s}\right] k_4 + \omega_1 = 0$$

$$\left[\frac{ab}{s}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{s}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{s}\right] k_3 + \left[\frac{bd}{s}\right] k_4 + \omega_2 = 0$$

$$\left[\frac{ac}{s}\right] k_1 + \left[\frac{bc}{s}\right] k_2 + \left[\frac{cc}{s}\right] k_3 + \left[\frac{cd}{s}\right] k_4 + \omega_3 = 0$$

$$\left[\frac{ad}{s}\right] k_1 + \left[\frac{bd}{s}\right] k_2 + \left[\frac{cd}{s}\right] k_3 + \left[\frac{dd}{s}\right] k_4 + \omega_4 = 0$$

und die Korrektionsformeln:

$$v_1 = \frac{a_1}{s_1} k_1 + \frac{b_1}{s_1} k_2 + \frac{c_1}{s_1} k_3 + \frac{d_1}{s_1} k_4$$

$$v_2 = \frac{a_2}{s_2} k_1 + \frac{b_2}{s_2} k_2 + \frac{c_2}{s_2} k_3 + \frac{d_2}{s_2} k_4$$

u. s. w.

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung von der fingierten Länge $s=1$ ist dann $\mu = \sqrt{\frac{[svv]}{r}}$ wobei man für die Berechnung von $[svv]$ die Probe hat:

$$[svv] = -[k\omega].$$

Bei Ausgleichungen vermittelnder Beobachtungen mit vier Unbekannten hat man unter der Annahme gleicher Genauigkeitsgewichte die Normalgleichungen:

$$[saa]\ dx' + [sab]\ dy' + [sac]\ dx'' + [sad]\ dy'' + [sa\omega] = 0$$
$$[sab]\ dx' + [sbb]\ dy' + [sbc]\ dx'' + [sbd]\ dy'' + [sb\omega] = 0$$
$$[sac]\ dx' + [sbc]\ dy' + [scc]\ dx'' + [scd]\ dy'' + [sc\omega] = 0$$
$$[sad]\ dx' + [sbd]\ dy' + [scd]\ dx'' + [sdd]\ dy'' + [sd\omega] = 0$$

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung von der fingierten Länge $s=1$ ist dann $\mu = \sqrt{\frac{[svv]}{n-4}}$, somit der mittlere Fehler eines Strahles von der Länge S:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{S}}$$

In aller Strenge sollte man den äußeren Richtungen die nach den Regeln des § 63 in Jordan's »Ausgleichungsrechnung« zu bestimmenden Genauigkeitsgewichte beilegen. Im vorliegenden Beispiele wurde jedoch, um die Übersicht nicht zu trüben, durchwegs $p = 1$ angenommen. Die Behandlung dieses Gegenstandes soll einer separaten Betrachtung vorbehalten werden.

1.) Gleichzeitige Bestimmung des Viereckes »1—2—5—4« durch bedingte Beobachtungen mit Korrelaten.

Die Elemente der Bedingungsgleichungen unter Einführung der Strahlenlängen in km.

Nr.	a	b	c	d	s	$\frac{a}{s}$	$\frac{1}{s}$
1	— 4·79	— 1	.	.	2·09	—2·292	0·478
2	+ 7·48	.	— 1	.	2·32	+3·224	0·431
3	— 2·69	+ 1	+ 1	.	3·28	—0·820	0·305
4	— 2·14	— 1	— 1	.	3·28	—0·652	0·305
5	+21·12	+ 1	.	— 1	2·94	+7·184	0·340
6	—18·98	.	+ 1	+ 1	2·04	—9·304	0·490
7	.	.	— 1	— 1	2·04	·	0·490
8	.	.	+ 1	.	2·32	·	0·431
9	.	.	.	+ 1	0·93	·	1·075
10	— 9·57	.	.	— 1	0·93	—10·290	1·075
11	+ 9·50	— 1	.	+ 1	2·94	+3·231	0·340
12	+ 0·07	+ 1	.	.	2·09	+0·033	0·478
ω	—73·9	—1·7	+ 2·6	—3·9			

Normalgleichungen:

$$\underline{496{\cdot}21\ k_1} + 6{\cdot}110\ k_2 - 12{\cdot}696\ k_3 - 2{\cdot}967\ k_4 - 73{\cdot}9 = 0$$

$$\underline{2{\cdot}246\ k_2} + 0{\cdot}610\ k_3 - 0{\cdot}680\ k_4 - 1{\cdot}7 = 0$$

$$\underline{2{\cdot}452\ k_3} + 0{\cdot}980\ k_4 + 2{\cdot}6 = 0$$

$$\underline{3{\cdot}810\ k_4} - 3{\cdot}9 = 0$$

$k_1 = +\ 0{\cdot}100,\ k_2 = +\ 1{\cdot}461,\ k_3 = -\ 1{\cdot}616,\ k_4 = +\ 1{\cdot}778.$

Verbesserungen v.

Nr.	$\frac{a}{s}\ k_1$	$\frac{b}{s}\ k_2$	$\frac{c}{s}\ k_3$	$\frac{d}{s}\ k_3$	v	svv
1	—0·229	—0·698	·	·	—0·927	1·796
2	+0·322	·	+0·696	·	+1·018	2·404
3	—0·082	+0·446	—0·493	·	—0·129	0·054
4	—0·065	—0·446	+0·493	·	—0·018	0·001
5	+0·718	+0·497	·	+0·605	+0·610	1·094
6	—0·930	·	—0·792	+0·871	—0·851	1·477
7	·	·	+0·792	—0·871	—0·079	0·013
8	·	·	—0·696	·	—0·696	1·124
9	·	·	·	+1·911	+1·911	3·396
10	—1·029	·	·	—1·911	—2·940	8·039
11	+0·323	—0·497	·	+0·605	+0·431	0·546
12	+0·003	+0·698	·	·	+0·701	1·027
						20·971

$$
\begin{aligned}
-k_1\,\omega_1 &= +7·390\\
-k_2\,\omega_2 &= +2·484\\
-k_3\,\omega_3 &= +4·202\\
-k_4\,\omega_4 &= +6·934\\
\hline
-[k\omega] &= 21·010\\
[svv] &= 20·971\\
\hline
\text{Mittel} &= 20·9905
\end{aligned}
$$

$$\mu = \pm\ 2·29$$

Ausgeglichene Richtungen.

Nr.	Beobachtet			v	Ausgeglichen		
1	187°	25′	50·9″	−0·9	187°	25′	50·0″
2	211	10	11·8	+1·0	211	10	12·8
3	249	12	19·9	−0·1	249	12	19·8
4	69	12	19·9	0·0	69	12	19·9
5	108	04	42·0	+0·6	108	04	42·6
6	113	46	21·7	−0·9	113	46	20·8
7	293	46	19·1	−0·1	293	46	19·0
8	31	10	11·8	−0·7	31	10	11·1
9	95	35	13·9	+1·9	95	35	15·8
10	275	35	20·4	−3·0	275	35	17·4
11	288	04	42·0	+0·4	288	04	42·4
12	7	25	49·2	+0·7	7	25	49·9

Will man mehrere Ausgleichungsmethoden in Bezug auf ihre Rechenschärfe untersuchen, so kann man bei Richtungsbeobachtungen so vorgehen, daß man für die zu vergleichenden Methoden die Differenzen in den Hin- und Hervisuren oder zwischen den äußeren und inneren Richtungen eines und desselben Strahles nach der Ausgleichung gegenüberstellt und dann jener Methode den Vorzug gibt, welche die geringeren Differenzen übrig läßt. Dies ist nun bei der neuen Methode durchwegs der Fall, nämlich:

	M. d. kl. Quadrate		M. d. kl. Produkte	
Richtung Nr. 1 =	187° 25′ 49·7″	$\triangle = -0·5''$	187° 25 50·0″	$\triangle = +0·1$
» 12 =	7 25 50·2		7 25 49·9	
» 2 =	211 10 13·2	$\triangle = +2·4$	211 10 12·8	$\triangle = +1·7$
» 8 =	31 10 10·8		31 10 11·1	
» 3 =	249 12 19·7	$\triangle = -0·1$	249 12 19·8	$\triangle = -0·1$
» 4 =	69 12 19·8		69 12 19·9	
» 5 =	108 04 42·7	$\triangle = -0·4$	108 04 42·6	$\triangle = +0·2$
» 11 =	288 04 43·1		288 04 42·4	
» 6 =	113 46 21·1	$\triangle = +2·5$	113 46 20·8	$\triangle = +1·8$
» 7 =	293 46 18·6		293 46 19·0	
» 9 =	95 35 15·4	$\triangle = -2·9$	95 35 15·8	$\triangle = -1·6$
» 10 =	275 35 18·3		275 35 17·4	

Ausgeglichene Winkel.

3 — 1 = 61° 46′ 29·8″		3 — 2 = 38° 02′ 07·0″	
5 — 4 = 38 52 22·7		8 — 7 = 97 23 52·1	
12 — 11 = 79 21 07·5		6 — 4 = 44 34 00·9	
180 00 00·0		180 00 00·0	
6 — 5 = 5° 41′ 38·2″		9 — 8 = 64° 25′ 04·7″	
9 — 7 = 161 48 56·8		12 — 10 = 91 50 32·5	
11 — 10 = 12 29 25·0		2 — 1 = 23 44 22·8	
180 00 00·0		180 00 00·0	

Prüfung der Seitengleichung.

log sin (23° 44′ 22·8″) = 9·6048539
» » (44 34 00·9) = 9·8461773
» » (12 29 25·0) = 9·3350033
8·7860345

» » (38° 02′ 07·0″) = 9·7896840
» » (5 41 38·2) = 8·9965753
» » (91 50 32·5) = 9·9997754
8·7860347

Koordinaten von »5 Schlageben« : y = 100189·641   x = 33176·500
» » »4 Fastertau« : y = 99260·230   x = 33267·436

2) Gleichzeitige Bestimmung der Punkte »3—6« durch vermittelnde Richtungsbeobachtungen.

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen.

Richtungen	Punkte		a		b		c		d		ω	
äußere	3	1		—127·7		+ 39·3						—1·1
		4		+ 45·1		+148·1						+0·2
		5		+ 75·5		+ 78·2						+4·3
		2		+108·3		— 48·4						—4·2
innere		1	—127·7	—184·9	+ 39·3	— 10·8		+ 29·3		+ 4·1	—1·1	—0·2
		4	+ 45·1	— 12·1	+148·1	+ 98·0		+ 29·3		+ 4·1	—2·9	—2·0
		5	+ 75·5	+ 18·3	+ 78·2	+ 28·1		+ 29·3		+ 4·1	—1·1	—0·2
		2	+108·3	+ 51·1	— 48·4	— 98·5		+ 29·3		+ 4·1	0	+0·9
		6	+427·0	+369·8	+ 60·0	+ 9·8	—427·0	—397·7	— 60 0	— 45·9	+2·1	+3·0
äußere	6	4						— 12·1		+169·8		+0·2
		5						+ 72·5		+111·7		+9·1
innere		1		— 89·2		— 5·5	—101 8	— 42·8	+ 20·2	— 54·4	— 3·9	—1·4
		4		— 89·2		— 5·5	— 12 1	+ 46·9	+169·8	+ 95·2	—5·2	—2·7
		5		89·2		— 5·5	+ 72·5	+131·5	+111·7	+ 87·1	0	+2·5
		3	+427·0	+387·8	+ 60·0	+ 54·5	—427 0	—368 0	— 60 0	—134·6	+2·4	+4·9

Normalgleichungen.

$$\begin{array}{rrrrrl}
\underline{262204\ dx_3} & +\ 9894\ dy_3 & -\ 151160\ dx_6 & -\ 36453\ dy_6 & +\ 1744 & = 0 \\
 & \underline{80198\ dy_3} & -\ 12574\ dx_6 & -\ 4112\ dy_6 & +\ 697 & = 0 \\
 & & \underline{190360\ dx_6} & +\ 60974\ dy_6 & -\ 5 & = 0 \\
 & & & \underline{83030\ dy_6} & +\ 1210 & = 0
\end{array}$$

Vorläufige Koordinaten von 3	: y' = 98872·422		x' = 34542·060	
Koordinaten-Verbesserungen	: dy_3 = —0·009		dx_3 = 0·011	
Definitive Koordinaten von 3	: y = 98872·413		x = 34542·049	
Vorläufige Koordinaten von 6	: y' = 99346·149		x' = 34475·514	
Koordinaten-Verbesserungen	: dy_6 = —0·017		dx_6 = 0·004	
Definitive Koordinaten von 6	: y = 99346·132		x = 34475·510	

Bestimmung des mittleren Fehlers μ einer beobachteten Richtung von $s = 1$ km Länge.

Nr	s	dσ	sdσ	red. dσ	ω	v	svv
1	1·54	+1·051			—1·1	0·0	0·00
2	1·33	—1·829			+0·2	—1·6	3·40
3	1·90	—1·534			+4·3	+2·8	14·89
4	1·74	—0·755			—4·2	—5·0	43·50
5	1·54	+1·051	+1·619	+1·9	—0·2	+1·7	4·45
6	1·33	—1·829	—2·433	—0·9	—2·0	—2·9	11·19
7	1·90	—1·534	—2·915	—0·6	—0·2	—0·8	1·22
8	1·74	—0·755	—1·314	+0·1	+0·9	+1·0	1·74
9	0·48	—2·509	—1·204	—1·6	+3·0	+1·4	0·94
10	1·21	—2·839			+0·2	—2·6	8·18
11	1·55	—2·189			+9·1	+6·9	73·80
12	1·99	+0·064	+0·127	+1·6	—1·4	+0·2	0·08
13	1·21	—2·839	—3·435	—1·3	—2·7	—4·0	19·36
14	1·55	—2·189	—3·393	—0·7	+2·5	+1·8	5·02
15	0·48	—2·509	—1·204	—1·0	+4·9	+3·9	7·30
							195·07

$$\mu = \sqrt{\frac{195{\cdot}07}{11}} = \pm\ 4{\cdot}21''$$

(Schluß folgt.)

Ein neuer Anschlagsapparat.

Von **M. Komel.**

Es ist wohl jedem praktischen Geometer geläufig, daß der Gebrauch der sogenannten Anschlagsnadel bei Aufnahmen mit dem Meßtische, welche halbwegs Anspruch auf Genauigkeit erheben wollen, absolut zu verpönen ist. Der Umstand, daß die Linealkante wegen der wenn auch geringen Dicke der

Bei der Übernahme der Geschäfte eines verantwortlichen Redakteurs dieser Zeitschrift kann ich nicht umhin vorerst der verehrlichen Vereinsleitung, die mich hierzu auserlesen, meinen aufrichtigen Dank abzustatten, gleichzeitig aber auch den geehrten Herren Mitgliedern des »Vereines österr. k. k. Vermessungsbeamten«, deren Fachgenosse zu sein ich die Ehre habe, die Versicherung zu geben, daß es stets mein Bestreben sein wird, den in ihrem Vereinsorgane zu besprechenden Wünschen bestens entgegen zu kommen und den zur Wahrung ihrer Standesinteressen zu veröffentlichenden Anregungen in wärmster Weise die weitgehendste Beachtung zu schenken.

Wohl bin ich mir der Schwierigkeiten bewußt, welche meiner durch Übernahme dieser Geschäfte aus der bewährten Hand meines geschätzten Herrn Vorgängers harren, der dieselben so tüchtig, sachkundig und hingebungsvoll bis jetzt geleitet hatte, doch hege ich die Hoffnung, daß die Herren Mitglieder des Vereines das Wohlwollen, welches sie Herrn Obergeometer Reinisch unentwegt entgegengebracht haben, auch mir nicht versagen und mich in dem Bestreben, die Vereinszeitschrift auf ihrer wissenschaftlichen Höhe zu erhalten sowie dieselbe zum nicht rastenden Sachwalter aller ihrer Bestrebungen in Standesfragen zu machen, zum Wohle der Gesamtheit des Vermessungs-Beamtenkörpers kräftigst unterstützen werden.

Wird mir die erbetene Unterstützung zu teil, so werde ich regsamst bestrebt sein das mich hochehrende Vertrauen, welches die Leitung des Vereines der k. k. Vermessungsbeamten Österreichs in mich setzte, nach besten Kräften mir auch weiterhin zu erhalten trachten. **A. Mauko.**

Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme.

Von **S. Wellisch,** Oberingenieur der Stadt Wien.

(Schluß).

3) Die gleichzeitige Ausgleichung des Viereckes »1—2—9—8« liefert die Daten:

Koordinaten von	8 : y = 98733·561		x = 36739·165
»	9 : y = 99199·565		x = 37951·851

$$\mu = \pm 2''\!\cdot79$$

Die gleichzeitige Bestimmung der Punkte »10—11« gibt:

Koordinaten von	10 : y = 100488·633	x = 38027·190
»	11 : y = 100530·385	x = 37655·942

$$\mu = \pm 3''\!\cdot40$$

Es resultiert ferner:

Koordinaten von	7 : y = 99261·784	x = 34181·961
»	12 : y = 100174·531	x = 37396·744

Südwinkel der Stollenachse von »7 Gamingpfeiler« nach »11 Lunzpfeiler«:

$20^0\ 03'\ 38''\!\cdot\!8$

Mittlerer Fehler der Stollenachsrichtung	$M = \pm 2''\!\cdot\!81$	
Länge der Stollenachse von Pfeiler zu Pfeiler	$S = 3698\!\cdot\!364$	m
Länge der Kontrollbasis »11 — 12«	$B = 440\!\cdot\!243$	»

Gegenüberstellung der Hauptresultate.

	Genäherte Werte als Mittel aus je zwei Dreiecken	Ausgeglichene Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate	Ausgeglichene Werte nach der Methode der kleinsten Produkte
Tunnelrichtung . . .	20° 03′ 36″·6	20° 03′ 40″·3	20° 03′ 38″·8
Mittlerer Fehler derselben	—	± 4″·06	± 2″·81
Tunnellänge	3698·380	3698·351	3698·364
Basislänge gerechnet . .	440·250	440·233	440·243
» direkt gemessen	440·258	440·258	440·258

Nach der Methode der kleinsten Quadrate:
Mittlerer Fehler einer beobachteten Richtung I. Güte:

$$m = \frac{1\!\cdot\!90 + 1\!\cdot\!96}{2} = \pm 1''\!\cdot\!93$$

» » » » » II. Güte:

$$m = \frac{3\!\cdot\!27 + 2\!\cdot\!47}{2} = \pm 2\!\cdot\!87$$

Nach der Methode der kleinsten Produkte:
Mittlerer Fehler einer beob. Richtung I. Güte von s = 1 km Länge:

$$\mu = \frac{2\!\cdot\!29 + 2\!\cdot\!79}{2} = \pm 2''\!\cdot\!54$$

» » » » » II. Güte von s = 1 km Länge:

$$\mu = \frac{4\!\cdot\!21 + 3\!\cdot\!40}{2} = \pm 3\!\cdot\!81$$

» » » » » I. Güte von der durchschn. Länge von 2·56 km : m = ± 1·59

» » » » » II. Güte von der durchschn. Länge von 1·55 km : m = ± 3·07

VIII. Allgemeine Anwendung der Methode der kleinsten Produkte.

In der Ausgleichungsrechnung handelt es sich im allgemeinen darum, aus einer Anzahl von Gleichungen, die größer ist als die Anzahl der darin vorkommenden Unbekannten, diejenigen Werte der letzteren zu ermitteln, welche allen Gleichungen am besten entsprechen. Sind in einer Reihe von Gleichungen:

$$a_1\,x + b_1\,y + l_1 = 0$$
$$a_2\,x + b_2\,y + l_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n\,x + b_n\,y + l_n = 0$$

die Größen l durch Beobachtung erhalten, die Koeffizienten a, b gegebene Zahlenwerte und x, y die zu suchenden Unbekannten, so wird es im allgemeinen nicht möglich sein, für die letzteren solche Werte zu finden, welche sämtlichen Bedingungsgleichungen strenge Genüge leisten, aber es wird immer möglich sein, zwei Unbekannte zu ermitteln, welche die nachstehenden Fehlergleichungen befriedigen:

$$\begin{aligned} a_1\, x + b_1\, y + l_1 &= v_1 \\ a_2\, x + b_2\, y + l_2 &= v_2 \\ \ldots\ldots &\ldots\ldots \\ a_n\, x + b_n\, y + l_n &= v_n \end{aligned}$$

Das Bestreben der methodischen Ausgleichung ist nun dahin gerichtet, die Widersprüche v so klein als nur möglich zu machen, zugleich aber die Unbekannten selbst durch die Einführung dieser Widersprüche so wenig als nur möglich von ihren wahren Werten zu entfernen. Nach der Methode der kleinsten Produkte dient nun dasjenige System der Unbekannten der Sache am besten, welches in den Gleichungen solche Widersprüche erzeugt, deren Quadrate, reduziert auf die Einheit der zu Grunde liegenden Längen, die kleinste Summe geben. Wenn v die an den Beobachtungen anzubringenden Verbesserungen und L jene Längen darstellen, auf deren Einheit nach der Elastizitätstheorie die Reduktion zu erfolgen hat, so ist die mathematische Formulierung dieser Minimumsbedingung der Ausdruck:

$$\left[\frac{vv}{L}\right] = \min$$

oder wenn den einzelnen Beobachtungen verschiedene Genauigkeitsgewichte p zukommen:

$$\left[\frac{pvv}{L}\right] = \min$$

Bezeichnet man $\frac{p}{L} = \pi$ als die reduzierten Gewichte, so lauten die Normalgleichungen in ihrer allgemeinsten Form:

$$\begin{aligned} [\pi aa]\, x + [\pi ab]\, y + [\pi al] &= 0 \\ [\pi ab]\, x + [\pi bb]\, y + [\pi bl] &= 0 \end{aligned}$$

Werden die absoluten Glieder der Bedingungsgleichungen von den in Betracht kommenden Längen direkt oder von Proportional-Funktionen derselben gebildet, was oft der Fall zu sein pflegt, so lauten die zugehörigen Normalgleichungen bei gleichen Genauigkeitsgewichten: (Beispiel a).

$$\begin{aligned} \left[\frac{aa}{l}\right] x + \left[\frac{ab}{l}\right] y + [a] &= 0 \\ \left[\frac{ab}{l}\right] x + \left[\frac{bb}{l}\right] y + [b] &= 0 \end{aligned}$$

Haben die Längenelemente L einen konstanten Wert, so geht die Methode der kleinsten Produkte in die Methode der kleinsten Quadrate über (Beispiel b).

Sind die Beobachtungsgrößen Längen oder Richtungen, so geht die Anwendung der neuen Methode aus den Analogieschlüssen zwischen einer geometrischen Messungsfigur und einem elastischen Stabsystem direkt hervor. Kommen jedoch in einer überschüssigen Reihe von Gleichungen Beobachtungen vor, die durch Ausgleichung zu verbessern wären, auf die aber die Regel von der kleinsten Deformationsarbeit direkt nicht anwendbar erscheint, wie Geschwindigkeiten, Zeiten, Temperaturen, elektrische Widerstände u. dgl., so kann man sich deren Beträge immer durch gemessene Längen ausgedrückt denken, wie es ja auch bei graphischen Darstellungen, nach graphostatischen Begriffen, tatsächlich der Fall ist, und kann dann die Ausgleichung so durchführen, wie wenn man es mit einem geometrischen Liniensystem zu tun hätte. Die graphische Darstellung derartiger Beobachtungen ist immer gerechtfertigt, wenn es sich um Größen handelt, die an Skalen, seien es gerade oder gebogene, abgelesen werden. Temperaturen und Barometerstände sind durch die Länge eines Quecksilberfadens gegeben; Zeiten, Stromstärken, Tourenzahlen u. dgl. gelangen entweder an elektrischen Registrierapparaten direkt zur graphischen Darstellung oder an Uhrwerken durch den Stand des Zeigers zur Ablesung. Auch im letzteren Falle handelt es sich um Skalenmaße, nicht aber um Winkelwerte, wie bei Richtungsbeobachtungen, weshalb man es im übertragenen Sinne immer nur mit Längenausgleichungen zu tun hat.

Einige Beispiele mögen dies näher erläutern.

a) Bestimmung der Konstanten eines Theodoliten mit Okularfilar-Schraubenmikrometer.

Ist D die zu messende Distanz,
λ der abgelesene Lattenabschnitt,
m der Abstand des fixen Fadens vom Nullzahn des Zählrechens,
s der Abstand dieses Nullzahnes vom beweglichen Faden,
C die Multiplikationskonstante und
c die additionelle Konstante des Instrumentes,

so lautet die Distanzformel

$$D = \frac{\lambda\, C}{m + s} + c$$

und die Fehlergleichung für die beiden Unbekannten C und c:

$$\frac{\lambda}{m + s}\, C + c - D = v.$$

Setzt man in die Minimumsbedingung für v die obigen Werte und für L die Lattenabschnitte λ (man könnte hiefür auch ebensogut die den Lattenabschnitten proportionalen Distanzen D—c oder ohne praktischen Nachteil direkt die Absolutglieder D einführen), so ergeben sich für die Unbekannten die Ansätze:

$$C = \frac{\left[\frac{1}{\lambda}\right]\left[\frac{D}{m+s}\right] - \left[\frac{1}{m+s}\right]\left[\frac{D}{\lambda}\right]}{\left[\frac{\lambda}{(m+s)^2}\right]\left[\frac{1}{\lambda}\right] - \left[\frac{1}{m+s}\right]\left[\frac{1}{m+s}\right]}$$

$$c = \frac{\left[\frac{\lambda}{(m+s)^2}\right]\left[\frac{D}{\lambda}\right] - \left[\frac{1}{m+s}\right]\left[\frac{D}{m+s}\right]}{\left[\frac{\lambda}{(m+s)^2}\right]\left[\frac{1}{\lambda}\right] - \left[\frac{1}{m+s}\right]\left[\frac{1}{m+s}\right]}$$

Als besonderen Fall wählen wir das von Obergeometer Ernst Engel in der »Österr. Zeitschr. f. Verm.« Jahrg. I, S. 65 nach der Methode der kleinsten Quadrate ohne Entfernungsgewichte behandelte Zahlenbeispiel. Darin ist $m = 2{\cdot}967$, näherungsweise $c = 0{\cdot}415$ und sind die sonstigen für die Konstantenbestimmung erforderlichen Elemente in der nachfolgenden Tabelle sammengestellt.

Nr.	D	λ	s
1	50·415	0·25	2·427
2	100·415	0·50	2·430
3	150·415	0·75	2·428
4	200·415	1·00	2·428
5	250·415	1·25	2·428
6	300·415	1·50	2·430

Man erhält zunächst: $\left[\frac{\lambda}{(m+s)^2}\right] = 0{\cdot}18032730$, $\left[\frac{1}{m+s}\right] = 1{\cdot}11203787$, $\left[\frac{D}{m+s}\right] = -195{\cdot}06038972$, $\left[\frac{1}{\lambda}\right] = 9{\cdot}8$, $\left[\frac{D}{\lambda}\right] = -1204{\cdot}063$ und schließlich die Resultate nach der Methode der kleinsten

Produkte:	$C = 1079{\cdot}249$	$c = 0{\cdot}398$
Quadrate:	$C = 1079\ 302$	$c = 0{\cdot}389$
Differenz:	$0{\cdot}053$	$0{\cdot}009$

In Prozenten des mittleren Fehlers ausgedrückt, der für C den Wert $\pm 0{\cdot}217$, für c den Wert $\pm 0{\cdot}038$ hat, beträgt somit der Unterschied zwischen den Ergebnissen beider Methoden in beiden Konstanten je 24%.

b) Bestimmung der Konstanten der Geschwindigkeitsformel.

Zum Messen der Geschwindigkeit fließender Gewässer vermittels des Woltman n'schen Flügels dient die Formel:

$$V = \alpha + \beta\, U,$$

worin V die Wassergeschwindigkeit und U die Anzahl der Flügelumdrehungen in der Sekunde, α und β aber die für jeden Flügel zu bestimmenden Konstanten bedeuten. Bewegt man den Flügel in vollständig ruhigem Wasser gleichförmig und geradlinig auf eine gemessene Strecke L mit den verschiedenen Geschwindigkeiten $v_1\ v_2\ \ldots\ v_n$, sind die jenen Geschwindigkeiten entsprechenden Zeiten $t_1\ t_2 \ldots t_n$ und die zugehörigen Tourenzahlen $u_1\ u_2 \ldots u_n$ so bestehen allgemein die Beziehungen:

$$V = \frac{L}{t} \text{ und } U = \frac{u}{t}$$

und man hat die Bedingungsgleichungen von der Form:

$$\frac{L}{t} = \alpha + \beta \frac{u}{t}$$

oder:

$$t\,\alpha + u\,\beta - L = 0$$

und somit die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} t_1\,\alpha + u_1\,\beta - L &= f_1 \\ t_2\,\alpha + u_2\,\beta - L &= f_2 \\ \ldots\ldots&\ldots \\ t_n\,\alpha + u_n\,\beta - L &= f_n \end{aligned}$$

Da hierin L für alle Messungen konstant ist, so geht die Minimumsbedingung $\left[\frac{ff}{L}\right]$ = min für die Methode der kleinsten Produkte in die für die Methode der kleinsten Quadrate giltige Form $[ff]$ = min über und man hat somit für beide Methoden die gleichlautenden Resultate:

$$\alpha = L\,\frac{[uu]\,[t] - [tu]\,[u]}{[tt]\,[uu] - [tu]\,[tu]}$$

$$\beta = L\,\frac{[tt]\,[u] - [tu]\,[t]}{[tt]\,[uu] - [tu]\,[tu]}$$

Hat man aber den verschiedenen Messungen auch verschiedene Längen $L_1\ L_2 \ldots L_n$ zu Grunde gelegt, so zieht die Methode der kleinsten Produkte diesem Umstande insofern Rechnung, als sie darauf Rücksicht nimmt, daß die Fehler in den t, u und v nicht mit den Längen proportional wachsen, sondern ebenso wie die Längenmessungsfehler das Quadratwurzelgesetz befolgen. Es lauten dann die neuen Formeln:

$$\alpha = \frac{\left[\frac{uu}{L}\right]\left[t\right] - \left[\frac{tu}{L}\right]\left[u\right]}{\left[\frac{tt}{L}\right]\left[\frac{uu}{L}\right] - \left[\frac{tu}{L}\right]\left[\frac{tu}{L}\right]}$$

$$\beta = \frac{\left[\frac{tt}{L}\right]\left[u\right] - \left[\frac{tu}{L}\right]\left[t\right]}{\left[\frac{tt}{L}\right]\left[\frac{uu}{L}\right] - \left[\frac{tu}{L}\right]\left[\frac{tu}{L}\right]}$$

zu welchen die Methode der kleinsten Quadrate nur durch Einführung von entsprechenden Längengewichten (neben den eventuell zuzuziehenden Genauigkeitsgewichten) gelangen würde. Die Nichtberücksichtigung des Längeneinflusses würde daher jedenfalls eine grobe Vernachlässigung gegenüber den strengen Regeln der auf der Elastizitätstheorie begründeten Methode, wie der methodischen Ausgleichungsrechnung überhaupt, bedeuten.

IX Kritische Bemerkungen über die Methode der kleinsten Quadrate.

Bei allen Ausgleichungsrechnungen, die mit besonderer Schärfe durchzuführen sind, erfreut sich die Methode der kleinsten Quadrate einer ausschließlichen Verwendung, und selbst in jenen Fällen, wo ein Näherungsverfahren genügt, wird dessen Wert nach dem strengen Maßstab der Methode der kleinsten Quadrate in der Regel vorerst geprüft. Bei der großen Wichtigkeit, die man der methodischen Ausgleichungsrechnung beizulegen berechtigt ist, erscheinen mit Rücksicht auf die Begründung der hier vorgetragenen Methode der kleinsten Produkte nähere Erklärungen geboten, die wir mit Benützung einiger aus Dr. Henke's klassischem Werke entnommener Stellen uns abzugeben erlauben.

Die zur Ausgleichung von Beobachtungsresultaten dienende Methode der kleinsten Quadrate wird bekanntlich durch Verallgemeinerung der Regel des arithmetischen Mittels aus dem Gauß'schen Fehlergesetze abgeleitet, also auf Grund einer nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgestellten empirischen Formel, die den natürlichen Verhältnissen nur näherungsweise entspricht. »Erkennt man nun«, sagt Henke, »die notwendige Voraussetzung der Wahrscheinlichkeitstheorie der Fehler als nicht, oder nicht immer, erfüllt, so erhebt sich die Frage, ob dann die Methode der kleinsten Quadrate noch immer als Prinzip der Ausgleichungsrechnung gelten darf, oder man wird nach einer anderen, einwurfsfreien Begründung dieser Methode suchen müssen«. Nun haben verschiedene kritische Untersuchungen die absolute Geltung des Gauß'schen Fehlergesetzes erschüttert, indem »nur eine angenäherte aber nicht durchgängige Giltigkeit der der mathematischen Behandlung der Fehlertheorie zu Grunde liegenden Annahmen behauptet werden kann«.

Bessel zeigt, »daß die Voraussetzungen über die Wahrscheinlichkeit der Fehler, wie sie das Gesetz der kleinsten Quadrate und also, nach der Ableitung von Gauß, auch das Prinzip des arithmetischen Mittels erfordere, durchaus nicht in allen praktisch vorliegenden Fällen als erfüllt anzusehen sind, oder daß man sich wenigstens solche Fälle denken kann, in denen sie nicht zulässig sind. — Wo daher nachweislich eine oder mehrere, die übrigen beträchtlich überwiegenden Fehlerursachen vorhanden sind, werden sich abweichende Resultate von den durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen ergeben.«

Jordan äußert sich wie folgt: »Wenn man weiß, daß die Fehler dem Gauß'schen Fehlergesetze folgen, so hat man die durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferten Ausgleichungsresultate als wahrscheinlichste im strengen Sinne zu betrachten. Wenn die Giltigkeit dieses Gesetzes nicht verbürgt ist, so haben die Ausgleichungsresultate nur den Charakter zweckmäßigster oder plausibelster Annahmen für die unbekannten Größen.«

»Haftet also dem Gauß'schen Fehlergesetze wie der darauf gegründeten Methode der kleinsten Quadrate unvermeidlich etwas Willkürliches und daher Unsicheres an, so warnt v. Kries nochmals ausdrücklich vor der durchweg üblichen Überschätzung ihrer Resultate«. Die Methode der kleinsten Quadrate betrachtet er »als ein rein konventionelles Auskunftsmittel, dessen man sich in allen Fällen bedient, selbst dann, wenn man nicht sicher ist, daß das Gauß'sche Fehlergesetz gilt, das man sogar wider besseres Wissen dann anwenden muß, wenn man sicher ist, daß die Voraussetzungen dieses Gesetzes nicht erfüllt sind.«

»Da im ganzen nicht viel darauf ankommt, ob die Voraussetzungen seiner Giltigkeit immer streng erfüllt sind, so nimmt man es als allgemein giltig an, weil nichts besseres an seine Stelle gesetzt werden kann.«

Wenn aber die Methode der kleinsten Quadrate bloß aus dem Grunde, weil man nichts besseres an die Stelle des Gauß'schen Fehlergesetzes setzen kann, zur strengen Ausgleichung von Beobachtungsresultaten angewendet wird, »so könnte nicht mehr behauptet werden, daß man dadurch die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten erhielte.«

Mit Recht hält es Dr. Henke für zweckmäßig, wenn man daher zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate die Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt nicht mehr in Anspruch nehmen würde. Wenn er aber das Problem der Ausgleichungsrechnung als eine Aufgabe erklärt, welche nur die Forderung des »möglichst nahe Liegens« zu erfüllen habe, so möchten wir es in aller Strenge bezeichnet haben als eine Aufgabe des »möglichst nahe Liegens unter geringstem Zwange«, wobei wir unter dem Zwang, den man einer Beobachtung durch Änderung ihrer Länge oder Richtung antut, die Spannung verstehen, die ein gleich großer Stab durch eine Kraft erleidet, die ihm dieselbe Deformation erteilt.

Erklärt Henke als mathematischen Ausdruck seines Prinzips den Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Quadrate, so erscheint unser strengeres Prinzip als die Grundlage der Methode der kleinsten Produkte, die wir als eine Schwester der ersteren, unabhängig von der Wahrscheinlichkeitstheorie, nach der strengen Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme einwandfrei begründet zu haben glauben.

Neustift bei Scheibbs, 1903.

Auftragsapparat nach Obergeometer Karl Michalek.

An der Vervollkommnung des Kartierungswesens nehmen die kleinen Auftragsapparate, die den Gebrauch von Zirkel und Maßstab heutzutage entbehrlich machen, einen großen Anteil. Im Anschlusse an das mit meist sehr präzisen Instrumenten bewerkstelligte Polygonnetz folgt die Detailauftragung, eine wichtige Arbeit, die an den Geometer in Bezug auf Geduld und Ausdauer größere Ansprüche stellt als die Schaffung des Polygonnetzes selbst.