Paper-ID: VGI_190508

Eine Gegenbemerkung zum Rückwärtseinschneiden

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Ober-Ingenieur*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **3** (5–6), S. 49–51

1905

BibTeX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_190508,
Title = {Eine Gegenbemerkung zum R{\"u}ckw{\"a}rtseinschneiden},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {49--51},
Number = {5--6},
Year = {1905},
Volume = {3}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Veröffentlichte Artikel werden honoriert.

Herausgeber und Verleger:
VEREIN DER ÖST. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN

Sprechstunden in der Vereinskanzlei [illegible]

Redaktion und Administration:
Wien, III/$_2$, Kegelgasse Nr. 13.
K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.

Erscheint am 1. jeden Monats.
Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften.
Preis:
12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme
durch die
Buchdruckerei J. Wladarz (vorm. Haase)
Baden bei Wien, Pfarrgasse 3.

Nr. 5–6. Wien, am 1. März 1905. III. Jahrgang.

Nachdruck der Original-Artikel nur mit Einverständnis der Redaktion gestattet.

Eine Gegenbemerkung zum Rückwärtseinschneiden.

(Zum Artikel in Jahrg. III, Seite 27 bis 29).

Die Bestimmung der Winkel φ und ψ beim Rückwärtseinschneiden mit Hilfe der unabänderlich gegebenen Größen a, b, α, β, γ aus den beiden Gleichungen:

$$\sin\varphi = A \sin\psi \quad \ldots \ldots \quad (1)$$
$$\varphi + \psi = B,$$

worin $A = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$ und $B = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$ bedeuten, ist stets eine eindeutige. Werden daher für φ und ψ auf irgend einem Wege Näherungswerte φ_0 und ψ_0 erhalten, welche die Widersprüche

$$\triangle A = A - \frac{\sin\varphi_0}{\sin\psi_0}$$

und

$$\triangle B = B - (\varphi_0 + \psi_0)$$

erzeugen, so lassen sich die übrigbleibenden Verbesserungen

$$\triangle\varphi = \varphi - \varphi_0$$
$$\triangle\psi = \psi - \psi_0$$

aus den beiden Bedingungsgleichungen

$$\sin(\varphi_0 + \triangle\varphi) = A \sin(\psi_0 + \triangle\psi)$$
$$\triangle\varphi + \triangle\psi = \triangle B$$

genau berechnen. Ist $\varsigma = \frac{1}{\sin 1''} = 206265''$ der Kreisbogen, dessen Länge gleich dem Radius ist, so gibt die Entwicklung der ersten Bedingungsgleichung:

$$\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \,.\, \triangle \varphi \,.\, \sin 1'' = A\,(\sin \psi_0 + \cos \psi_0 \; \triangle \psi \,.\, \sin 1'').$$

Setzt man hierin für $\triangle \psi$, bezw. $\triangle \varphi$ die aus der zweiten Bedingungsgleichung hervorgehenden Werte, so erhält man so auf elementarem Wege die Verbesserungen:

$$\triangle \varphi = \frac{\triangle B \,.\, A \cos \psi_0 + A \varsigma \sin \psi_0 - \varsigma \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 + A \cos \psi_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

$$\triangle \psi = \frac{\triangle B \,.\, \cos \varphi_0 - A \varsigma \sin \psi_0 + \varsigma \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 + A \cos \psi_0}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; (II)$$

die selbstverständlich auch durch Differenzierung von (I) erhalten werden, wenn man beachtet, daß mit der Änderung von φ_0, ψ_0 in φ, ψ nicht nur die Summe $\varphi_0 + \psi_0$ in B, sondern auch der Quotient $\frac{\sin \varphi_0}{\sin \psi_0} = A_0$ in A übergehen muß.

Nun hat aber Prof. Dr. W. L á s k a in Heft 2 dieser Zeitschrift, Seite 28, für diese Verbesserungen Formeln angegeben, welche von den soeben abgeleiteten, streng richtigen Gleichungen wesentlich abweichen und somit nicht richtig sein können. Macht man die Annahme

$$A = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \psi_0} = A_0 \text{ oder } \triangle A = 0$$

so gehen die Gleichungen (I) und (II) über in die L á s k a'schen Beziehungen:

$$\triangle \varphi = \triangle B \frac{\sin \varphi_0 \cos \psi_0}{\sin (\varphi_0 + \psi_0)}$$

$$\triangle \psi = \triangle B \frac{\sin \psi_0 \cos \varphi_0}{\sin (\varphi_0 + \psi_0)},$$

woraus hervorgeht, daß d i e s e l b e n d u r c h D i f f e r e n z i e r u n g d e r G l e i c h u n g (I) o h n e R ü c k s i c h t n a h m e a u f d i e V e r ä n d e r l i c h k e i t v o n A_0 e n t s t a n d e n s i n d. Da aber die Annahme $A = A_0$ unter den gegebenen Voraussetzungen als eine unmotivierte Willkür u n z u l ä s s i g erscheint, so ist auch die in dem zitierten Aufsatze vorgeschlagene Konstruktion nicht anwendbar, es wäre denn, daß für einen Ausnahmsfall **zufälligerweise** die Beziehung $A = A_0$ bestehen sollte, welcher Fall jedoch zu einer besonderen Untersuchung umsoweniger Veranlassung bieten kann, als er ja in den allgemein gehaltenen Gleichungen ohnehin inbegriffen ist.

Um die Haltlosigkeit der L á s k a'schen Beziehungen auch an einem Beispiele augenfällig darzulegen, benützen wir die dem Muster XI, b der österr. Instruktion für Polygonalvermessung, Seite 110, entnommenen Angaben:

$$A = 1{\cdot}18700$$
$$B = 44^0\ 30'\ 21''$$

Hat man nun die Näherungswerte φ_0, ψ_0 einmal bis auf die stehende Minute genau:

$$\varphi_0 = 24^0\ 15'$$
$$\psi_0 = 20^0\ 15'$$
$$\overline{\ 44^0\ 30'}$$

ein anderesmal roh bis auf 10 Minuten abgerundet:

$$\varphi_0 = 24^0\ 20'$$
$$\psi_0 = 20^0\ 10'$$
$$44^0\ 30'$$

mit einem Winkelmesser erhalten, so daß sich in beiden Fällen ein Schlußfehler von $\triangle B = + 21''$ herausstellt, so ergeben sich nach dem Láska'schen Verfahren, graphisch oder numerisch, in beiden von einander auffallend abweichenden Fällen nahezu die g l e i c h e n Verbesserungen, bezw. »Verschlechterungen«:

$$\triangle\varphi = + 11{\cdot}5''\ (+ 11{\cdot}6'') \qquad \triangle\psi = + 9{\cdot}5''\ (+ 9{\cdot}4''),$$

was an und für sich schon ein greller Widerspruch ist, denn damit wird

im ersten Falle: $\varphi = 24^0\ 15'\ 11{\cdot}5''\ (?)$ $\quad \psi = 20^0\ 15'\ 09{\cdot}5''\ (?)$
im zweiten Falle: $\varphi = 24^0\ 20'\ 11{\cdot}6''\ (?)$ $\quad \psi = 20^0\ 10'\ 09{\cdot}4''\ (?)$
während in beiden Fällen: $\varphi = 24^0\ 15'\ 23{\cdot}9''$ $\quad \psi = 20^0\ 14'\ 57{\cdot}1''$

als die richtigen Werte resultieren sollten, die bei der Unabänderlichkeit der gegebenen Bestimmungsstücke den Charakter von wahren Werten besitzen und **n a c h j e d e r r i c h t i g e n M e t h o d e w i d e r s p r u c h s f r e i u n d a b s o l u t g e n a u z u m V o r s c h e i n k o m m e n m ü s s e n.**

Berechnet man nach den Formeln (I) und (II) die Verbesserungen, z. B. für den zweiten Fall, so findet man:

$$\begin{array}{lrl} + \triangle B \,.\, A \cos\psi_0 = & 23{\cdot}4 & \\ + A\,\xi \sin\psi_0 = & 84407{\cdot}7 & \qquad \cos\varphi_0 = 0{\cdot}911 \\ - \xi \sin\varphi_0 = & -84990{\cdot}3 & \qquad A\cos\psi_0 = 1{\cdot}114 \\ \text{Zähler} = & -559{\cdot}2 & \qquad \text{Nenner} = 2{\cdot}025 \end{array}$$

$$\triangle\varphi = \frac{-559{\cdot}2}{2{\cdot}025} = -276{\cdot}1'' = -4'\ 36{\cdot}1''$$

$$\triangle\psi = \frac{+601{\cdot}7}{2{\cdot}025} = +297{\cdot}1'' = +4'\ 57{\cdot}1''$$

Damit erhält man die verbesserten Winkel

$$\begin{array}{rl} \varphi_0 = & 24^0\ 20' \\ \triangle\varphi = & -\quad 4'\ 36{\cdot}1'' \\ \hline \varphi = & 24^0\ 15'\ 23{\cdot}9'' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \psi_0 = & 20^0\ 10' \\ \triangle\psi = & +\quad 4'\ 57{\cdot}1'' \\ \hline \psi = & 20^0\ 14'\ 57{\cdot}1'' \end{array}$$

mit derselben Genauigkeit als mit Benützung des Hilfswinkels μ aus $\operatorname{cotg}\mu = A$.

1\. Probe: $\triangle\varphi + \triangle\psi = + 21{\cdot}0'' = \triangle B$

2\. Probe: $\dfrac{\sin(\varphi_0 + \triangle\varphi)}{\sin(\psi_0 + \triangle\psi)} = 1{\cdot}18700 = A$

Macht man die Rechenprobe für die Láska'schen Resultate, so stimmt wohl, wie vorauszusehen, die erste Probe mit $\triangle B = + 21''$, die zweite Probe aber liefert

$$\frac{\sin(24^0\ 20'\ 11{\cdot}6'')}{\sin(20^0\ 10'\ 09{\cdot}4'')} = 1{\cdot}1952$$

mit dem Manko von $\triangle A = -0{\cdot}0082$.

S. Wellisch
Ob. Ing.