

Paper-ID: VGI_190509



Die graphische Ausgleichung eines Normalgleichungenpaares

Ernst Engel

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **3** (5–6), S. 52–55

1905

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Engel_VGI_190509,  
Title = {Die graphische Ausgleichung eines Normalgleichungenpaares},  
Author = {Engel, Ernst},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {52--55},  
Number = {5--6},  
Year = {1905},  
Volume = {3}  
}
```



Die graphische Auflösung eines Normalgleichungenpaares.

Von **Ernst Engel**, Inspektor im Triangulierungs- und Kalkulabureau und Honorar-Dozent.

Die berechtigten hohen Ansprüche, welche unsere Zeit an die Genauigkeit der Lösung geodätischer Aufgaben stellt, sind zumeist nur durch die Anwendung solcher Beobachtungs- und Rechenmethoden zu erfüllen, welche einen wesentlich gesteigerten Aufwand an Zeit und Arbeit erfordern. Da jedoch der Wert einer Vermessung vielfach von der Dauer ihrer Ausführung abhängt, ist das Bestreben, Zeit und Arbeit auf das unumgänglichste Minimum zu bringen, im Wesen geodätischer Betätigung vollauf begründet.

In diesem Bestreben fußen auch all jene Bemühungen, welche dahin zielen, an Stelle zeitraubender, theoretischer Rechenarbeit, insbesondere dort, wo sie als Massenarbeit auftritt, abgekürzte oder Näherungsverfahren zu setzen, welche mit Rücksicht auf das zu Gebote stehende Beobachtungsmaterial und das angestrebte Ziel ihren Zweck in einfacher und praktisch ausreichender Weise erfüllen.

In dieser Beziehung bietet insbesondere die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Probleme der niederen Geodäsie ein großes Feld dankenswerter Arbeit. Diese Methode gelangt in der niederen Geodäsie naturgemäß zumeist unter Voraussetzungen zur Anwendung, welche dem Wesen der Methode nicht voll entsprechen. Es ist dies vor allem der Mangel einer ausreichenden Anzahl von Beobachtungen und der Umstand, daß die Beobachtungsergebnisse nicht allein mit unvermeidlichen, sondern auch vielfach mit konstanten Fehlern behaftet sind. Überdies aber müssen der Vereinfachung des Rechnungsganges selbst Zugeständnisse gemacht werden, welche die volle Wirkung der Ausgleichung nach dieser Methode wesentlich beeinträchtigen.

Dies ist insbesondere bei der Ausgleichung trigonometrischer Netze niederer Ordnung nach der Methode der kleinsten Quadrate der Fall, wodurch jedoch der hohe Wert der Methode auch für diese Aufgaben keineswegs in Frage gestellt werden soll.

Ich habe an anderen Stellen*) dieser Zeitschrift ein Verfahren für die Ausgleichung trigonometrischer Kleinpunkte nach vermittelnden Beobachtungen veröffentlicht, welches sich an die Methode der kleinsten Quadrate anlehnd, der Vereinfachung der Rechnung zum mindesten keine größeren Konzessionen als das übliche Ausgleichungsverfahren macht, dagegen aber die Rechnungsarbeit für die Bildung der Bedingungs- und Normalgleichungen auf ein Minimum reduziert.

Ich will nun anschließend an diese Arbeit im folgenden die graphische Auflösung eines Normalgleichungenpaares, wie es sich bei der Ausgleichung eines trigonometrischen Punktes nach vermittelnden Beobachtungen ergibt, erörtern.

Die beiden Normalgleichungen für die Ausgleichung eines trigonometrisch bestimmten Punktes nach vermittelnden Beobachtungen lauten bekanntlich:

$$[a a] \delta x + [a b] \delta y + [a \omega] = 0$$

$$[a b] \delta x + [b b] \delta y + [b \omega] = 0.$$

*) Heft Nr. 7 des Jahrganges 1903 und Heft Nr. 6 und 7 des Jahrganges 1904.

Bringen wir diese Gleichungen auf die Form

$$\bar{z}x = - \frac{[ab]}{[aa]} \bar{z}y - \frac{[a\omega]}{[aa]} \qquad \bar{z}y = - \frac{[bb]}{[bb]} \bar{z}x - \frac{[b\omega]}{[bb]}$$

so entspricht der ersten Gleichung eine gerade Linie, welche auf der x-Achse das Stück $-\frac{[a\omega]}{[aa]}$ abschneidet und für welche die ctg des Süd winkels $= -\frac{[ab]}{[aa]}$ ist.

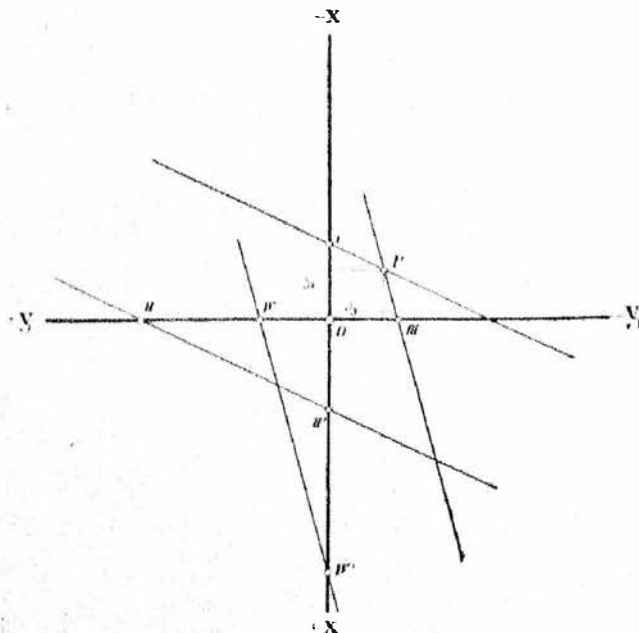
Dagegen kann die zweite Gleichung durch eine Gerade dargestellt werden, deren Abschnitt auf der y-Achse $= -\frac{[b\omega]}{[bb]}$ und für welche die tang. des Süd winkels $= -\frac{[ab]}{[bb]}$ ist.

Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden sind sodann die Werte für die beiden Unbekannten $\bar{z}y$ und $\bar{z}x$ der obigen Normalgleichungen.

Hiernach ergibt sich in Bezug auf die beiden auf Null gebrachten Normalgleichungen deren Auflösung durch den folgenden einfachen Konstruktionsgang.

1. Bildung des Quotienten $-\frac{[a\omega]}{[aa]}$ und Auftragung seiner Maßzahl mit Berücksichtigung des Vorzeichens in verjüngtem Maßverhältnisse auf der x-Achse.
2. Auftragung des Koeffizienten $[aa]$ auf der y-Achse und des Koeffizienten $[ab]$ auf der x-Achse im Sinne ihrer Vorzeichen.
3. Verbindung der beiden ad 2 enthaltenen Punkte und Ziehen der Parallelen durch den ad 1 bestimmten Punkt. (Graphische Darstellung der ersten Normalgleichung.)
4. Bildung des Quotienten $-\frac{[b\omega]}{[bb]}$ und Auftragung desselben mit Berücksichtigung seines Vorzeichens auf der y-Achse.
5. Auftragung des Koeffizienten $[ba]$ auf der y-Achse und des Koeffizienten $[bb]$ auf der x-Achse im Sinne ihrer Vorzeichen.
6. Verbindung der beiden ad 5 erhaltenen Punkte und Ziehen der Parallelen durch den ad 4 erhaltenen Punkt. (Graphische Darstellung der zweiten Normalgleichung.)

Der obige Konstruktionsgang erscheint in folgendem graphisch dargestellt:



$-\frac{[a\omega]}{[aa]} = OI$	$-\frac{[b\omega]}{[bb]} = OIII$
$[aa] = OII$	$[ab] = OIV$
$[ab] = OII'$	$[bb] = OIV'$
$IP \parallel II - II'$	$III P \parallel IV - IV'$

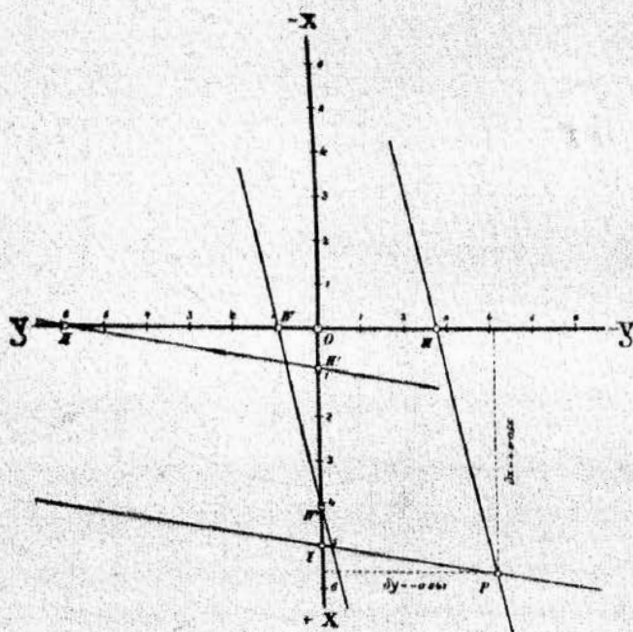
Beispiel.

$$58.766 \delta x + 8.909 \delta y - 2941 = 0$$

$$8.909 \delta x + 41.266 \delta y + 1175 = 0.$$

$$-\frac{[a\omega]}{[aa]} = + 0.050$$

$$-\frac{[b\omega]}{[bb]} = - 0.028$$



1/2 d. nat. Maßstabes

Die graphische Auflösung der obigen Gleichungen ergibt somit $\delta y = -0.041 m$, $\delta x = +0.056 m$ in vollkommener Übereinstimmung mit den in Heft Nr. 7 des Jahrganges 1903 für die Auflösung dieser Gleichungen rechnerisch erhaltenen Werte.

Die Genauigkeit der konstruktiven Bestimmung der Werte δy und δx ist in erster Linie von der Größe des der Darstellung der Quotienten $\frac{[a\omega]}{[aa]}$ und $\frac{[b\omega]}{[bb]}$ zu Grunde gelegten Maßverhältnisses abhängig. Bewegen sich die Werte für δy und δx bis zu $10 cm$, so kann die Konstruktion im natürlichen Maße (1:1) durchgeführt werden. In diesem Falle erhält man δy und δx , ohne bei der Konstruktion besondere Schärfe anwenden zu müssen, bis auf Millimeter genau. Für Werte der δy und δx über $10 cm$ bis zu $1 m$ kann der Konstruktion das verjüngte Maßverhältnis 1:10 zu Grunde gelegt werden, wobei sich die Werte für δy und δx bis auf Centimeter, also auch in diesem Falle mit ausreichender Genauigkeit ergeben. Für die Auftragung der Koeffizienten $[aa]$ $[ab]$ und $[bb]$ kann, da

es sich um die Konstruktion von Richtungen handelt, jeder beliebige, jedoch möglichst große Maßstab angewendet werden.

Es stellt sonach die graphische Auflösung des Normalgleichungenpaares ein äußerst einfaches, rasches und dabei sicheres Verfahren dar, welches für die Praxis der Ausgleichsrechnung gewiß nicht ganz ohne Bedeutung ist.

Über „Rayone“ bei der Aufnahme nach der Polygonalmethode.

Von **Karl Boredick** und **Johann Čemus**, Geometer des k. k. Triangulierungs- und Kalculbureau.

Bei einer größeren Aufnahme nach der Polygonalmethode schließt sich an das trigonometrische Netz letzter Ordnung das Hauptpolygonnetz an, auf dieses folgen die Polygonzüge zweiter etc. Ordnung und schließlich erscheint als letzte und niederste Netzform und zugleich als Träger des Details das Messungslinien-system.

Es zeigt nun die Erfahrung, daß man bei Stadtaufnahmen zur Festlegung des Details in streng verbauten Teilen mit Messungslinien allein das Auskommen nicht findet. In den meisten österreichischen Städten findet man, als Folge ihrer historischen Entwicklung aus befestigten Plätzen, einen alten dicht verbauten Teil, in welchem die Zerlegung der Häuserblocks durch Messungslinien unmöglich ist.

In einem solchen Falle hilft man sich, indem man einen Netzpunkt im Innern des Blocks von einem Polygon- oder Bindepunkt durch Winkel- und Streckenmessung fixiert. Die so erhaltene Linie zwischen Polygon- oder Bindepunkt und dem durch Rayon und Maß festgelegten Punkte wird kurz als „Rayon“ bezeichnet. Diese Rayone haben als Netzlilien den Wert von Messungslinien, werden im Muster XVII der Polygonal-Instruktion als fliegende Polygonzüge aus einer Seite bestehend gerechnet und der Endpunkt muß bei der Kartierung nach seinen Koordinaten aufgetragen werden. Nach Tüchtigkeit verschafft man sich eine Kontrolle über die Richtigkeit der Messungsdaten solcher Rayone, indem man den Endpunkt oder einen Zwischenpunkt wieder mit dem Netze in Verbindung bringt.

Weniger die einfache Berechnung, als die mühsame, zeitraubende Auftragung der Rayonendpunkte bei der Kartierung, wobei der Umstand als erschwerend dazu kommt, daß die Rayonpunkte sich in dem intensiv verbauten Stadtteile auf einem kleinen Raum in großer Zahl konzentrieren, zwingen den Geometer bei der Feldarbeit, die Verwendung von Rayonen auf ein Mindestmaß einzuschränken, und so wird mit Rücksicht auf die Kartierung durch schwierige und umständliche Legung von Messungslinien Zeit und Arbeit dort verbraucht, wo ein Rayon leicht und einfach zum Ziele führen würde.

Um nun die Auftragung der Rayone nach Koordinaten zu vermeiden, sind zwei Verfahren möglich, welche je nach der Wichtigkeit des Rayons als Träger des Details zur Anwendung kommen können.

Von kurzen Rayonen untergeordneter Bedeutung, auf welchen lediglich Details im Besitze ruhen, wie z. B. Hofräume etc., werden für die Kartierung aus Länge