Der Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Produkte

Siegmund Wellisch

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **3** (11–12), S. 153–158

1905

BibTeX:


```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_190523,
Title = {Der Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Produkte},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {153--158},
Number = {11--12},
Year = {1905},
Volume = {3}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen.

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III./2 Kegelgasse Nr. 13. K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.	Erscheint am 1. jeden Monats. Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften. Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.	Expedition und Inseratenaufnahme durch die Buchdruckerei J. Wladarz (vorm. Haase) Baden bei Wien, Pfarrgasse 3.

Nr. 11—12. **Wien, am 1. Juni 1905.** III. Jahrgang.

Der Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Produkte.

Von Oberingenieur **S. Wellisch.**

I.

Auf wie schwankender Basis die mathematische Begründung der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate steht, bekunden die zahlreichen Schriften, welche gegen die wissenschaftliche Beweisführung dieses Ausgleichungsverfahrens gerichtet sind. Hat doch Gauß selbst zwei verschiedene Versuche unternommen, seine Methode zu begründen, ohne sich des Gefühls der Unsicherheit und der Willkür zu erwehren. Namentlich ist es das Gauß'sche Fehlergesetz, welches den Gegenstand abfälliger Beurteilungen bildet, und die Verbindung des Ausgleichungsprinzips mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Wissenschaft des Glücksspiels ist es, was zur öffentlichen Kritik herausfordert. Es genügt eben nicht, eine Methode als eine wissenschaftliche Wahrheit mit Berufung auf den Umstand beweisen zu wollen, daß sie sich »durch die Einfachheit der damit verknüpften Operationen empfiehlt«, oder daß sie »allgemein befriedigt« und ihre »Vortrefflichkeit allgemein anerkannt« sei.

Bei keinem Zweige der mathematischen Wissenschaften ist die Erforschung der Vorgänge in der Natur von so erfolgverheißender Bedeutung, als bei der Begründung einer Methode zur Ausgleichung von Beobachtungsfehlern. Für die Lösung dieser Aufgabe gelten ganz bes diondersegeflü gelten Worte Fourier's, daß ein »tieferes Studium der Natur die fruchtbarste Quelle der mathematischen Entdeckungen« sei. Dr. Henke äußert sich in seinem Werke »Über die Methode der kleinsten Quadrate«, Dresden, 1894: »Wenn es möglich wäre, die innere Natur der Fehler zu erforschen, oder wenigstens eine plausible Hypothese darüber aufzustellen, so könnte man direkt zu einem Ausdrucke für die Wahrscheinlichkeit der Fehler gelangen, und wenn dieser mit dem Gauß'schen übereinstimmte, so wäre damit die Methode der kleinsten Quadrate in befriedigender Weise erwiesen«.

Nur auf den Mangel einer plausiblen Begründungsweise der Methode der kleinsten Quadrate ist es zurückzuführen, daß manche Mathematiker sogar zu bedauerlichen Ausfällen gegen diese berühmte Methode sich hinreißen ließen.

So klingt ein lesenswerter Aufsatz des Astronomen H. Kloock, »Über die Unhaltbarkeit der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate, Bonn 1893« mit den Worten aus: »In der Erweckung wissenschaftlichen Scheins mannigfacher Art leistet die Methode der kleinsten Quadrate wirklich Großes. In der Praxis schließt sie ihre Themata gründlich ab gegen die Versuche einer näheren Prüfung, wie etwaiger Verbesserung, und ist ein arges Hemmnis der ehrlichen und offenen Forschung«. Solche Mißtöne in der mathematischen Literatur rufen dann mit Recht das Verlangen hervor, zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate die Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt nicht mehr in Anspruch zu nehmen.

Wohl die meisten Versuche, das Gauß'sche Ausgleichungsprinzip auf mechanischem Wege zu erklären, führen auf derartige Bestrebungen zurück. Auch die unter dem Titel: »Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme« in der »Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, 1904« erschienene Abhandlung, worin ein mit der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate enge verwandtes Ausgleichungsverfahren, »die Methode der kleinsten Produkte«, mitgeteilt wird, beschäftigt sich damit, das Ausgleichungsprinzip nicht mehr durch die unzureichende Wahrscheinlichkeitsfunktion, sondern nach der strengen Elastizitätstheorie zu begründen. Unter Hinweis auf diese Abhandlung möge es hier gestattet sein, durch Ableitung des Fundamentalsatzes dieser Theorie den Nachweis für die wissenschaftliche Begründung der Methode der kleinsten Produkte und also auch deren Schwester, der Methode der kleinsten Quadrate, zu erbringen.

Das erste Fundament unseres neuen Ausgleichsprinzips bildet der »Lehrsatz von der kleinsten Arbeit«, den der italienische Ingenieur A. Castigliano zum erstenmale strenge bewiesen und am eingehendsten in seinem klassischen Werke: »Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications«, Turin 1879, behandelt hat. Da dieser wichtige Lehrsatz in der französisch abgefaßten Originalschrift, wie auch in der von dem österreichischen Ingenieur E. Hauff, Wien 1886, besorgten deutschen Übersetzung schwer verständlich dargestellt erscheint, dürfte eine einfachere Ableitung dieses Hauptsatzes der angewandten Elastizitätstheorie unter Rücksichtnahme auf die ins Auge gefaßte Anwendung für die Ausgleichungsrechnung an dieser Stelle wohl am Platze sein.

2.

Betrachtet man ein System von elastischen Stäben, deren Enden mittelst

Gelenken so untereinander verbunden sind, daß jeder Stab um eines seiner Enden sich drehen könnte, wenn das andere Ende frei wäre, so können die einzelnen Stäbe unter der Einwirkung äußerer in den Knotenpunkten wirkender Kräfte nur Längenänderungen und Verdrehungen erleiden, aber es können keine Biegungsmomente auftreten, d. h. die Stäbe können nicht gebogen werden. Ist die Anzahl der das System bildenden Stäbe keine größere als unbedingt erforderlich ist, um dem System eine dynamisch unveränderliche Form zu geben, so können in einem solchen System nur dann Spannungen und daher auch Veränderungen in den Stablängen und Richtungen eintreten, wenn äußere Kräfte darauf einwirken. Ein solches System nennt man statisch bestimmt, weil die Berechnung der in den Stäben auftretenden Spannungen, Pressungen oder Schubbeanspruchungen, sowie die entsprechenden Stabdeformationen auf elementarem Wege nach den Regeln der Statik starrer Gebilde erfolgen kann. Werden aber in das System »überzählige« oder »überschüssige« Stäbe eingeführt, so wird das System überbestimmt und heißt dann statisch unbestimmt. Besitzen diese hinzugekommenen Stäbe genau die Längen, welche durch die Entfernung jener Knotenpunkte gegeben sind, die sie verbinden sollen, so werden ohne Einwirkung äußerer Kräfte auch keine Spannungen und demgemäß auch keine Formänderungen entstehen. Haben aber diese neu eingeführten Stäbe nicht genau jene Längen, so sind diese Stäbe, um sie in das ursprüngliche System einfügen zu können, zu deformieren, oder es sind diejenigen Eckpunkte des Systems, welche durch die neuen Stäbe verbunden werden sollen, zu verschieben, was aber nicht durchführbar ist, wenn nicht zugleich die Stäbe des ursprünglichen Systems gezogen, gedrückt oder gedreht werden. In einem solchen System sind somit sämtliche Stäbe inneren Beanspruchungen ausgesetzt, auch wenn sie von keinen äußeren Kräften beeinflußt werden.

Um die in einem statisch unbestimmten Stabsystem nach der Deformation verbleibenden Spannungen und Formänderungen zu bestimmen, genügen daher nicht mehr die einfachen Regeln des Gleichgewichtes starrer Systeme, sondern man hat dann, der Elastizität des Stabmaterials Rechnung tragend, nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme zu rechnen.

3.

Ist λ die der Spannung T entsprechende Verschiebungsgröße eines Stabes von der Länge l und der Querschnittsfläche F, und bezeichnet man der Kürze wegen mit ε den Ausdruck $\frac{E F}{l}$, bezw. $\frac{G F}{l}$, worin E, bezw. G den Elastizitätskoëffizienten der Dehnung oder Gleitung bedeutet, je nachdem T eine Achsial- oder Schubspannung darstellt, so lautet das Hooke'sche Elastizitätsgesetz:

$$\lambda = \frac{T}{\varepsilon}$$

und es ist, wie in der eingangs zitierten Schrift des Verfassers ausführlich entwickelt wurde, die Deformationsarbeit des Stabes:

$$A = \int_0^\lambda T \, . \, d\lambda = \varepsilon \int_0^\lambda \lambda \, . \, d\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \lambda^2 = \frac{1}{2} \frac{T^2}{\varepsilon}$$

oder auch

$$A = \tfrac{1}{2} T \, . \, \lambda,$$

somit ist die Deformationsarbeit eines Stabsystems, auf welchem mehrere Kräfte angreifen:

$$\mathfrak{A} = \Sigma A = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{T^2}{\varepsilon} = \tfrac{1}{2} \Sigma T . \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Arbeit einer in einem e l a s t i s c h e n Systeme wirkenden Kraft ist somit nur halb so groß, als die Arbeit in einem s t a r r e n System. Denn greift in diesem die Kraft sofort mit ihrem vollen Werte an, so wirkt sie in jenem infolge der Elastizität des Materiales nur allmählich in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis zu ihrem Endwerte wachsend, und zwar dem H o o k e'schen Elastizitätsgesetze zufolge mit einem resultierenden Betrage, der dem arithmetischen Mittel von Null und dem Endwerte T, d. i. $\frac{T}{2}$ gleich kommt.

Läßt man in einem von äußeren Kräften T beanspruchten elastischen Stabsystem irgend eine Kraft T_n um einen unendlich kleinen Betrag $d T_n$ wachsen, so erhält man die hiedurch um den Arbeitszuwachs $d \mathfrak{A}$ vermehrte Gesamtarbeit $\mathfrak{A} + d \mathfrak{A}$, wenn man unter der Berücksichtigung, daß durch die Änderung e i n e r Kraft nicht nur der Angriffspunkt dieser Kraft, sondern auch die Angriffspunkte aller übrigen Kräfte verschoben werden, die halbe Summe der Produkte aller Kräfte in die auf die Kraftrichtungen projizierten Verschiebungen bildet. Diese umständliche Entwicklung, wonach sämtliche Verschiebungen als Funktion aller Kräfte nach der geänderten Kraft partiell zu differenzieren und hierauf die Arbeitsprodukte aufzustellen sind, kann jedoch durch eine einfachere ersetzt werden. Dasselbe Resultat erhält man nämlich viel anschaulicher, wenn man überlegt, daß die resultierende Deformation des elastischen Systems im Sinne der Theorie des Kräfteparallelograms dieselbe bleiben muß, ob jetzt das Kraftelement $d T_n$ und die vollen Kräfte T gleichzeitig angreifen, oder ob zuerst $d T_n$ und erst nachher die Kräfte T wirksam gedacht werden. Man erkennt dann, daß die vor Einwirkung der Kräfte T von $d T_n$ allein verrichtete Arbeit, welche durch das halbe Produkt einer unendlich kleinen Kraft in eine unendlich kleine Verschiebung ausgedrückt ist, als eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung vernachlässigt werden kann, daß aber, sobald die übrigen Kräfte T einsetzen, der Zuwachs $d T_n$ mit seinem unterdessen erlangten Endwerte zur Wirksamkeit gelangt und dann eine Arbeit leistet, die durch das ganze Produkt aus dem Kraftelement $d T_n$ in die Verschiebung λ_n seines Angriffspunktes gegeben ist. Mit Zuziehung der Arbeit der vollen Kräfte T erhält man daher für die Gesamtarbeit die Gleichung:

$$\mathfrak{A} + d\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} . d T_n . d \lambda_n + d T_n . \lambda_n + \tfrac{1}{2} \Sigma \; T . \lambda .$$

Da die Arbeit der vollen Kräfte nach Gleichung (1) durch

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \Sigma T . \lambda$$

gegeben ist und

$$\tfrac{1}{2} . d T_n . d \lambda_n = 0$$

gesetzt werden kann, so verbleibt für den Arbeitszuwachs:

$$d \mathfrak{A} = d T_n . \lambda_n$$

und es ist somit

$$\frac{d \mathfrak{A}}{d T_n} = \lambda_n$$

Diese Gleichung besagt, daß die partiellen Differentialquotienten der Deformationsarbeit eines elastischen Systems in Bezug auf die einzelnen äußeren Kräfte die relativen Verschiebungen ihrer Angriffspunkte ergeben.

4.

Bezeichnet man die Deformationsarbeit des auf die notwendige und hinreichende Anzahl von Stäben reduzierten Systems von dynamisch unveränderlicher Form mit $\mathfrak{A}_0$ und ist die Deformationsarbeit irgend eines überzähligen Stabes $\frac{1}{2} \cdot \frac{T_n^2}{\varepsilon}$, so ist die Gesamtarbeit des überbestimmten Systems:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{T^2}{\varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei die Summe Σ so viele Glieder enthält, als überzählige Stäbe vorhanden sind.

Greift man nun unter allen Stäben des überbestimmten Systems eine solche Anzahl heraus, welche unumgänglich notwendig und gerade hinreichend ist, um ein statisch bestimmtes System zu bilden, und ersetzt man alle anderen überzähligen Stäbe durch gleichwertige Kräfte, so kann man die Deformationsarbeit $\mathfrak{A}_0$ in einer Funktion der äußeren Kräfte und der Spannungen der entfernten Stäbe ausdrücken. Ist nämlich T_n die Spannung irgend eines entfernt gedachten, überzähligen Stabes, so drückt nach dem in Artikel 3 abgeleiteten Satze von den Differentialquotienten der Arbeit der Differentialquotient von $\mathfrak{A}_0$ in Bezug auf T_n die Lageänderung jener beiden Knotenpunkte aus, welche der überzählige Stab verbunden hat, d. i. die Formänderung des Stabes selbst. Diese Differentialquotienten fallen immer negativ aus, weil die Verschiebungen der Angriffspunkte der die weggedachten Stäbe ersetzenden Kräfte, welche die Formänderungen zu hemmen trachten, stets im entgegengesetzten Sinne der Wirkungsrichtung dieser Kräfte stattfinden. Da dieselbe Formänderung nach dem Elastizitätsgesetze auch gegeben ist durch die Größe $\frac{T_n}{\varepsilon}$, so besteht die Gleichung:

$$-\frac{d\mathfrak{A}_0}{dT_n} = \frac{T_n}{\varepsilon}$$

oder:

$$\frac{d\mathfrak{A}_0}{dT_n} + \frac{T_n}{\varepsilon} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Für jeden der überzähligen Stäbe besteht eine analoge Beziehung. Es drücken sohin alle diese Gleichungen die geometrischen Bedingungen aus, welche das System nach der Deformation im Zustande des Gleichgewichtes zu erfüllen hat.

Alle diese Gleichungen stellen aber nichts anderes als den gleich Null gesetzten Differentialquotienten der Gesamtarbeit $\mathfrak{A}$ aus (2) dar; es sind daher die Formänderungen und Spannungen, welche nach der Deformation in einem elastischen System auftreten, diejenigen, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen.

Dies ist das Fundamentalgesetz der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme, nach Ménabréa »Das Prinzip der Elastizität«, oder wie Castigliano es nennt: »Der Lehrsatz von der kleinsten Arbeit«.

Dieser berühmte Satz kann aber auch als die Grundlage der »Methode der kleinsten Produkte« insofern angesehen werden, als von ihm die mechanische Begründung dieser Methode ihren Ausgang genommen hat. Denn schreibt man die Minimumsbedingung für das Gleichgewicht in der Form

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2} \Sigma \, \varepsilon \, \lambda^2 = \min;$$

setzt man in $\varepsilon = \frac{EF}{l}$ bezw. $\frac{GF}{l}$ für E, bezw. G das in die Ausgleichungsrechnung eingeführte, im gleichen Sinne auf die Verschiebungsgröße einflußnehmende Gewicht p und nimmt man durchwegs $F = 1$*) an, so ergibt sich die Minimumsbedingung für die Methode der kleinsten Produkte:

$$\left[\frac{p\lambda\lambda}{l}\right] = \min,$$

worin jetzt l die Längen der gemessenen Strecken oder der beobachteten Richtungen und λ die Längenverbesserungen, beziehungsweise die durch die Richtungsverbesserungen bewirkten Querabweichungen darstellen.

Bezeichnet man $\pi = \frac{p}{l}$ als die auf die Einheit der zu Grunde liegenden Längenelemente bezogenen reduzierten oder natürlichen Gewichte zum Unterschiede von den absoluten Gewichten p, so lautet die Minimumsbedingung der Methode der kleinsten Produkte in Worten: »Es ist die Summe der mit den reduzierten Gewichten multiplizierten Quadrate der Verbesserungen $[\pi\lambda\lambda]$ auf ein kleinstes Maß zu bringen«, während die Methode der kleinsten Quadrate die Summe der mit den absoluten Gewichten multiplizierten Quadrate der Verbesserungen $[p\lambda\lambda]$ zu einem Minimum werden läßt.

Eine nomographische Tafel.

Von **W. Laska.**

In der Vermessungskunde gibt es Rechnungen, welche oft gemacht werden müssen. Unter diese gehören unter anderen die Formeln

$$N = 206265 \frac{d}{D} \quad \ldots \quad 1)$$

$$N = 206265 \frac{\sin\alpha}{D} \quad \ldots \quad 2)$$

$$N = 206265 \frac{\cos\alpha}{D} \quad \ldots \quad 3)$$

in welchen d, D und α irgend welche gegebene Werte annehmen. Die Nomographie bietet das bequemste Mittel zur sofortigen Entnahme der Größe N ohne jede Rechnung, durch bloßes Anlegen eines Lineals an eine graphische Tafel.

Diese Tafel besteht aus drei parallelen und einer Querskale. Die drei parallelen Skalen sind die

1. **N-Skale,** welche die Teilung von 0 bis 200 trägt. Bei der Formel 1) sind die Einheiten gleich Sekunden, die Lesung 200 entspricht also $200'' = 3'\,20''$.

*) Die Ziffer »1« und der Buchstabe »l« werden wohl zu Verwechselungen keinen Anlaß geben.