

Paper-ID: VGI\_190606



## Zur Aufsuchung verloren gegangener Punkte

W. Láska <sup>1</sup>

<sup>1</sup> o. ö. Professor an der k. k. techn. Hochschule in Lemberg

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (5–6), S. 65–71

1906

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Laska_VGI_190606,  
Title = {Zur Aufsuchung verloren gegangener Punkte},  
Author = {L{\'a}ska, W.},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen"},  
Pages = {65--71},  
Number = {5--6},  
Year = {1906},  
Volume = {4}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE

# Zeitschrift für Vermessungswesen

ORGAN DES VEREINES

DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:

VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

<b>Redaktion und Administration:</b> Wien, III/2 Kegelgasse 15, Parterre, T. 2. K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.	<b>Erscheint am 1. jeden Monats.</b> Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften. Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.	<b>Expedition und Inseratenaufnahme</b> durch die Buchdruckerei J. Wladars (vorm. Haass) Baden bei Wien, Pfarrgasse 5.
---	---	---

Nr. 5-6.

Wien, am 1. März 1906.

IV. Jahrgang.

**Inhalt:** Zur Aufsuchung verloren gegangener Punkte. Von Prof. W. Láška. — Zur Grundbuchs-Enquete.  
— Über die Anfertigung von Katastralplänen durch autorisierte Zivil-Ingenieure. Von Ingenieur S.  
Kornman. — Zum Gesetzentwurfe betreffend die Berichtigung der Grundbücher in Galizien und  
in der Bukowina. — Die beiden Staatsbeamtentage. — Vereinsnachrichten. — Kleine Mitteilungen.  
Bücherschau. — Patent-Bericht. — Personalien

Nachdruck der Original-Artikel nur mit Genehmigung  
der Redaktion gestattet.

## Zur Aufsuchung verloren gegangener Punkte.

Von Prof. W. Láška.

In Nummer 1 des vorhegehenden Jahrganges dieser Zeitschrift habe ich ein graphisches Verfahren zur Aufsuchung verloren gegangener Punkte angeregt, ohne es weiter auszuführen. In diesem Aufsätze möchte ich auf das Problem zurückkommen, weil es mir gelungen ist, eine an Einfachheit wohl nicht zu überrückfende Konstruktion zu finden, welche alle vorbereitenden Rechnungen unnötig macht und bei deren Anwendung auch am Felde keine Konstruktionen zu machen sind. Diejenigen Leser, welche derartige Untersuchungen interessieren, werden mit großem Nutzen die verwandte Arbeit von Hammer in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrg. 1896, S. 611, lesen können, welche von ähnlichen Überlegungen ausgeht, aber zu anderen Konstruktionen führt.

Die Grundlage der nachfolgenden Auseinandersetzungen bildet die gewöhnliche Konstruktion des Rückwärtseinschneidens mittels zweier Kreise.

Seien

a b

die Seiten eines gegebenen Dreieckes ABC, sowie  $\gamma$  der von ihnen eingeschlossene Winkel, ferner  $\alpha$  und  $\beta$  diejenigen Winkel, unter welchen die Seiten a und b von einem Punkte P gesehen werden, so ist durch diese fünf Größen die Konfiguration ABCP gegeben. Wir können also symbolisch schreiben

$$P = f(a, b, \alpha, \beta, \gamma)$$

Aus dieser Gleichung folgt die nachstehende

$$dP = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma$$

In dieser ersten Mitteilung beschränkten wir uns auf den Fall, wo

$$da = db = d\gamma = 0$$

so daß

$$dP = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta \dots \dots \dots 1)$$

wird, und zeigen, wie diese Gleichung einfach in beliebigem Maßstab zu konstruieren ist. In einer zweiten Mitteilung werden wir im Anschluß an unsere Note «Über die Genauigkeit des Rückwärtseinschneidens» (Jahrgang III, S. 225) den hier nicht berührten Fall

$$d\alpha = d\beta = 0$$

erledigen.

Nach dieser Einleitung gehen wir zu unserem Gegenstande über.

Geht der Winkel  $\alpha$  (siehe Fig. 1) in  $\alpha - d\alpha$  über, so verschiebt sich der Mittelpunkt  $O$  des den Punkten  $ABP$  umschriebenen Kreises nach  $O'$  und der Punkt  $P$  nach  $P'$ . Der Radius  $r$  geht dabei in  $r + dr$  über. In Übereinstimmung mit der Gleichung 1) sind dann die Tangenten an  $P$  sowie  $P'$  als parallel anzunehmen, was der Gleichheit der Richtungen  $OP$  und  $O'P'$  entspricht. Auf diesen Annahmen beruhen ja alle graphischen Näherungsmethoden der Fehlerdreieckskonstruktion. Bei unserem Problem handelt es sich darum, die Größe  $PP'$  konstruktiv abzuleiten. Ein analoges Verfahren auf den Winkel  $\beta$  angewendet, gibt dann alle zur Konstruktion des Aufsuchungsdiagramms erforderlichen Elemente.

Es sei  $r = OA$  der Radius des dem Dreiecke  $ABP$  umschriebenen Kreises. Geht der Winkel  $\alpha$  in  $\alpha - d\alpha$  über, so wird  $O'A = r + dr$  der Radius des neuen Kreises, welcher durch den Punkt  $P'$  geht. Es handelt sich hier vor allem um die Berechnung von  $PP'$ .

Aus der Figur 1 ergibt sich

$$AC = r \sin \alpha = (r + dr) \sin (\alpha - d\alpha)$$

und hieraus

$$\frac{dr}{r} = \cotang \alpha \cdot d\alpha \dots \dots \dots 2)$$

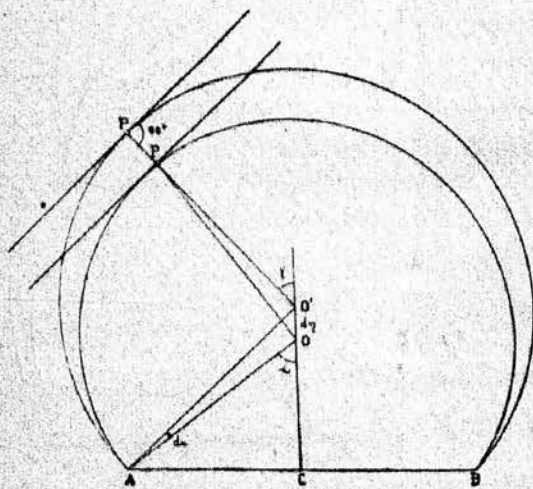


Fig. 1.

Ferner ist

$$PP' = (r + dr) - \sqrt{r^2 + OO'^2 - 2r OO' \cos \gamma}$$

woraus

$$PP' = dr + OO' \cos \gamma \dots \dots \dots 3)$$

folgt. Es ist aber

$$OO' = (r + dr) \cos (\alpha - d\alpha) - r \cos \alpha$$

so daß

$$OO' = \frac{r}{\sin \alpha} \cdot d\alpha \dots \dots \dots 4)$$

wird. Dieses und 2) in die Gleichung 3) eingesetzt, gibt

$$PP' = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} (\cos \gamma + \cos \alpha) \dots \dots \dots 5)$$

Bezeichnen wir im Dreiecke ABP die Höhe auf AB mit h, sowie die Seiten wie folgt:

$$AB = a, \quad AP = b, \quad BP = c$$

so haben wir offenbar

$$h = r \cos \gamma + r \cos \alpha$$

womit

$$PP' = d\alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \dots \dots \dots 6)$$

wird. Beachtet man ferner, daß allgemein

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{bc}{a}$$

so ergibt sich schließlich

$$PP' = d\alpha \cdot \frac{bc}{a} \dots \dots \dots 7)$$

Diese Seitenverschiebung ist nach außen aufzutragen, wenn  $d\alpha$  negativ ist und nach innen, wenn  $d\alpha$  positiv ausfällt.

Die Gleichung 7) ist mit den Rechenschieber zu berechnen, wogegen die Gleichung 6) den Faktor von  $d\alpha$  durch einfache geometrische Konstruktion liefert.

Man ziehe vom Punkte A aus den Strahl nach dem Mittelpunkte des dem Dreiecke ABP umschriebenen Kreises und falle von P die Senkrechte PR auf diesen Strahl. Die Figur 2 liefert dann unmittelbar die Beziehung

$$PR = \frac{h}{\sin \alpha}$$

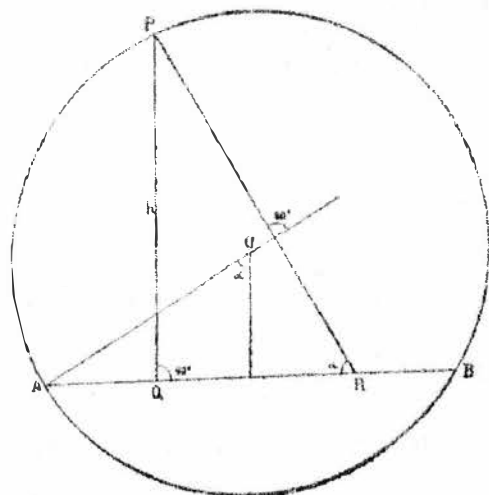


Fig. 2.

Wird dieselbe Konstruktion auch für das andere Dreieck ausgeführt, so ergibt sich hieraus sofort das Diagramm in einem leicht zu findenden Maßstab, ohne jede Rechnung, durch eine an Einfachheit wohl nicht zu übertreffende Konstruktion.

Bemerkt soll noch werden, daß man eine elementare Abteilung der Formeln 6) und 7) in dem bekannten Lehrbuch von Jordan-Reinbertz findet.

Es ist zweckmäßig, für derartige Arbeiten sich ein entsprechendes Netz ein für allemal zu zeichnen. Man zeichne zu diesem Zwecke ein quadratisches Netz

im Maßstab 1 : 50 000. In der Mitte des Netzes wird dann ein Strahlenkreuz nach den Intervallen des Maßstabes 1 : 145, also

$$1 m = 7 mm \text{ (genauer } 6,9 mm)$$

geteilt. Der Nullpunkt dieses Strahlenkreuzes ist zugleich der Ort des Näherungspunktes  $P_0$ . Um also die gegebenen Punkte auf das Netz zu bringen, hat man sie auf  $P_0$  als Koordinatenursprung zu beziehen. Es geschieht dieses einfach dadurch, daß man die Koordinatendifferenzen bildet. Diese Subtraktionen bilden die einzige Rechenoperation bei der Konstruktion dieses Diagrammes. Alles übrige erfolgt rein konstruktiv.

Sind dann A, B, C, die drei gegebenen und eingezeichneten Punkte, dann wird für AB und BC die Konstruktion der Fig. 2 gezeichnet. Auf der Axe PO werden dann von P aus nach beiden Seiten die Intervalle gleich

$$\frac{PR}{10}$$

aufgetragen und durch sie die Senkrechten gezogen. Sie stellen die  $\alpha =$  Linien für die Änderungen

$$d\alpha = \pm 1' \pm 2' \pm 3' \dots$$

dar. Analog werden die  $\beta =$  Linien gezeichnet und das Diagramm ist gebrauchsfertig.

Diese Dimensionierung des Netzblattes dürfte wohl entsprechend sein. Es lassen sich hierbei die Dezimeter und 0,1 gut schätzen, was in Anbetracht des Zweckes vollkommen genügt. Für Ausgleichszwecke wird man dem Diagramm natürlich eine viel größere Skala geben müssen. Diese kommen aber hier nicht in Betracht.

Es wird vielleicht nicht überflüssig sein, ein vollständiges Beispiel (der Vermessung der Stadt Tarnopol in Galizien entnommen) vorzunehmen. Der aufzusuchende Punkt sei P, die Gegebenen mögen sein:

	A)	$x = 29638 \cdot 16$	$y = - 109212 \cdot 19$
	B)	$x = 31685 \cdot 83$	$y = - 112317 \cdot 92$
	C)	$x = 27203 \cdot 47$	$y = - 119308 \cdot 67$
sowie	P)	$x = 26540 \cdot 52$	$y = - 113265 \cdot 84$

Hieraus ergeben sich die Winkel

$$P \left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right. = 42^\circ 10' 33'' \qquad P \left\{ \begin{array}{l} B \\ C \end{array} \right. = 94^\circ 10' 40''$$

Um ein schon vorgedrucktes Netz verwenden zu können, bilden wir die Koordinatendifferenzen, d. h. die relativen Koordinaten in Bezug auf den Punkt P. Es ergibt sich auf Meter abgerundet, was mehr als erforderlich ist:

P — A	$\Delta x = - 3098$	$\Delta y = - 4054$
P — B	$\Delta x = - 5145$	$\Delta y = - 948$
P — C	$\Delta x = - 663$	$\Delta y = + 6043$

Hiemit sind alle Rechnungen erledigt. Diese Punkte werden nun in das Netz eingetragen. (Siehe Fig. 3).

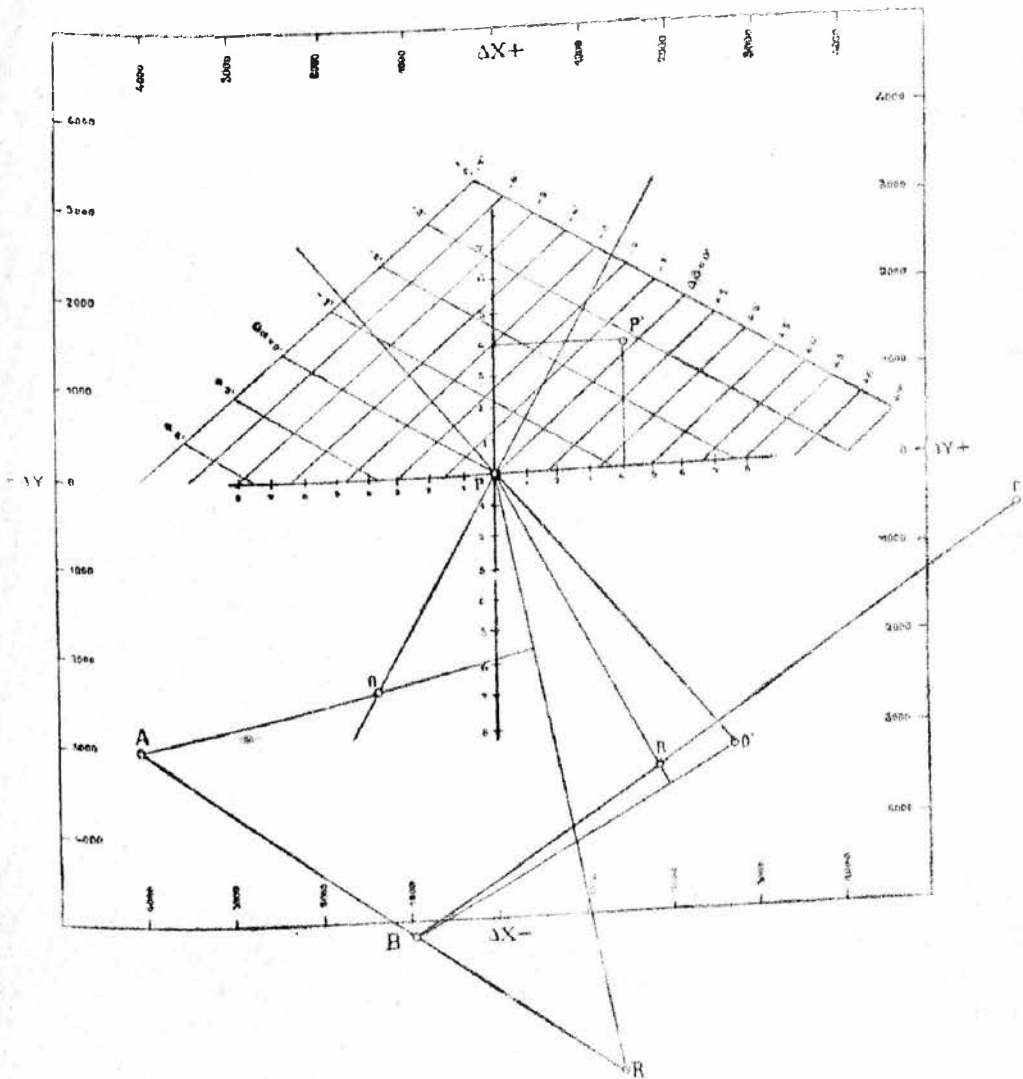


Fig. 3.

Nehmen wir an, man hätte von einem Punkte  $P'$  die Winkel

$$P' \begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{cases} 42^{\circ} 13' 10'' \\ 94^{\circ} 11' 0'' \end{cases}$$

gemessen, so haben wir

$$(P - P')_x = -2' 40''$$

$$(P - P')_y = -0' 20''$$

also rund

$$\Delta x = -2.7$$

$$\Delta y = -0.3$$

Aus dem Diagramm ergibt sich

$$\Delta y = +4.0 \text{ m}$$

$$\Delta x = +4.0 \text{ m}$$

In der Figur ist, um die Konstruktion klarer hervortreten zu lassen, nur die obere Hälfte des Aufsuchungsdiagramms gezeichnet.

Es versteht sich von selbst, daß dasselbe Verfahren auch zur graphischen Ausgleichung benützt werden kann. In diesem Falle wird man am zweckmäßigsten  $PR$  gleich 1 Bogenminute setzen können, einem Meter auf der Koordinatenaxe, entspricht dann die Länge von 69 mm.

Hat man beispielsweise 3 Winkel

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma$$

und liefern die Koordinaten des Näherungspunktes die Winkel

$$\alpha_0 \quad \beta_0 \quad \gamma_0$$

so hat man die Größen

$$P_0 R, \quad P_0 R', \quad P_0 R''$$

zu konstruieren und auf den Linien

$$OP_0, \quad O'P_0, \quad O''P_0$$

die Größen

$$(\alpha - \alpha_0)'' \frac{OP_0}{60''}, \quad (\beta - \beta_0)'' \frac{O'P_0}{60''}, \quad (\gamma - \gamma_0)'' \frac{O''P_0}{60''}$$

in entsprechender Richtung aufzutragen. Die senkrecht auf die Endpunkte gezogenen Strahlen geben unmittelbar das Fehlerdreieck. Um den korrigierten Punkt aufzusuchen, zeichne man aus freier Hand den dem Fehlerdreiecke eingeschriebenen Kreis. Sein Mittelpunkt entspricht zwar nicht ganz genau dem der Methode der kleinsten Quadrate entsprechenden Punkt, liegt ihm aber sehr nahe. Sei nun  $r$  der Radius dieses Kreises, gemessen in  $P_0 R$  als Einheit, so wird für diesen Punkt die Winkelabweichung

$$(\alpha - \alpha_0) \pm \frac{r}{P_0 R} \cdot 60''$$

und analog bei den übrigen Winkeln. Komplizierte, hie und da angeführte Konstruktionen bieten gegenüber der Rechnung in der Regel keinen wesentlichen Vorteil.

Im Anschluß an diese Mitteilung möchte ich mir noch einige Bemerkungen erlauben, zu welchen die soeben mitgeteilten Betrachtungen führen.

Bekanntlich wurde durch Einführung der Methode der kleinsten Quadrate der Willkür bei der Auswahl der plausibelsten Resultate ein Ende gemacht. Als notwendiges Übel ergab sich hieraus eine Art der Uniformität des ganzen Vermessungsvorganges. Die bei jedem Einzelproblem zu leistende Arbeit war im voraus so vorgeschrieben, daß nur mechanische Ausführung übrig blieb. Dieses und zum Teil auch die mechanische Unvollkommenheit der früheren Instrumente führte zur ausschließlichen Einführung der Winkelsatzbeobachtungen und schaffte die von Gauß mit Recht hochgehaltene Repetitionsmessung der Winkel ab. Statt Winkelmessung hat man Richtungsbeobachtung und man strebt darnach, die Richtungen möglichst gleich genau zu erhalten. Kurz gesagt, man sucht möglichst homogenes Beobachtungsmaterial zu gewinnen.

Ein solcher Vorgang ist vollkommen am Platze, z. B. bei einem Triangulierungsnetze, welches a priori so angelegt wird, daß man es mit nahe gleich großen Winkeln und Seiten zu tun hat. Da aber, wo es sich um nicht reguläre Konfigurationen handelt, nehmen wir z. B. das rhombische Entwicklungsgesetz einer Basis, wird man die Winkel verschieden genau beobachten müssen, um homogenes Rechenmaterial zu erhalten, indem man auf die spitzen Winkel seine Sorgfalt konzentriert.

Also ein homogenes Beobachtungsmaterial ist nicht immer ein homogenes Rechenmaterial.

Wir haben bekanntlich bei jeder Vermessung dreierlei Netze zu unterscheiden: das trigonometrische Netz, das Anschlußnetz und das Polygonnetz. Im ersten und letzten müssen die Satzbeobachtungen der Winkel unbedingt aufrechterhalten werden. Im Anschlußnetz möchten wir sie nur bedingungsweise gelten lassen. Die Berechtigung zu diesem Ausspruche schöpfen wir aus der Ausnahmstellung des Anschlußnetzes. Das trigonometrische sowie das Polygonnetz kann innerhalb gewisser Grenzen a priori konstruiert werden; beim Anschlußnetz ist dieses nicht der Fall, weil man dabei über die Sichten nicht frei verfügen kann. Daher die Mannigfaltigkeit der Anschlußprobleme, von welchen das Rückwärtseinschneiden ein klassisches Beispiel ist. Beim Rückwärtseinschneiden — um bei diesem Beispiel zu bleiben — hat man mit gegebenen, nicht zu wählenden, Sichten zu tun. Da wird grau alle Theorie. Man muß die Sache so nehmen wie sie ist. Das Rückwärtseinschneiden stellt sich hier als ein Einzelproblem dar und unsere Aufgabe ist, die Lage des gesuchten Punktes durch dasselbe so genau als möglich zu bestimmen, unbekümmert um alle Netzverbindungen des gesuchten Punktes. Die Punktbestimmung erfolgt durch die Messung zweier Winkel. Die Punktlage ist also — von allem anderen abgesehen — eine Funktion der beiden Winkel und ihrer Genauigkeit, weil wir praktisch nie die Winkel selbst, sondern nur ihre Näherungswerte bestimmen. Man hat also

$$P = P_0 + \frac{\partial P}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial P}{\partial \beta} d\beta \text{ oder } \overline{PP_0} = P_0 R \cdot \frac{d\alpha'}{3438} + P_0 R' \cdot \frac{d\beta'}{3438}$$

Da im allgemeinen

$$\overline{P_0 R} \geq \overline{P_0 R'},$$

so folgt hieraus, daß beide Winkel verschieden zur Punktbestimmung beitragen. Man sieht dieses klar im Diagramm, wo die Verschiebungswerte von  $\Delta\beta$  etwa halb so klein sind, wie jene von  $\Delta\alpha$ .

In gewissen Fällen kann der eine Verschiebungskoeffizient bis 10 und mehr Mal größer werden, als der andere. Will man eine gute Punktbestimmung haben, dann muß diese Verschiedenheit durch eine größere Genauigkeit der Messung des betreffenden Winkels ausgeglichen werden.

In diesem Falle ist es also offenbar nicht rationell, Satzbeobachtungen zu verwenden, weil diese die Winkel mit nahezu gleichem mittleren Fehler behaftet liefern. Weit besser eignet sich hierzu die Repetitions-messung oder besser gesagt die Einzelwinkelmessung. Wie weit man dabei zu gehen hat, das zeigt die einfache Konstruktion des Diagramms.

Befolgt man diese Regel, so hat man die Beruhigung, den Punkt bis auf bestimmte Grenzen zu erhalten, man arbeitet also zielbewußt a priori. Dieses ist dann besonders wichtig, wenn keine Ausgleichung des erhaltenen Punktes möglich ist. Liegt der zu bestimmende Punkt in der Nähe des gefährlichen Kreises, so wird ein derartiges Vorgehen manches Ärgernis ersparen. Aber auch in pädagogischer Hinsicht ist es sehr wichtig, auf diese Eigentümlichkeit gleich beim Unterrichte hinzuweisen, damit man nicht glaube, daß das Stimmen aller Rechenproben beim Rückwärtseinschneiden auch die Genauigkeit des gesuchten Punktes gewährleiste.