Paper-ID: VGI_190616

Das Pothenot'sche Problem im Raume

Karl Fuchs [1]

[1] *Preßburg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (11–12, 19–20), S. 173–175, 298–300

1906

BibTEX:


```
@ARTICLE{Fuchs_VGI_190616,
Title = {Das Pothenot'sche Problem im Raume},
Author = {Fuchs, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {173--175, 298--300},
Number = {11--12, 19--20},
Year = {1906},
Volume = {4}
}
```

der beiden beschriebenen Diagramme auf eine große Anzahl der bei Ausführung von Landesvermessungen vorkommenden Berechnungsarbeiten, welche bei Benützung der Diagramme, ohne an der erforderlichen Schärfe zu leiden, wesentlich vereinfacht werden.

Ich hoffe daher, allen jenen, die aus Beruf oder Neigung jenen Berechnungen obliegen und praktischen Neuerungen nicht unzugänglich sind, in diesen Diagrammen ein willkommenes Behelf geboten zu haben.

Das Pothenot'sche Problem im Raume.

Von Professor **Karl Fuchs** (Preßburg).

1. Graphische Auflösung.

Das Pothenot'sche Problem im Raume liegt vor, wenn an einer dreiseitigen Pyramide die Seiten a b c der Basis A B C und die entsprechenden Winkel α β γ an der Spitze S gegeben sind. Dieses Problem hat wohl nur in der Photogrammetrie praktische Bedeutung; es wird zum bekannten Pothenot'schen Problem in der Ebene, wenn die Spitze S in der Ebene der Basis liegt.

Wenn wir aus den Angaben die Pyramide vollständig bestimmen wollen, ist es am natürlichsten, zuerst die Längen der in die Endpunkte A B C mündenden Kanten x y z zu berechnen. Die Seitenflächen der Pyramide geben die folgenden Carnot'schen Bestimmungsgleichungen:

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma = c^2 \quad \ldots \ldots \quad 3)$$
$$y^2 + z^2 - 2yz \cos \alpha = a^2 \quad \ldots \ldots \quad 1)$$
$$z^2 + x^2 - 2zx \cos \beta = b^2 \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Wir wollen x y z als orthogonale Koordinaten ansehen. Dann sind die drei Gleichungen die Gleichungen von drei elliptischen Zylindern, deren Achsen die Koordinatenachsen sind. Diese drei Zylinder geben in den drei Koordinatenebenen E_1 E_2 E_3 als Spuren die Ellipsen, deren Achsen diagonal liegen, d. h. mit den Koordinatenachsen Winkel von 45° bilden. Es gibt im allgemeinen, den acht Octanten entsprechend, acht Punkte, in denen sich alle drei Zylinder schneiden, und die drei Koordinaten jedes dieser acht Punkte sind eine Auflösung unseres Problems. Uns kümmert nur die Auflösung des ersten Octanten mit durchaus positiven Wurzeln.

Die angenäherte Bestimmung der Schnittpunkte mittelst darstellender Geometrie ist eine so einfache, so elementare Sache, daß sie keiner weiteren Erläuterung bedarf. Die genauere Bestimmung durch Rechnung kann auf folgende Art geschehen.

Wir suchen die Kulminationspunkte der Elipsen 1) und 2). Durch Differentiation finden wir aus Gleichung 1):

$$(y - z \cos \alpha)\, d\, y + (z - y \cos \alpha)\, d\, z = 0 \quad \ldots \quad 4)$$

und einen analogen Ausdruck finden wir aus Gleichung 2). Daraus ergeben sich für die Kulminationspunkte der beiden Ellipsen die Bedingungen:

$$y = z \cos \alpha \qquad x = z \cos \beta \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

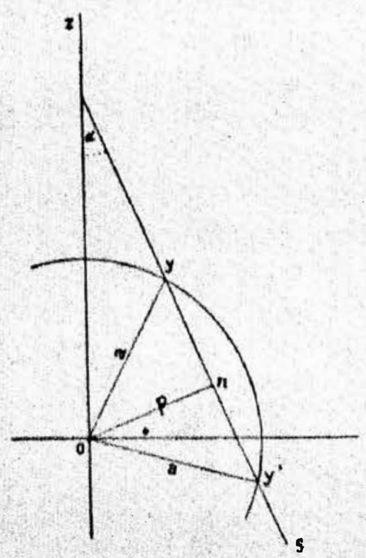
Das sind eigentlich die Gleichungen von Geraden, die durch die Kulminationspunkte der Ellipsen gehen. Wir führen nun versuchsweise in den Gleichungen 1) und 2) für die Variablen y und x die neuen Variablen ξ und η ein, und zwar in folgender Weise:

$$y = z \cos \alpha + \eta \qquad x = z \cos \beta + \xi \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

Wir finden dann durch Substitution die einfachen Ausdrücke:

$$z^2 \sin^2\alpha + \eta^2 = a^2 \qquad z^2 \sin^2\beta + \xi^2 = b^2 \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

Wenn wir aus diesen beiden Gleichungen für ein gegebenes z die Werte von η und ξ berechnen und in 6) einsetzen, dann finden wir die Koordinaten x und y; es sind die horizontalen Koordinaten des in der Höhe z gelegenen Punktes der Schnittlinie der beiden horizontalen Zylinder.



Die Größe y können wir leicht auch graphisch konstruieren. Wir zeichnen mit dem Radius a einen Kreis; auf einer durch den Mittelpunkt o gelegten z-Achse tragen wir die Länge z auf, und legen durch den Punkt z eine Gerade s mit dem Neigungswinkel α. Von dieser Geraden schneidet der Kreis zwei Stücke ab, die zwei Werte von y darstellen. Wenn wir nämlich von o das Lot p auf s fällen, dann ist $p = z \sin \alpha$, zn ist $z \cos \alpha$, und entsprechend der ersten Gleichung 7) ist a die Hypotenuse der Katheten p und $\eta = ny$, resp. $\eta = ny'$. Auf gleiche Weise können wir x graphisch bestimmen, wenn wir von o aus auch einen zweiten Kreis vom Radius b zeichnen, und von z aus einen zweiten Strahl mit dem Neigungswinkel β ziehen. Auf diese Weise können wir die Projektion der Schnittlinie der beiden horizontalen Zylinder in der xy-Ebene E_3 sogar einfacher konstruieren als mittelst darstellender Geometrie. Eine Stelle, wo diese Kurve die Ellipse 3) schneidet, gibt nur die Wurzeln x und y einer Auflösung.

Wenn wir auf irgendwelche Weise die angenäherten Wurzelwerte $x_0 \, y_0 \, z_0$ gefunden haben, und wir setzen sie in den Gleichungen 1) 2) 3) ein, dann geben die linken Seiten im allgemeinen nicht die richtigen Werte $a^2 b^2 c^2$, sondern um gewisse Exzesse $\Delta a \, \Delta b \, \Delta c$ zu viel, z. B. gibt Gleichung 3):

$$x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0 \cos \gamma = c^2 + \Delta c \quad . \; . \; . \; 8)$$

Wenn wir nun den Wurzeln gewisse (noch unbekannte) Incremente $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ geben, dann werden die linken Seiten der Gleichungen größer, z. B. wächst dann die linke Seite von 8) um

$$2(x_0 - y_0 \cos \gamma) \, \Delta x + 2(y_0 - x_0 \cos \gamma) \, \Delta y$$

wobei höhere Potenzen vernachlässigt sind. Dieses Increment der linken Seite soll den Exzeß der rechten Seite wieder verschwinden machen, muß ihm also entgegengesetzt gleich sein. Wir erhalten so die Fehlergleichungen:

$$(x_0 - y_0 \cos\gamma)\,\triangle x + (y_0 - x_0 \cos\gamma)\,\triangle y + \tfrac{1}{2}\triangle c = 0$$
$$(y_0 - z_0 \cos\alpha)\,\triangle y + (z_0 - y_0 \cos\alpha)\,\triangle z + \tfrac{1}{2}\triangle a = 0$$
$$(z_0 - x_0 \cos\beta)\,\triangle z + (x_0 - z_0 \cos\gamma)\,\triangle x + \tfrac{1}{2}\triangle b = 0$$

Hier sind $\triangle x$ $\triangle y$ $\triangle z$ die einzigen Unbekannten, die leicht berechnet werden können. Man kann die Gleichungen auch graphisch auflösen, denn es sind die Gleichungen von drei Ebenen, die den Koordinatenachsen parallel liegen, wobei $\triangle x$ $\triangle y$ $\triangle z$ die Variablen sind.

Die „gemeinschaftliche Tangente an zwei Kreise" für die Absteckung von Eisenbahntrassen mit besonderer Berücksichtigung der Übergangskurven.

Von den Ingenieuren Ernst Neumann und Karl P. Vajkai.

Beim Abstecken von Eisenbahntrassen ist oft die Aufgabe zu lösen, «eine gemeinschaftliche Tangente an zwei Kreise zu legen». Besonders bei Trassenverlegungen bestehender Geleise, wie solche jetzt öfter beim Baue der zweiten Geleise vorgenommen werden, können derartige Aufgaben leicht an den Ingenieur herantreten. Aber auch bei Neubauten, wie z. B. bei Gebirgsbahnen, wird der Trasseur durch Terrainschwierigkeiten manchmal genötigt, erst die Bögen abzustecken, um diese nachher durch Tangenten zu verbinden.

Die erwähnte Aufgabe wurde bisher größtenteils versuchsweise gelöst und hatte man als Folge dieser langwierigen Methode ein bloß angenähertes Resultat, bei welchem sogar größere als zulässige Fehler geduldet wurden. Knoll gibt in seinem «Taschenbuch zum Abstecken von Kurven an Eisenbahnen und Straßen»*) zwar eine geometrisch richtige Lösung obiger Aufgabe, welche aber dem Ingenieur nicht weniger Mühe verursacht als das Versuchsverfahren und auch in der Art der Lösung vieles an Genauigkeit einbüßt. So ist erforderlich, 3 Längen auf dem Gelände zu messen; selbstverständlich leidet unter dieser dreifachen Längenmessung die Genauigkeit, da dem Praktiker für gewöhnlich die Zeit zu einer sorgfältigeren Längenmessung mangelt, die ihm zu Gebote stehenden Längenmeßwerkzeuge im allgemeinen nur ein rohes Resultat zu erreichen gestatten, und endlich die heute erreichbare Genauigkeit der Winkelmessungen in keinem Verhältnisse zu jener der so gelösten Aufgabe steht.

Der nachstehender Lösung**) zugrunde liegende Gedanke basiert auf der Verwandtschaft zweier Kreise. Es ist allgemein bekannt, daß zwei Kreisen zwei Punkte — die Ähnlichkeitspunkte — eigen sind, die Schnittpunkte aller jener Sekanten,

*) Karl Knoll. Taschenbuch zum Abstecken von Kurven an Eisenbahnen und Straßen. Stuttgart 1873. Außerdem wurde benützt: R. v. Lichtenfels. Der Korbbogen und die Übergangskurve im Eisenbahngeleise. Wien 1903. Das Verlagsjahr des Knoll'schen Taschenbuches erscheint deshalb besonders hervorgehoben, da in den späteren Auflagen dieses Werkes die Lösung der Aufgabe nicht mehr aufgenommen wurde.

**) Der leider allzufrüh verewigte Prof. Ruth (Prag) hat die vorliegende Arbeit der Verfasser als anerkennenswert befunden, umsomehr, da die einzige theoretische Lösung dieser Aufgabe, welche in einer alten Knoll-Auflage sich vorfindet, nicht besonders anzuempfehlen wäre. Die Redaktion.

Umso größere Verbreitung fand die von Bessel im Jahre 1850 angegebene Methode der Elimination des Einflusses der Luft mittelst symmetrischer Reversionspendel, bei welchen der Schwerpunkt der beim Schwingen verdrängten Luftmenge stets in die Mitte der beiden Schneiden fällt.[1])

Solche symmetrische Reversionspendel wurden seither fast ausschließlich zur Ausführung der sogenannten **absoluten** Schwerebestimmungen verwendet.[2])

Die Erkenntnis der Notwendigkeit einer möglichst großen Verbreitung der Schweremessungen führte Airy auf den Gedanken, neben den umständlichen absoluten Schwerebestimmungen auch leichter durchführbare **relative** Schwerebestimmungen in Vorschlag zu bringen.[3]) Der Unterschied geht aus folgendem hervor:

Die reduzierte Pendelgleichung lautet:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I)}$$

woraus

$$g = \frac{l \pi^2}{t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Zur **absoluten** Bestimmung von g ist hiernach zu messen: Die Pendellänge l und die Schwingungsdauer t.

Aus Gleichung II) ergibt sich weiter, wenn vorausgesetzt wird, daß die **Pendellänge** (einschließlich aller Reduktionen) **unveränderlich** ist, die Beziehung:

$$g t^2 = K = \text{Konstante.}$$

Werden daher an verschiedenen Orten der Erdoberfläche die Schwingungszeiten t eines unveränderlichen Pendels gemessen, so erhält man **relative** Werte für die Schwereintensitäten g_n, bezogen auf einen bestimmten Vergleichsort (Referenzstation) nach

$$g_n = \frac{K}{t_n^2}$$

Ist für die Referenzstation g in absolutem Werte bekannt, so lassen sich dadurch aus den relativen Messungen absolute Werte ableiten.

(Fortsetzung folgt.)

Das Pothenot'sche Problem im Raume.

Von Professor **Karl Fuchs** (Preßburg).

Im Anschlusse an S. **Wellisch's** Artikel über «Punktbestimmung durch räumliches Einschneiden» sei hiemit eine einfache Lösung des Pothenot'schen Problemes im Raume gegeben. Geometrisch läßt sich das Problem folgendermaßen formulieren.

An einer dreieckigen Pyramide sind die Kanten a b c der Basis und die

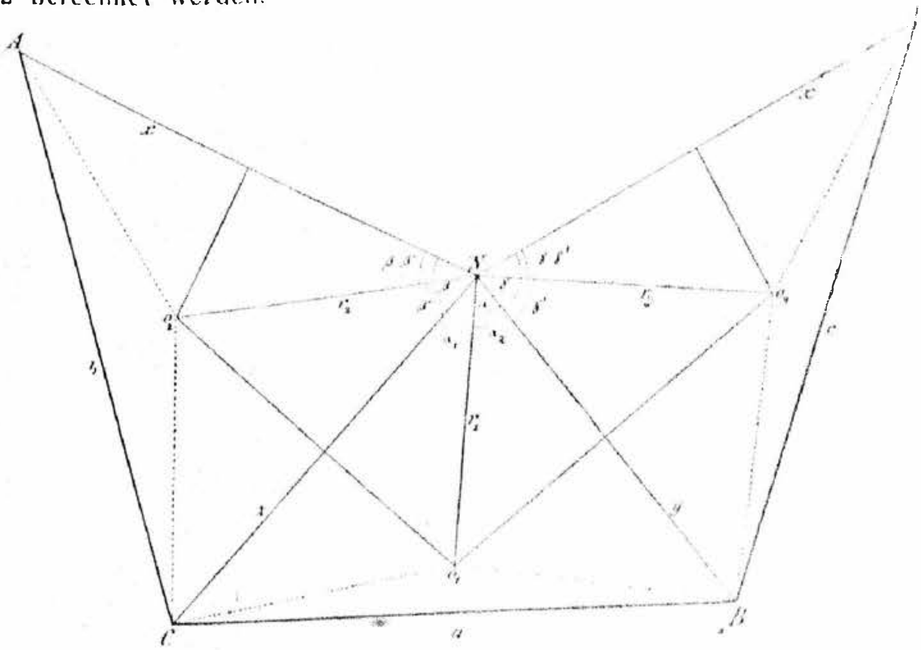
---

[1]) **Bessel**: in Astron. Nachr. 30, S. 1, und in Engelmann's Abhandl. von F. W Bessel, Leipzig 1876, S. 223.

[2]) Andere Pendelapparate hat v. Oppolzer in seinem Berichte der Intern. Erdmessg. 1883 (publ. 1884) Ann. VI, S. 20, erwähnt.

[3]) **Herz**, Geodäsie, S. 379.

Winkel α, β, γ an der Spitze N gegeben; es sollen die übrigen drei Kanten x, y, z berechnet werden.



Die Abbildung zeigt den Mantel der Pyramide. Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind o_1 o_2 o_3, und die Radien r_1 r_2 r_3 der Kreise sind bestimmt durch:

$$r_1 = \frac{a}{2 \sin \alpha} \qquad r_2 = \frac{b}{2 \sin \beta} \qquad r_3 = \frac{c}{2 \sin \gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Die halbe Kante x ist sowohl durch $r_2 \cos (\beta - \beta')$ als auch durch $r_3 \cos (\gamma - \gamma')$ gegeben. Analog ist die halbe Kante y durch $r_1 \cos \alpha_2$ und auch durch $r_3 \cos \gamma'$ bestimmt, und die halbe Kante z durch $r_1 \cos \alpha_1$ und auch durch $r_2 \cos \beta'$. Wenn wir der Kürze wegen setzen:

$$\cos \alpha_1 = A_1 \qquad \cos \alpha_2 = A_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

dann führen unsere Bemerkungen zu folgenden Gleichungen:

$$r_2 \cos (\beta - \beta') = r_3 \cos (\gamma - \gamma') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

$$r_1 A_1 = r_2 \cos \beta' \qquad r_3 \cos \gamma' = r_1 A_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

In der Gleichung 3) nehmen wir folgende Auflösungen vor:

$$\cos (\beta - \beta') = \cos \beta \cos \beta' + \sin \beta \sqrt{1 - \cos^2 \beta'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

$$\cos (\gamma - \gamma') = \cos \gamma \cos \gamma' + \sin \gamma \sqrt{1 - \cos^2 \gamma'}$$

Wenn wir in diesen Ausdrücken $\cos \beta'$ und $\cos \gamma'$ nach 4) durch A_1 und A_2 ausdrücken, dann nimmt die Gleichung 3) die Form an:

$$A_1 \cos \beta - A_2 \cos \gamma = \sin \gamma \sqrt{q^2 - A_2^2} - \sin \beta \sqrt{p^2 - A_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

wobei p und q bestimmt sind, durch $r_1 p = r_2$ und $r_1 q = r_3$. Diese Gleichung 6) hat die zwei von einander abhängigen Unbekannten A_1 und A_2. Die Beseitigung der Wurzelzeichens erfordert ein zweimaliges Quadrieren. Nach dem ersten Quadrieren führen wir die Differenz $\alpha_1 - \alpha_2 = \xi$ ein und schreiben entsprechend:

$$A_1 = \cos\frac{\alpha+\xi}{2} \qquad A_2 = \cos\frac{\alpha-\xi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots 7)$$

Wenn wir diese Cosinus entwickeln, dann nimmt die quadrierte Gleichung 6) die überraschend einfache Form an:

$$n_1 \cos\xi + n_2 = \sqrt{n_3 + n_4 \sin\xi + n_5 \cos\xi + n_6 \cos^2\xi} \quad \ldots\ldots 8)$$

wo $n_1 \ldots n_6$ gewisse Funktionen der gegebenen Größen a, b, c, α, β, γ sind. Die zweite Quadrierung gibt einen Ausdruck von der Form:

$$\cos^2\xi + m_1 \sin\xi + m_2 \cos\xi + m_3 = o \quad \ldots\ldots 9)$$

den wir durch Zusammenziehen der Mittelglieder leicht auf die Form bringen:

$$\cos z\,\xi + n \cos(\xi + \nu) + m = o \quad \ldots\ldots\ldots 10)$$

wo n, m, ν bekannte Konstanten sind. Wenn wir ξ als Variable ansehen, ist 10) eine leicht konstruierbare Sinuskurve, die die Abszissenachse im allgemeinen in vier Punkten schneidet; es ist also eine versteckte Gleichung vierten Grades, wie auch Wellisch bemerkt. Sobald wir den Wert von ξ, also auch die Werte von A_1 und A_2 kennen, können wir auf Grund unserer ersten Bemerkungen auch die Kanten x, y, z berechnen.

Das Problem hat sogar acht Auflösungen. Die drei Strahlen x, y, z können nämlich auch nach rückwärts, in negativer Richtung verlängert werden, und der Punkt A kann auf dem x-Strahl sowohl auf den positiven, als auch auf den negativen Ast zu liegen kommen. Da das Analoge für B und C gilt, gibt es 2 . 2 . 2 = acht Lagen, in denen das Dreieck ABC in die Strahlen x, y, z eingepaßt werden kann.

Beitrag

zur Absteckung der Bahnachse beim Baue zweiter Geleise mittelst Koordinaten von der Altlage aus nebst einem Spiegelinstrument zum Fällen radialer Visuren.

Von Ingenieur Ernst Neumann.

I. Einleitung.

Bei dem jetzt aktuellen Interesse an dem Baue zweiter Geleise halte ich es für zweckmäßig, meine geodätischen Erfahrungen, die ich in meiner Eisenbahnpraxis gesammelt habe, kurz faßlich den Praktikern zur rascheren Erledigung ihrer Absteckungsarbeiten zur Verfügung zu stellen.

Im allgemeinen sind die Gesichtspunkte, von denen aus ein zweites Geleise trassiert wird, sehr begrenzt. Der Trasseur eines solchen wird es sich selbstverständlich zum Grundsatze machen, das neue Geleis innerhalb zweier aufeinanderfolgenden Stationen, womöglich auf derselben Seite und in gleicher Entfernung vom Betriebsgeleise zu führen; doch ist er durch im Lichtraumprofile der Parallellage liegende, schwer zu beseitigende Objekte, oder um einen besseren Massenausgleich zu erzielen, oft gezwungen, von diesem Prinzipe abzuweichen. Dies hat Verlegungen des neuen Geleises von der einen Seite der Altlage auf die andere zur Folge.