Mathematische Kleinigkeiten

Karl Fuchs [1]

[1] *Preßburg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (11–12), S. 178–179

1906

BibTEX:

```
@ARTICLE{Fuchs_VGI_190618,
Title = {Mathematische Kleinigkeiten},
Author = {Fuchs, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {178--179},
Number = {11--12},
Year = {1906},
Volume = {4}
}
```

Wäre in Fig. 4 A ein ausgesteckter Bogenpunkt und sollte von dem ebenfalls gegebenen Punkte P an K die Tangente gelegt werden, so zeigt die Figur,

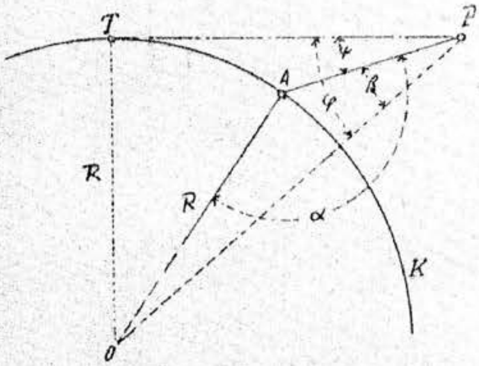

Fig. 4.

daß jene durch Drehen der Sekante AP um den Winkel ψ erhalten werden kann. Man braucht also einem über P aufgestellten, nach A weisenden Instrumente — der Annahme unserer Figur entsprechend — bloß ψ hinzuzufügen, um die Richtung der Tangente zu fixieren. ψ kann nachfolgend berechnet werden. Die Strecke AP ist ohnedies bei Bestimmung von P gerechnet worden (siehe Gleichung I oder II) und Winkel α wird gemessen, dann ist aus dem Dreiecke OAP

$$OP = \sqrt{(AP + R)^2 - 2 . AP . R (1 - \cos\alpha)} \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{V}$$

$$\sin\beta = \frac{R}{OP} . \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{VI}$$

und dem jetzt bestimmten Dreiecke OTP

$$\sin\varphi = \frac{R}{OP} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{VII}$$

$$PT = \sqrt{\overline{OP}^2 - R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{VIII}$$

Es ergibt sich nun der Winkel

$$\psi = \varphi - \beta \text{ und allgemein } \psi = \varphi \mp \beta \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{IX}$$

wobei das Pluszeichen in Geltung tritt, wenn A außerhalb des zwischen dem Berührungspunkte und OP gelegenen Bogen liegt. Mißt man nun auf der erhaltenen Tangentenvisur PT (Gleichung VIII) ein, so erhält man den Berührungspunkt T der Tangente. (Schluß folgt.)

Mathematische Kleinigkeiten.

Von Professor **Karl Fuchs** (Preßburg).

1. Mittelwert und Abweichung.

Zwei beliebige Zahlen a und b haben von ihrem Mittelwert m (= halbe Summe) gleiche Abstände oder Abweichungen n (= halbe Differenz), so daß gilt:

$$a = m + n \qquad b = m - n \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Daraus folgt:

$$ab = m^2 - n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

2. Pythagoräische Zahlen.

Das sind ganze Zahlen, die den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks entsprechen, wie 3, 4, 5. Wenn in 2) das Produkt ab ein Quadrat wäre, dann wären $\sqrt{ab}$, m, n drei pythagoräische Zahlen, und m wäre die Hypotenuse. Wenn wir aber a und b durch a^2 und b^2 ersetzen, dann steht links tatsächlich ein Quadrat $(ab)^2$, und 2) nimmt die Form an:

$$(ab)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

Wenn wir also zwei ganz beliebige (unpaare) Zahlen a und b nehmen, dann sind die Werte von

$$ab \qquad \frac{a^2 + b^2}{2} \qquad \frac{a^2 - b^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

notwendig pythagoräische Zahlen. So gibt $a = 11$, $b = 3$ die pythagoräischen Zahlen 33, 65, 56, wo 65 die Hypotenuse ist.

Es ist leicht, auch pythagoräische Zahlen des Raumes zu finden. Wir nehmen die Hypotenuse 65 der gegebenen Zahlengruppe, zerlegen sie in Faktoren: $65 = 13 . 5$ und bilden aus diesen beiden Faktoren $a = 13$, $b = 5$ eine neue Gruppe; wir finden 65, 97, 72, wo 97 die Hypotenuse ist.

Aus den beiden Gleichungen:

$$97^2 = 72^2 + 65^2 \qquad\qquad 65^2 = 56^2 + 33^2$$

ergibt sich:

$$97^2 = 72^2 + 56^2 + 33^2$$

d. h. 97, 72, 56, 33 sind pythagoräische Zahlen des Raumes. Wir könnten jetzt $97 = 97 . 1$ setzen und aus $a = 97$, $b = 1$ eine dritte Gruppe bilden etc.

3. Quadratische Gleichungen.

Eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln a und b sind, ist bekanntlich das Produkt der beiden Faktoren $(x - a)$ und $(x - b)$, und ihr Bau ist gegeben durch:

$$x^2 - (a + b)\, x + ab = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Der Koeffizient von x ist also der doppelte Mittelwert der Wurzeln, und wir können 5) nach 2) so schreiben:

$$x^2 - 2\, m\, x + (m^2 - n^2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Das Schema der Gleichung aber lautet (mit negativem Mittelglied):

$$x^2 - p\, x + q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Der Mittelwert der Wurzeln ist also aus p sofort ersichtlich: er ist die Hälfte von p. Da ferner der Vergleich von 6) und 7) zu $q = m^2 - n^2$ oder $n^2 = m^2 - q$ führt, so ergibt sich die ergänzende Regel: das Quadrat der Abweichung n der Wurzeln finden wir, wenn wir das absolute Glied q vom Quadrat des Mittelwertes m abziehen. Die Wurzeln sind dann $a = m + n$ und $b = m - n$.

Diese Auffassung der quadratischen Gleichungen haftet besser im Gedächtnis, als die gebräuchlichen Auffassungen.

Reichsstraßenkataster.

Mit dem nachstehenden, vom 9. März d. J. datierten Erlasse hat die k. k. n.-ö. Statthalterei eine Verwaltungs-Angelegenheit in Fluß gebracht, welche nicht nur in bau- und verkehrstechnischer Hinsicht von einer ungewöhnlichen Bedeutung ist, sondern hauptsächlich in katastraler Beziehung beachtet zu werden verdient. Dieser Erlaß erscheint in vollem Maße geeignet, die berufenen Behörden der anderen Kronländer Österreichs zur Nachahmung der getroffenen Maßregeln anzueifern.