Über die periodische Änderung von Höhenunterschieden

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Oberingenieur in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **4** (13–14, 15–16), S. 193–198, 229–235

1906

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III/2 Kegelgasse 29, Parterre, T. 8. — K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.

Erscheint am 1. jeden Monats. Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften. Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.

Expedition und Inseratenaufnahme durch die Buchdruckerei J. Wladarz (vorm. Haase) Baden bei Wien, Pfarrgasse 3.

Nr. 13–14. **Wien, am 1. Juli 1906.** **IV. Jahrgang.**

Über die periodische Änderung von Höhenunterschieden.

Mit Bezug auf die Berichte über die Einwägungen bei Westend. («Zeitschrift für Vermessungswesen», 1898 S. 385, 1902 S. 1, 1904 S. 660, 1905 S. 13, 73 und 299).

Von Oberingenieur **S. Wellisch**, Wien.

Vorwort.

Die dem Studium der Veränderungen von Höhenunterschieden gewidmeten, von der geodätischen Abteilung der Landwirtschaftlichen Hochschule in Westend bei Berlin und von dem Kgl. Preußischen Geodätischen Institute auf dem Telegraphenberge bei Potsdam ausgeführten Feinnivellements haben dargetan, daß die Lotrichtung zum Teil regelmäßigen Schwankungen mit einer Amplitude von etwa 0·2 Bogensekunden ausgesetzt ist. Zur Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung spricht Repkewitz die Vermutung aus, daß Bewegungen der Erdscholle oder Gestaltsänderungen der Niveauflächen die Ursache derselben sein könnten; Prof. Dr. Schumann erhebt die Frage, ob nicht die Einwirkung des veränderlichen Luftdruckes und der Lufttemperatur auf die Refraktion diese Schwankungen herbeiführen; Prof. Dr. Eggert spricht reserviert der Annahme von Schwankungen der Lotrichtung das Wort; Prof. Vogler stellt sich vor, daß die Erde von einem schnell rotierenden Ring umgeben sei, der durch seine Anziehung diese periodischen Lotabweichungen hervorruft, während Prof. Dr. Schweydar dieselben nicht als Störungen der Niveauflächen angesehen wissen will, sondern als lokale Bodenschwankungen hält, die mit der Sonnenstrahlung und dem täglichen Wechsel der Temperatur zusammenhängen.*)

In Anbetracht dieser verschiedenartigen, zum Teil widersprechenden Auffassungen, möge es gestattet sein, zunächst die möglichen Ursachen der Niveaustörungen hier kurz zu besprechen, um sodann auf einen Versuch zur teilweisen Erklärung der beobachteten Erscheinung selbst überzugehen.

Die Ursachen der zeitlichen Lotstörungen.

Werden die auf die Niveaufläche eines gewählten Höhen-Fixpunktes bezogenen Niveauunterschiede von Punkten der physischen Erdoberfläche durch ein geometrisches Nivellement ermittelt, so wird hiebei die Visierlinie des Nivellierinstrumentes stets so gerichtet, daß sie in jedem Aufstellungsorte normal zur Lotrichtung steht oder tangential zu der durch das Instrument gelegten Niveaufläche verläuft. Unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Lage der Niveauflächen muß daher die Niveaudifferenz zwischen zwei unverrückbaren Höhenmarken — auf demselben Wege ermittelt — einen konstanten Wert ergeben. Nun ist aber die Erde, als Ganzes betrachtet, durchaus kein absolut starrer Körper, sondern zufolge ihrer Zusammensetzung aus festen, flüssigen und luftförmigen Bestandteilen periodisch wechselnden Formänderungen unterworfen. Kosmische Erscheinungen nicht minder, wie geologische, meteorologische und klimatologische Vorgänge auf der Erdoberfläche bewirken teils regelmäßige, teils unregelmäßige Massentransporte und im Zusammenhange damit Verrückungen des Schwerpunktes der Erde und Schwankungen der Niveauflächen.

Einen augenscheinlichen Beweis hiefür bietet das stets bewegte Meer, dessen Wasserspiegel in relativer Ruhe gegen das Festland gedacht — ja ebenfalls einer Niveaufläche angehört, und zwar derjenigen, welche als das «Geoid» bezeichnet wird Der wahre Meeresspiegel ist, wie die unausgesetzten Meeresströmungen zu erkennen geben, nicht nur keine Niveaufläche, der Wechsel in der Geschwindigkeit an der Oberfläche der Strömungen verrät vielmehr, daß das Gefälle der Strömungen, das ist die Neigung der wahren Meeresoberfläche gegen die ruhende Geoidfläche veränderlich ist. Jede Änderung einer Niveaufläche bedingt aber ein proportionales Mitschwingen aller übrigen Niveauflächen.

Sieht man ab von den an eine bestimmte Zeitperiode nicht gebundenen geologischen Massenumwälzungen und von den auf größere Zeiträume ausgedehnten Änderungen der mittleren Wasserstände, wie es z. B. die Hebungserscheinungen der Skandinavischen Halbinsel sind, so hat man umsomehr jene Ursachen zu be-

*) Siehe auch: Prof. Dr. E. Hammer, „Einwägungen von Festpunkten an der Linie Böblingen-Lustnau, Sommer 1902“ in „Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württ.“ 1906, S. 113—188.

achten, welche alljährlich regelmäßig wiederkehrende Oszillationen der Niveauflächen bewirken. Hiezu gehört das mit den Jahreszeiten sich wiederholende Festhalten von Wassermassen auf den polaren Festländern durch Vereisung. Man hat approximativ festgestellt, daß das gegenwärtig in den nördlichen Polarregionen aufgestappelte Eis durch Schmelzen so viel Wasser liefern würde, daß damit die ganze Erdoberfläche in einer Höhe von 8·7 Meter überflutet werden könnte. Betragen die zur Sommerszeit tatsächlich abschmelzenden Eismassen wohl nur einen geringen Bruchteil davon, so müssen doch diese immer noch namhaften Massenbewegungen periodische Schwerpunktsverschiebungen im Erdkörper und demzufolge auch Schwankungen der Niveauflächen mit dem Wechsel der Jahreszeiten erzeugen können.

Baeyer hat aus neunjährigen Pegelbeobachtungen in Swinemünde gefunden, daß das Niveau der Ostsee in der ersten Hälfte des Jahres um 3·296 Zoll = 9 Zentimeter niedriger ist, als in der zweiten Hälfte. Da auch die Temperatur in der ersten Hälfte des Jahres geringer ist, als in der zweiten, so glaubte er anfangs die alleinige Ursache dieses Niveauunterschiedes in der Ausdehnung des Wassers durch die Temperatur suchen zu dürfen; er fand aber durch eine überschlägige Rechnung, daß noch andere Ursachen an dieser Erscheinung Teil haben müssen.

«Ich denke an innere Veränderungen des Erdkörpers, welche Einflüsse auf die Richtung der Schwere erlangen», schreibt Bessel im Jahre 1844 an Humboldt, als er zum erstenmale durch direkte Beobachtungen am Königsberger Meridiankreise eine bisher unaufgeklärte Polhöhendifferenz von etwa 0·3 Bogensekunden wahrnahm. Aber schon 1837 schrieb er in den «Astron Nachr.», Nr. 329: «Wenn das Innere der Erde flüssig ist und die Teile der Flüssigkeit mit der Zeit ihre Anordnung verändern, so müssen dadurch Änderungen der geometrischen Oberfläche der Erde entstehen, selbst wenn die physische ungeändert bleibt. Diese Änderungen würden sich in den Polhöhen der Sternwarten, sowie auch in der Höhe des Meerwassers an den Küsten verraten, und man würde, wenn eines von beiden sich veränderlich, das andere unveränderlich zeigte, auch unzweideutig auf Veränderungen der physischen Oberfläche der Erde schließen können».

Thomson hat die Berechnung angestellt, daß die durch die Sonnenerwärmung aus den Äquatorgebieten nach den Polen jährlich fortbewegten 660 Billionen Kubikmeter Wasser allein schon eine Schwankung der Erdachse um etwa 0·5″ zu bewirken imstande ist. Mit eben dem gleichen Betrage müßten diese meteorologischen Vorgänge auch auf ein präzis und unveränderlich aufgestelltes Nivellierinstrument störend einwirken.

Täglich in rhythmischen Intervallen wiederkehrende, nach bestimmten Weltrichtungen vorherrschende Änderungen der Niveauflächen rühren von den Meeresgezeiten her, von den Lunarfluten mit täglich zweimaliger Wiederkehr, von den Solarfluten mit monatlich wirkenden Verstärkungen und Hemmungen. Daß auch die Deklination von Mond und Sonne, die Perigäen und Stundenwinkel dieser Gestirne sowie die Längen der aufsteigenden Knoten die mittlere Wirkung auf das Meeresniveau abzuändern vermag, ist ebenso einleuchtend, als durch das Hinzutreten der innerhalb eines Tages wechselnden Barometerstände die Intensität der Meeresgezeiten in unregelmäßiger Weise gestört werden kann.

Die in Rede stehenden Veränderungen in den Niveaudifferenzen fixer Punkte haben aber nicht allein in den Störungen der Schwererichtung, sondern, wie Plantamour, v. Orff, Schweydar u. A. nachgewiesen haben, auch in örtlichen Bodenneigungen ihren Grund, die durch die täglich wechselnde Einwirkung der Sonnenbestrahlung und die damit zusammenhängende ungleiche Ausdehung des Bodens hervorgerufen werden. — Auch hat es nicht an Versuchen gefehlt, die Niveauschwankungen mit den Erdbeben und vulkanischen Prozessen in Verbindung zu bringen.

In dem Zusammenwirken der vielfach verwickelten Ursachen, deren vermischte Wirkungen nur schwer von einander zu trennen sind, liegt wohl die Hauptschwierigkeit, eine ausgesprochene Gesetzmäßigkeit in den zu Westend und Potsdam wahrgenommenen Niveaudifferenzen zu erkennen. Immerhin steht zu hoffen, daß längere Zeit fortgesetzte Beobachtungen nähere Aufklärungen noch bringen werden.

In den nachfolgenden Ausführungen sei es versucht, die hydrostatische Theorie der Gezeiten auf die zur Sprache gekommene Erscheinung anzuwenden und jenen Anteil, welchen die Flutwellen an die beobachteten Oszillationen haben, ohne Inanspruchnachme des Begriffes «Potentiel» in elementarer Weise zu ermitteln.

Die Berechnung der Fluthöhe.

In Fig. 1 sei O der Mittelpunkt der Erde, M der Mittelpunkt des Mondes, A der dem Monde am nächsten gelegene und B der von dem Monde entfernteste Punkt der Erdoberfläche. Betrachtet man die von der Gravitation des Mondes

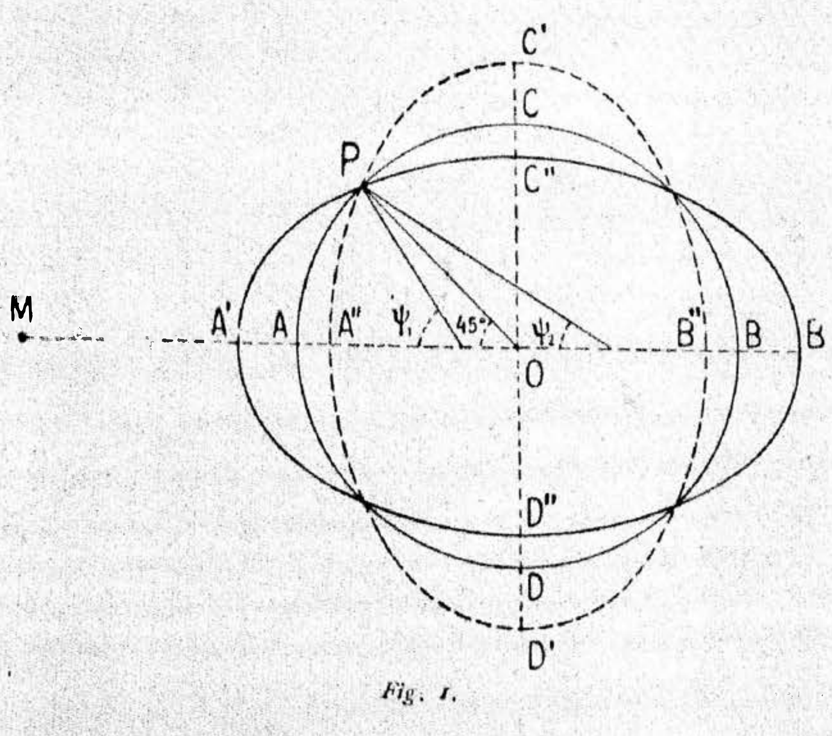

Fig. 1.

unbeeinflußte Erde als eine vollkommene, unelastische Kugel, die bei veränderlichen Belastungen keine Deformationen erleidet, und denkt man sich die Meere auf ihrer ganzen Oberfläche gleichmäßig ausgebreitet, so wird sie unter dem Einflusse der fluterzeugenden Kräfte die Gestalt eines Umdrehungsellipsoides mit nach dem Monde gerichteter Hauptachse erhalten. Der in der Ebene der Mondbahn befindliche größte Kreis A C B D, welcher gegen den Erdäquator um den Winkel δ geneigt ist, wird durch die Anziehungskraft des Mondes in die Länge gezogen und eine eilinienartige oder ellipsenförmige Gestalt annehmen. Da die Anziehung des Mondes, welche sich verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhält, für den Punkt A der Erde größer ist, als für den Punkt B, so wird das den Punkt A umgebende Wasser höher steigen, als die um B lagernden Gewässer; es wird die Steighöhe $AA' = h'$ größer sein, als $BB' = h''$, während die gleichzeitig bei C und D eintretende Senkung des Wasserspiegels den halben mittleren Wert $CC' = DD' = \frac{h' + h''}{4}$ erlangen wird, was aus der Überlegung hervorgeht, daß die Erhebungen bei A und B Kugelkalotten bilden, die Depressionen bei C und D aber einem ringförmigen Gürtel angehören. Nach Zurücklegung eines viertel Mondumlaufes befindet sich der Mond in einer zum Durchmesser AB senkrechten Richtung, A' und B' gelangen nach A'' und B'' und nehmen hiebei gegenüber der Ursprungslage A und B einen um $AA'' = BB'' = \frac{h' + h''}{4}$ tieferen Stand ein. Die Punkte A und B, welche in der zuerst betrach- Stellung des Mondes in der Flut standen, werden nunmehr Ebbe haben. Der zwischen Flut und Ebbe liegende Höhenunterschied des Wasserspiegels heißt die Fluthöhe; sie ist, wie aus den vorgebrachten Ausführungen hervorgeht, für einen und denselben Punkt der Erdoberfläche für die obere Kulmination des Mondes ein Maximum, für die untere Kulmination ein Minimum, nämlich im ersten Falle $h' + \frac{h' + h''}{4}$ und im zweiten Falle $h'' + \frac{h' + h''}{4}$. Das arithmetische Mittel aus den Fluthöhen für beide Kulminationen, d. i.

$$H = \tfrac{3}{4}\,(h' + h'')$$

wird die Totalflut genannt.

Um einen mathematischen Ausdruck für die Totalflut zu erlangen, betrachten wir den Punkt A unter dem Einflusse des Newton'schen Attraktionsgesetzes.

Ist k die Attraktionskonstante,
E die Masse der Erde,
M die Masse des Mondes,
m die Masse des materiellen Punktes A,
r der Halbmesser der Erdkugel,
d der Abstand des Mondmittelpunktes vom Erdzentrum,
g die von der Erdmasse und
p die von der Mondmasse auf die Masse m ausgeübte Beschleunigung,

so ist die Anziehungskraft der Erde auf den Punkt A:

$$k\frac{mE}{r^2} = mg,$$

die Anziehungskraft des Mondes auf denselben Punkt:

$$k\frac{mM}{(d-r)^2},$$

die Anziehungskraft des Mondes für die im Mittelpunkt der Erde gelagerte Masse m:

$$k\frac{mM}{d^2},$$

sohin ist jene Kraft, womit der Punkt A von dem Monde stärker angezogen wird, als der Erdmittelpunkt, jene «fluterzeugende Kraft» also, welche die Erhebung des Punktes A um die Höhe h' bewirkt, gleich dem Unterschied:

$$k\frac{mM}{(d-r)^2} - k\frac{mM}{d^2} = mp.$$

(Schluß folgt.)

Die „gemeinschaftliche Tangente an zwei Kreise"

für die Absteckung von Eisenbahntrassen mit besonderer Berücksichtigung der Übergangskurven.

Von den Ingenieuren Ernst Neumann und Karl P. Vajkai.

(Schluß).

Fassen wir nun auf Grund des Vorausgeschickten den Gang der Aufgabe zusammen, so ergibt sich folgende geodätische Lösung: Seien in Fig. 5 K und K_1 zwei durch eine Tangente zu verbindende Kreisbögen, so sucht man nach Gleichung III oder IV erst die Endpunkte paralleler Halbmesser, mißt die Länge

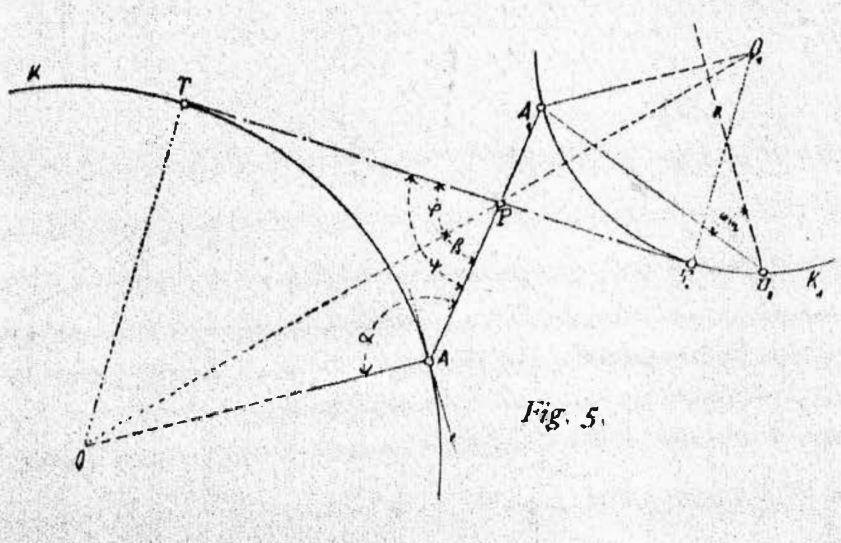

Fig. 5.

ÖSTERREICHISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen

ORGAN DES VEREINES
DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Herausgeber und Verleger:
VEREIN DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion und Administration: Wien, III/2 Kegelgasse 29, Parterre, T. 2. K. k. österr. Postsparkassen-Scheck- und Clearing-Verkehr Nr. 824.175.	Erscheint am 1. jeden Monats. Jährlich 24 Nummern in 12 Doppelheften. Preis: 12 Kronen für Nichtmitglieder.	Expedition und Inseratenaufnahme durch die Buchdruckerei J. Wladarz (vorm. Haase) Baden bei Wien, Pfarrgasse 3.

Nr. 15—16. **Wien, am 1. August 1906.** IV. Jahrgang.

Über die periodische Änderung von Höhenunterschieden.

Mit Bezug auf die Berichte über die Einwägungen bei Westend. («Zeitschrift für Vermessungswesen», 1898 S. 385, 1902 S. 1, 1904 S. 660, 1905 S. 13, 73 und 299).

Von Oberingenieur **S. Wellisch**, Wien.

(Schluß).

Bildet man das Verhältnis der Beschleunigungen:

$$\frac{g}{p} = \frac{E}{r^2 M} \frac{d^2 (d - r)^2}{d^2 - (d - r)^2}$$

und hieraus:

$$p = g\, r^2 \frac{M}{E} \frac{d^2 - (d - r)^2}{d^2 (d - r)^2},$$

so ist dies jener Betrag der Beschleunigung, um welchen die in A herrschende Fallbeschleunigung g bei Erhebung um h' vermindert wird. Es findet daher auch die Beziehung statt:

$$\frac{g}{g - p} = \frac{(r + h')^2}{r^2}.$$

Da p im Vergleiche zu g eine sehr kleine Zahl ist, so kann man mit hinreichender Genauigkeit auch setzen:

$$\frac{g}{g-p} = 1 + \frac{p}{g} = \left(\frac{r+h'}{r}\right)^2$$

oder:

$$1 + \frac{p}{2g} = \frac{r+h'}{r}.$$

Sohin ist:

$$h' = \frac{r\,p}{2\,g}$$

oder nach Substitution der Wertes von p:

$$h' = \frac{r^3 M}{2\,E} \frac{d^2 - (d-r)^2}{d^2 (d-r)^2}.$$

In analoger Weise erhält man:

$$h'' = \frac{r^3 M}{2\,E} \frac{(d+r)^2 - d^2}{(d+r)^2 d^2}$$

Bildet man die Summe:

$$h' + h'' = \frac{r^3 M}{2\,E} \frac{(d+r)^2 - (d-r)^2}{(d+r)^2 . (d-r)^2} = 2 \frac{M}{E} \frac{r^4 d}{(d^2 - r^2)^2}$$

oder in hinreichender Annäherung:

$$h' + h'' = 2 \frac{M}{E} \frac{r^4}{d^3},$$

so ergibt sich:

$$H = \frac{3}{2} \frac{M\,r^4}{E\,d^3}.$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem von Prof. Dr. Helmert in den «Phys. Theorien der höheren Geodäsie», S. 384—386, Gl. 8—12, abgeleiteten Ausdruck für die Lotstörung P:

$$r \operatorname{arc} P = \frac{3}{2} \frac{M}{E} r \sin^3 p,$$

wo $\sin p = \frac{r}{d}$ den sin der Horizontalparallaxe des störenden Gestirnes bedeutet.

Führt man in unsere Formeln die speziellen Werte ein, und zwar:

$$M = \frac{E}{80}, \quad d = 60{\cdot}28\ r, \quad r = 6{,}377.000\ m,$$

so erhält man für die Höhe der Mondflut:

$$H = \frac{3}{2} \frac{6377000}{80 \,.\, 60{\cdot}28^3} = 0{\cdot}546\ m.$$

Setzt man an Stelle von M die Sonnenmasse: 327800 E, und an Stelle von d die mittlere Sonnenentfernung: 23370 r, so ergibt sich für die Höhe der Sonnenflut:

$$H' = 0{\cdot}246\ m.$$

Durch Summierung der Lunar- und Solarfluthöhen ergibt sich die Höhe der Springflut:

$$\Sigma H = 0{\cdot}792\ m,$$

durch Subtraktion die Höhe der Nippflut:

$$\Delta H = 0{\cdot}300\ m.$$

Auf die hier berechneten Fluthöhen würde sich die Oberfläche des Meeres nur dann tatsächlich erheben, wenn das die Erdkugel vollständig bedeckende Wasser auch Zeit fände, in Ruhe zu kommen. Die Achsendrehung der Erde, sowie die Bewegung von Sonne und Mond lassen jedoch das Zustandekommen eines Gleichgewichtszustandes nicht zu. Da aber die Veränderungen der Niveauflächen von diesen aus dem Trägheitsgesetze fließenden Verzögerungen unabängig sind, so erscheinen in den hier berechneten Höhenunterschieden die wahren Änderungen der Niveauflächen, welche von der Libelle des Nivellierinstrumentes auch sofort angezeigt werden, zum Ausdruck gebracht. Kleine Schwankungen der Niveauflächen sekundärer Natur können wohl auch durch lokale Flutbewegungen hervorgerufen werden, die dadurch entstehen, daß die Kontinente, Inseln und Meeresuntiefen der freien Entwicklung der Flutwellen hemmend in dem Weg liegen. Hiedurch wird nämlich bewirkt, daß die Flutwellen beim Eintritt in einen Meerbusen, an dessen Küste die Beobachtungen stattfinden, keilförmig eingezwängt und zu besonderen Höhen aufgestaut werden. Da aber im Innern der Ozeane die Einschränkung der Beweglichkeit nur äußerst gering ist, so werden die theoretischen Fluthöhen für die Hauptmasse der Gewässer keine merklichen Abänderungen erfahren, weshalb diese sekundären Störungen in den Schlußergebnissen auch nicht zum Ausdruck kommen können.

Für die weiteren Betrachtungen, welche die Ermittlung der durch die Gezeiten in meridionaler und ostwestlicher Richtung entstehenden Neigungsänderungen der Geoidfläche zum Ziele haben, genügt es daher vollends, die ermittelten Höhen der Totalfluten unverändert zugrunde zu legen.

Die Amplitude im Meridian.

Fassen wir einen Punkt der Erdoberfläche ins Auge, dessen Meridian zur Ebene der Mondbahn gerade senkrecht steht, so ist dessen geographische Breite oder sein Abstand von dem irdischen Äquator gegen seinen Abstand von dem Durchschnittskreise der Mondbahn mit der Erde um jenen Winkel δ verschieden, welchen die Mondbahn mit dem Erdäquator bildet, und zwar je nachdem die eine Hälfte der Mondbahn über oder unter dem Äquator gelegen ist, um $-\delta$ oder $+\delta$.

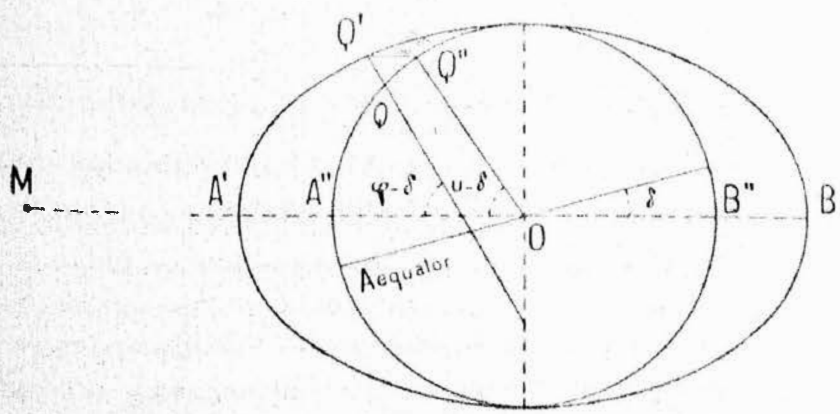

Fig. 2.

Es rückt daher die annähernd alle 12 Stunden auftretende Flutwelle dem Beobachtungsorte abwechselnd um δ^0 näher und um ebensoviel weiter vom Äquator.

Denkt man sich durch den gewählten Beobachtungsort den Meridianschnitt gelegt, so bildet dieser zur Zeit der Mondquatraturen einen Kreis mit dem Halbmesser R, zur Zeit der Mondkulminationen aber eine Ellipse mit den Halbachsen $a = R + H$ und $b = R$. Hat der Beobachtungsort Q' in der Ellipse die geographische Breite φ und entspricht ihm im Kreise der Punkt Q'' mit der «reduzierten» Breite u, so handelt es sich bei der Bestimmung der Amplitude der Lotschwankungen im Meridian um die Ermittlung des Unterschiedes zwischen der geographischen und «reduzierten» Breite, welcher der Ablenkung der Schwererichtung im Punkte Q gleichkommt, oder man kann, wenn die Breiten φ und u auf die Ebene der Mondbahn bezogen werden, eben so gut auch den Unterschied

$$(\varphi \mp \delta) - (u \mp \delta) = \varphi - u$$

ermitteln. — Aus den Theorien der höheren Geodäsie ist die Beziehung bekannt:

$$\operatorname{tg}(u \mp \delta) = \frac{b}{a} \operatorname{tg}(\varphi \mp \delta),$$

wobei sich sämmtliche in dieser Gleichung vorkommenden Größen auf die Flutellipse beziehen. Bildet man die Differenz der Tangenten der Winkel $\varphi \mp \delta$ und $u \mp \delta$, und setzt man für die Halbachsen die obigen Werte ein, so wird zunächst

$$\operatorname{tg}(\varphi \mp \delta) - \operatorname{tg}(u \mp \delta) = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \operatorname{tg}(\varphi \mp \delta)$$

und weiters mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\varphi - u = (\varphi \mp \delta) - (u \mp \delta):$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - u) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi \mp \delta) - \operatorname{tg}(u \mp \delta)}{1 + \operatorname{tg}(\varphi \mp \delta)\operatorname{tg}(u \mp \delta)} = \frac{a - b}{a} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi \mp \delta)}{1 + \frac{b}{a}\operatorname{tg}^2(\varphi \mp \delta)} =$$

$$= \frac{H \operatorname{tg}(\varphi \mp \delta)}{R\left[1 + \frac{H}{R} + \operatorname{tg}^2(\varphi \mp \delta)\right]}$$

oder wenn man für $\operatorname{tg}(\varphi - u)$ den Winkel und die Differenz $\varphi - u = \Delta\varphi$ in Sekunden ansetzt, sowie $H : R$ im Nenner unterdrückt, was unbedenklich geschehen kann:

$$\Delta\varphi'' = \varsigma'' \frac{H}{R} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varphi \mp \delta)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi \mp \delta)}$$

Um diesen Ausdruck der logarithmischen Behandlung zugänglicher zu machen, setzen wir für

$$\frac{\operatorname{tg}(\varphi \mp \delta)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi \mp \delta)} = \frac{\sin 2(\varphi \mp \delta)}{2}$$

und erhalten damit:

$$\Delta\varphi'' = \frac{\varsigma'' H}{2R} \sin 2(\varphi \mp \delta)$$

Führt man nun die Zahlenwerte für ς'', H und R ein, so wird allgemein:

$$\Delta\varphi'' = 0{\cdot}0088'' \sin 2(\varphi \mp \delta)$$

und speziell für die Polhöhe von Berlin:
$\varphi = 52^0\,30'$ und für die extremen Deklinationen des Mondes von $\delta = \mp 28^0\,30'$,

$$\triangle \varphi_1'' = 0{\cdot}0066''$$
$$\triangle \varphi_2'' = 0{\cdot}0027''$$

Hiebei entspricht $\triangle \varphi_1$ jenem Falle, für welchen die Flutwelle dem Beobachtungsorte am nächsten kommt, während $\triangle \varphi_2$ für den Fall der größten Entfernung der Flutwelle in Betracht kommt. Da der Mond alle möglichen Deklinationen zwischen $-\delta$ und $+\delta$ einnehmen kann, so wird für Orte einer bestimmten Zone auch der Wert $\varphi \mp \delta = 45^0$ eintreten, für welchen Fall das Maximum der Amplitude in meridionaler Richtung mit

$$\max \triangle \varphi'' = \varsigma'' \frac{H}{2\,R} = 0{\cdot}0088''$$

erhalten wird.

Die Amplitude im ersten Vertikal.

Zur Ermittlung der Lotschwankungen in Länge betrachten wir wieder die beiden, der Flut und Ebbe entsprechenden Ellipse in Fig. 1. In den Schnittpunkten P, die täglich zweimal um die Erde herumwandern, erscheint offenbar das Maximum der Lotablenkung, welche durch die Differenz der beiden Winkel ψ_1 und ψ_2 gegeben ist. Um diese Differenz zu erhalten, ermitteln wir aus den Gleichungen der beiden Ellipsen

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$
$$b^2 y^2 + a^2 x^2 = a^2 b^2$$

durch Differentiation die trigonometrischen Tangenten dieser Winkel nach der Formel:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{dx}{dy}$$

nämlich:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{a^2\,y}{b^2\,x} \qquad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{b^2\,y}{a^2\,x},$$

welche mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 45^0 = 1$$

übergehen in:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{a^2}{b^2} \qquad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{b^2}{a^2}$$

Bildet man die Differenzen:

$$\operatorname{tg} \psi_1 - \operatorname{tg} 45^0 = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$\operatorname{tg} 45^0 - \operatorname{tg} \psi_2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

und weiters:

$$\operatorname{tg} (\psi_1 - 45^0) = \frac{\operatorname{tg} \psi_1 - 1}{\operatorname{tg} \psi_1 + 1} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} (45^0 - \psi_2) = \frac{1 - \operatorname{tg} \psi_2}{1 + \operatorname{tg} \psi_2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

so resultiert mit Rücksicht auf die Kleinheit der Winkeldifferenzen $\psi_1 - 45^0 = 45^0 - \psi_2$:

$$\psi_1 - \psi_2 = \triangle \psi = 2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Für $a = R + H$ und $b = R$ wird unter Vernachlässigung der kleinen Glieder:

$$\triangle \psi'' = \varsigma'' \frac{2H}{R}$$

Dieser Ausdruck gilt für Orte in der Ebene der Mondbahn. Da für die Polhöhe φ, bezw. für die auf die Ebene der Mondbahn bezogenen Breiten $\varphi \mp \delta$ die in die Lotrichtung fallende Komponente der Fluthöhe gleich ist

$$H \cos^2 (\varphi \mp \delta),$$

weil nach Fig. 2:

$$Q' Q'' = A' A'' \cos (\varphi \mp \delta) = H \cos (\varphi \mp \delta)$$

und:

$$Q Q'' = Q' Q'' \cos (\varphi \mp \delta) = H \cos^2 (\varphi \mp \delta),$$

so geht der obige Ausdruck für einen unter der geographischen Breite φ gelegenen Beobachtungsort über in:

$$\triangle \psi'' = \varsigma'' \frac{2H}{R} \cos^2 (\varphi \mp \delta).$$

Diese Formel liefert für die Polhöhe von Berlin und für die extremen Mond-Deklinationen die Werte:

$$\triangle \psi_1'' = 0{\cdot}0295''$$
$$\triangle \psi_2'' = 0{\cdot}0009''.$$

Für den speziellen Fall, als $\varphi \mp \delta = 45^0$ wird, ergibt sich

$$\triangle \psi'' = \varsigma'' \frac{H}{R} = 2 \max \triangle \varphi'' = 0{\cdot}0176''.$$

Für Orte mit $\varphi \mp \delta = o$ tritt in äquatorialer Richtung die Maximal-Amplitude

$$\max \triangle \psi'' = 2 \varsigma'' \frac{H}{R} = 0\ 0352''$$

ein, die aber mit der Maximal-Amplitude im Meridiane an keinem Orte gleichzeitig bestehen kann.

Die absolute Amplitude.

Die Zusammensetzung beider Schwingungskomponenten $\triangle \varphi$ und $\triangle \psi$ liefern eine Total-Amplitude θ mit einem Azimute α, welche mittelst der Beziehungen

$$\triangle \varphi = \theta \cos \alpha$$
$$\triangle \psi = \theta \sin \alpha$$

wie folgt erhalten werden:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\triangle \psi}{\triangle \varphi} = 2 \operatorname{cotg} (\varphi \mp \delta)$$

$$\theta = \sqrt{\triangle \varphi^2 + \triangle \psi^2} = \triangle \varphi . \cos \alpha + \triangle \psi \sin \alpha.$$

Damit ergeben sich nachstehende Schlußresultate:

Die durch den Einfluß des Mondes in der Polhöhe von Berlin hervorgerufene Maximalamplitude der im Azimute α oszillierenden Lotrichtung, welche für den Fall der größten Annäherung der Flutwelle eintritt, ist:

$$\max \theta = \sqrt{\triangle \varphi_1^2 + \triangle \psi_1^2} = 0{\cdot}030'' \qquad \alpha = 77{\cdot}5^0$$

Die durch die Lunisolarwirkung erzeugte Amplitude ist annähernd um die Hälfte größer, als die von dem Monde allein herrührende; die infolge der hydrostatischen Gezeiten in der Lotrichtung von Berlin auftretenden Schwankungen können daher keine größeren Amplituden aufweisen als

$$\text{extr. max}\ \Theta = 0{\cdot}05''.$$

Hält man diesem Resultate die von Dr. Eggert in der «Zeitschrift für Verm.», 1905, S. 60, zusammengestellten, aus zehnjährigen Beobachtungen hervorgegangenen Daten gegenüber, welche im Mittel eine Hin- und Herbewegung der Lotrichtung mit einer Amplitude von 0·2'' ausweisen, so gelangt man zur Überzeugung, daß die hydrostatischen Gezeiten allein nicht ausreichen, die wahrgenommenen Störungserscheinungen zur Gänze aufzuklären, daß vielmehr noch andere, störend wirkende Ursachen daran Teil haben müssen, zu denen die eingangs erwähnten meridionalen Massentransporte, die ungleiche Luftdruckverteilung, namentlich aber die Wärmebewegungen in nicht unwesentlichem Maße zu rechnen sind.

Zur Geschichte der Schweremessungen.

Zu einem Vortrage zusammengestellt von **Dr. Hans Löschner**, k. k. Statthalterei-Ingenieur in Graz.

Schwere ist bekanntlich die Kraft, welche die Massenpunkte der Körper nach der Erde hin beschleunigt.

Die exakten Schwerebestimmungen mit Benützung des Pendels gehören heute zu den Arbeiten der im Jahre 1886 aus der «Europäischen Gradmessung» durch Beitritt außereuropäischer Staaten hervorgegangenen «Internationalen Erdmessung», weil ihre Ergebnisse sowohl bei den Untersuchungen über die mathematische Erdform, das Geoid, als auch bei der genauen Reduktion der über ganze Erdteile vorgenommenen Präzisions-Nivellements eine bedeutende Rolle spielen.

Die Erde kann aufgefaßt werden als ein um eine Axe sich drehender Körper von nahezu ellipsoidischer Oberflächengestaltung, auf welchem jeder Punkt dem Einflusse der Fliehkraft und Schwerkraft unterworfen ist. Die Wirkung dieser beiden Kräfte läßt sich durch ihr kombiniertes Potential, die Kräftefunktion W ausdrücken.[1]) Der geometrische Ort der Punkte gleichen Potentials heißt Niveaufläche der Kräftefunktion oder kurz Niveaufläche. Diese hat somit die Gleichung:

$$W = \text{Konstante.}$$

Die Niveauflächen der Erdrinde sind geschlossene, stetige, von Kanten und Ecken freie Flächen, welche einander schalenförmig umschließen und in ihrer Gestalt sich nur wenig von einem Ellipsoid unterscheiden. Von je zwei solchen Flächen gehört zu der inneren der größere Wert von W. Die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen, die sog. Kraftlinien, haben die Eigenschaft, daß die Tangente in jedem Punkte die Richtung der Schwere angibt.

[1]) Näheres in Helmert, die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, II, 1884, Seite 8.