Paper-ID: VGI_190703

Graphische Bestimmung der tachymetrischen Elemente D und H

A. Adler [1]

[1] *k.k. Professor an der Staatsrealschule im 6. Bezirke Wiens, Privatdozent an der technischen Hochschule*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **5** (1–2), S. 8–12

1907

BibTeX:

```
@ARTICLE{Adler_VGI_190703,
Title = {Graphische Bestimmung der tachymetrischen Elemente D und H},
Author = {Adler, A.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {8--12},
Number = {1--2},
Year = {1907},
Volume = {5}
}
```

$$-\frac{dW}{dh}=g,$$

worin dh, als die Änderung in der Länge des Radiusvektors, negativ oder positiv in Rechnung zu stellen ist, je nachdem W zu- oder abnimmt, so daß für einen Punkt der Erdoberfläche dh, als das von der Erdoberfläche aufwärts gerichtete Element der Lotrichtung, einen Höhenunterschied oder die Erhebung über den Meereshorizont bedeutet. Die Gleichung

$$-dW=g.dh$$

besagt daher, daß die Änderung des Potentials, welche bei einer Erhebung um dh eintritt, gleich ist dem Produkte aus der Schwerebeschleunigung g und dem Höhenunterschiede dh. Die Änderung des Potentials bei Erhebung von dem Punkte A mit dem Potentiale W_A bis zu dem Punkte B mit dem Potentiale W_B um die Höhe AB = H ist sohin gegeben durch die Differenz

$$W_B-W_A=-\int_A^B g.dh$$

oder

$$W_A-W_B=\int_A^B g.dh=\Delta W.$$

(Schluß folgt.)

Graphische Bestimmung

der tachymetrischen Elemente D und H.

Von **A. Adler**, k. k. Professor an der Staatsrealschule im 6. Bezirke Wiens, Privatdozent an der technischen Hochschule.

Die Horizontaldistanz D und die Höhe H eines anvisierten Ortes werden bekanntlich aus den Gleichungen

$$D=CL\cos^2\varphi,$$
$$H=\frac{CL}{2}\sin\varphi$$

gefunden, wobei L die Lattenablesung, φ der Vertikalwinkel und C die Konstante des Instrumentes sind; es wurden, wie man weiß, bereits eine große Anzahl von Methoden*) angegeben, D und H aus L und φ auf möglichst bequemen Wege zu finden.

Im folgenden soll ein neuer, besonders einfacher Weg angegeben werden, auf welchem man dieses Ziel auch erreicht; ihm folgend, kann man nicht nur D und H graphisch bestimmen, graphische Tafeln anfertigen, sondern auch ein selbsttätiges Instrument konstruieren, welches einfacher zu sein scheint, als die bisher zu diesem Zwecke ausgeführten.*)

---

*) Siehe: Hartner-Doležal: Lehr- und Handbuch der niederen Geodäsie 2. Band, Wien 1905.

1. Begriff einer Funktionsskala.*)

Wenn zu den Punkten einer Geraden g Zahlen z nach irgend einem Gesetze geschrieben sind, so entsteht eine Skala. Die gerade Linie heißt der Träger der Skala und die notwendigerweise bestehende Gleichung

$$s = f(z)$$

die Gleichung der Skala; dabei bedeuten: z jene Zahl, die bei dem beliebigen Punkte P steht (Fig. 1); und s die Maßzahl des Abstandes dieses Punktes von

Fig. 1.

einem fest angenommenen, übrigens beliebigen Punkte O des Trägers. Die Zahl s ändert sich, wenn die Strecke OP mit einer anderen Einheit gemessen wird; man schreibt daher vorteilhafter die Gleichung in der Form

$$s = m\,f(z)$$

wobei der Modulus m durch die angenomme Einheit bestimmt wird.

Die einfachste Skala ist durch die Gleichung $s = m.z$ gegeben, es ist dies die gewöhnliche, gemeine Skala; Skalen mit der Gleichung $s = m \log z$ kommen auf dem logarithmischen Rechenschieber vor; im folgenden wird die Skala mit der Gleichung

$$s = m\sqrt{z}$$

eine Hauptrolle spielen.

Wir wollen sie daher zunächst näher betrachten.

2. Quadratwurzelskala.

Auf der Geraden g sei eine Skala mit der Gleichung $s = m\sqrt{z}$ zu konstruieren; es handelt sich zunächst um die Bestimmung des Modulus m; dann muß noch das Interpolieren einer derartigen Skala betrachtet werden:

a) Gegeben sei die größte Zahl Z, welche auf der Skala vorkommen soll und außerdem die Länge L des ganzen Trägers (Fig. 2).

Fig. 2.

Es ist dann $L = m\sqrt{Z}$, daraus ergibt sich der Modulus

$$m = \frac{L}{\sqrt{Z}};$$ sind z. B. $Z = 225$ und $L = 450$ *mm*, dann ist

$m = 30$ und die Gleichung der Skala lautet:

$$s = 30\sqrt{z}.$$

b) A und B seien zwei beliebige Punkte von g, a und b die dazu gehörigen Zahlen der Quadratwurzelskala, welche auf g gezeichnet wurde. Es ist dann:

---

*) Siehe des Näheren: A. Adler, Zur graphischen Auswertung der Funktionen mehrerer Veränderlichen. Wiener Akademie, 1886.

$$OA = m\sqrt{a}$$
$$OB = m\sqrt{b}$$
also $$AB = m(\sqrt{b} - \sqrt{a});$$

P sei nun ein beliebiger Punkt innerhalb der Strecke AB, die dazugehörige Zahl x der Skala ist zu bestimmen.

Verhält sich
$$AP : AB = p ; q,$$
so findet man aus der Gleichung der Skala für
$$x = \frac{\overline{OP}^2}{m^2} = \left(\frac{OA}{m} + \frac{p}{q}\frac{AB}{m}\right)^2 = \left(\sqrt{a} + \frac{p}{q}\left[\sqrt{b} - \sqrt{a}\right]\right)^2$$

Durch Interpolieren würde man erhalten die Zahl:
$$x_1 = a + \frac{p}{q}(b - a).$$

Der Unterschied beider Zahlen ist der Fehler f der Interpolation; man findet durch eine einfache Rechnung für f den Ausdruck
$$f = \frac{p(q-p)}{q^2}(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$$
wobei q gleich 10 ist und p eine ganze Zahl kleiner als 10 angibt.

Der größte Wert, den $\frac{p(q-p)}{q^2}$ annehmen kann, ist daher $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, also ist
$$f_{max} = \frac{1}{4}(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4\,m^2} \quad \text{. . . . . 2)}$$

Ist wie oben m = 30, so wird
$$f_{max} = \frac{\overline{AB}^2}{3600}$$
man erkennt daraus, daß selbst für AB = 18 *mm* der Interpolationsfehler kleiner als 0·1 wird; daß man also die Quadratwurzelskala innerhalb beträchtlicher Strecken wie eine gemeine Skala interpolieren kann.

c) Zwei Quadratwurzelskalen eißen kongruent, wenn sie genau dieselbe Gleichung haben, also auch denselben Modulus; zwei Skalen von verschiedenem Modulus sind nicht kongruent, sondern ähnlich.

3. Bestimmung von D und H.

a) Es sei nun (Fig. 3) auf der um O drehbaren Geraden g eine Quadratwurzelskala S_1 angebracht und auf der horizontalen Geraden h (im beliebigen Abstande von O) eine zu S_1 kongruente Skala S_2 so, daß die Nullpunkte O und O' vertikal übereinander liegen.

Zu dem beliebigen Punkte P von S_1 gehöre die Zahl z, zu seiner Projektion P' auf S_2 die Zahl z'; es ist dann
$$\overline{O'P'} = \overline{OP} \,.\, \cos\varphi$$
da aber $\overline{OP} = m\sqrt{z}$, $\overline{O'P'} = m\sqrt{z'}$ ist, so ergibt sich
$$z' = z\cos^2\varphi \quad \text{. . . . . 3)}$$
es ist also z = CL, so ist $z' = CL\cos^2\varphi = D$.

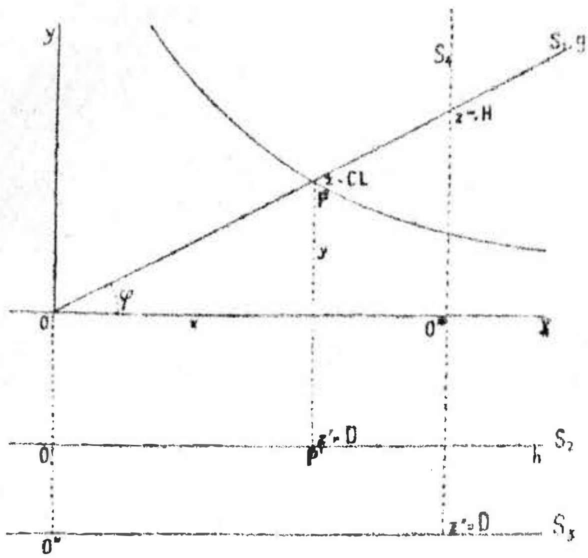

Fig. 3.

Die Horizontaldistanz kann also auf das einfachste bestimmt werden: Man hat auf g nur die Zahl CL aufzusuchen und die entsprechende Zahl z' von S_2 abzulesen.

b) Zur Bestimmung von H kann man einen der folgenden zwei Wege einschlagen:

α) Auf einer zu S_2 parallelen Geraden sei eine gemeine Skala S_3 von beliebigem Modulus angebracht, so aber, daß ihr Nullpunkt O* in eine Vertikale mit O' und O zu liegen kommt; endlich sei eine vierte zu S_3 kongruente Skala S_4 so angebracht, daß ihr Träger senkrecht zu S_3 verschoben werden kann, ihr Nullpunkt O''' aber immer auf der Horizontalen durch O zu bleibt.

Geht S_4 durch den Punkt mit der Zahl z'' von S_3, so wird von g auf S_4 eine Zahl z''' herausgeschnitten, für welche

$$z''' = z'' \operatorname{tg} \varphi \text{ ist.}$$

Um also die Höhe H zu finden, hat man nur die bewegliche Skala S_4 auf den Punkt mit der Zahl D der Skala S_3 einzustellen und auf S_4 die von g bestimmte Zahl abzulesen.

Die Skalen S_2 und S_3 können beliebigen Abstand von einander haben, ihre Träger können auch zusammenfallen, die erste Skala dann auf der einen Seite der Geraden, die zweite auf der anderen Seite gezeichnet sein; die bewegliche Skala S_4 kann auch verwendet werden, um aus Punkt P den Punkt P', also aus CL die Größe D zu finden.

β) Noch ein zweiter einfacher Weg zur Bestimmung von H soll angegeben werden:

Wir legen der Figur 3 ein rechtwinkeliges Koordinatensystem zu Grunde mit O als Ursprung, die Koordinaten des Punktes P seien x und y.

Est is dann $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

da aber in Skala S_1: $OP = m\sqrt{CL}$ ist,

so ergibt sich:

$$CL = \frac{\overline{OP}^2}{m^2} = \frac{x^2 + y^2}{m^2}.$$

Setzt man diese Werte in $H = \frac{Cl}{2}\sin 2\varphi$ ein,

so erhält man

$$H = \frac{xy}{m^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

d. h. für konstantes H liegen die Punkte P auf der gleichseitigen Hyperbel:

$$xy = m^2H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Setzt man in diese Gleichung für H aufeinanfolgende, passende Worte, konstruiert die entsprechenden Hyperbeln und schreibt den entsprechenden Wert von H zu jeder dieser Kurven hinzu, so erhält man ein Graphikon, welches recht vorteilhaft zur Bestimmung von H und auch D benützt werden kann:

Man hat nur die Skala S_1 auf den ri htigen Winkel φ einzustellen (was auch vom Instrumente selbst geleistet werden kann) und die Zahl CL auf S_1 aufzusuchen; die vertikal darunter stehende Zahl von S_2 gibt schon das gesuchte D, die Zahl des durch CL gehenden Hyperbel die gesuchte Höhe H.

Schlußwort. Auf Grund des Angegebenen lassen sich graphische Tafeln zur Bestimmung von D und H konstruieren; man kann aber auch, fußend auf denselben Gedanken, Instrumente bauen, welche dasselbe leisten. Diese Graphikons, namentlich aber derartige neue Instrumente dürften den bisherigen gegenüber größere Einfachheit besitzen.

Die Ausführung der dazu verwendbaren Quadratwurzelskalen bietet, wie eine nähere Untersuchung lehrt, keine Schwierigkeiten; wie aus Nr. 2 b folgt, kann die Interpolation einer derartigen Skala mit gewünschter Genauigkeit bewerkstelligt werden.

Skizze zur Geschichte der Tachymetrie.

Zu einem Vortrage zusammengestellt von Statthalterei-Ingenieur **Dr. Hans Löschner.**

Tachymetrie oder (nach dem Französischen und Englischen) Tacheometrie heißt Schnellmeßkunst.[1]) Dieser Name deutet auf eine Aufnahmsmethode, welche

[1]) ταχύς schnell; μέτρον Maß.