Genauigkeit und Prüfung einer stereophotogrammetrischen Aufnahme

Eduard Doležal [1]

[1] *o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **5** (11–12, 13–14, 15–16), S. 167–178, 223–229, 254–264

1907

theoretische und praktische Kenntnisse aus dem betreffenden Lehrfache nebst einer entsprechenden wissenschaftlichen, praktischen und lehrämtlichen Betätigung zu verlangen.

Die vollständige Beherrschung des Faches muß aber natürlich die Hauptsache sein und daher wäre es im Interesse der Schule, der Wissenschaft und des Unterrichtes tief zu beklagen, wenn bei der Besetzung der Lehrstellen für Geodäsie und Markscheidekunde an den montanistischen Hochschulen die montanistische Vorbildung höher, a's die geodätische Ausbildung eingeschätzt werden würde!

Wien, 20. April 1907 *Dr. Franz Lorber.*

*

Anmerkung der Redaktion. Die Redaktion war bereits entschlossen, eine Erwiderung auf den sehr merkwürdigen Artikel in Nr 7 vom 1. April 1907 der »Mitteilungen des Verbandes der Bergbau-Betriebsleiter« erscheinen zu lassen, als uns vorstehende vollkommen zutreffenden und bei aller Entschiedenheit dennoch äußerst maßvollen Ausführungen des Herrn Prof. Dr. F. Lorber zukamen. Wir wollen nur hinzufügen, daß es von dem unbekannten Verfasser fair gewesen wäre, für seine persönlichen Angriffe mit offenem Visier einzutreten. Wir bedauern es lebhaft, daß ein so unverhüllter Versuch eines Druckes auf die Professoren-Kollegien der montanistischen Hochschulen unternommen wurde und hoffen, daß das hohe Ackerbau-Ministerium die einseitigen Ausführungen des unbekannten Verfassers richtig einschätzen und sich bei der Besetzung der Lehrkanzeln für Geodäsie und Markscheidekunde nur von den wirklichen Interessen der Hochschulen leiten lassen wird.

Doležal.

Genauigkeit und Prüfung einer stereophotogrammetrischen Aufnahme.

Von Eduard Doležal, o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

I. Methoden der photographischen Meßkunst.

Unter den in der praktischen Geometrie bekannten Methoden der Vermessung räumlicher Gegenstände sind es insbesondere zwei, bei welchen photogrammetrische Meßinstrumente mit großem Vorteile verwendet werden können. Es ist dies die Standlinien- und Koordinaten-Methode.

Beide Methoden bestehen darin, in zwei der Entfernung nach bekannten Punkten, Endpunkten einer Standlinie oder Basis, bei vertikaler oder geneigter Lage der Bildebene zwei im Raume orientierte perspektivische Bilder auf photographischem Wege, Photogramme, herzustellen. Aus den auf die Horizontal- und Vertikallinie jeder photographischen Platte als Achsensystem bezogenen Koordinaten der Bildpunkte, Bildkoordinaten, lassen sich aus je zwei auf beiden Platten (Bildern) liegenden korrespondierenden (identen) Punkten die Neigungswinkel ihrer Visierstrahlen gegen die Grundlinie und die Vertikalwinkel derselben rechnerisch und graphisch ableiten und auf diese Weise nach der Standlinien-Methode die Punkte im Raume in Bezug auf Situation und Höhenlage festlegen; oder aber es lassen sich aus einem Bilde die Abszisse und Ordinate eines jeden Punktes ausmessen und unter der Voraussetzung, daß die zweite Bildebene mit der ersten in einer Ebene liegt, aus dieser die Horizontal-Parallaxe entnehmen. Aus der gemessenen Abszisse und Ordinate des ersten Bildes und der gemessenen Horizontal-Parallaxe des zweiten Bildes ist man imstande, die rechtwinkeligen

Raumkoordinaten eines jeden Punktes im Raume in Bezug auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, sowohl rechnerisch als graphisch abzuleiten, wobei der Ursprung des Koordinatensystemes der Anfangspunkt der Basis, die x-Achse mit der horizontalen Basis, die übrigen zwei Achsen auf der letzteren senkrecht stehen und eine derselben eine vertikale Lage hat.

1. Photogrammetrische Methode (Standlinen-Methode).

Dieses Verfahren, welches in Kürze angeführt werden soll, umfaßt (Fig. 1):

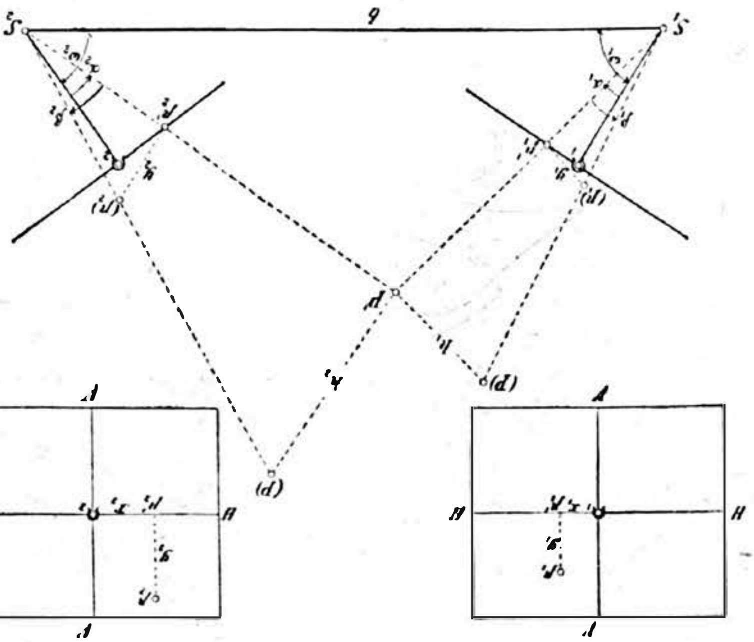

Fig. 1.

a) Feldarbeiten:

1. Messung der Basis $S_1 S_2 = b$;
2. Messung der Orientierungswinkel ω_1 ω_2, und
3. Ausführung der photographischen Aufnahme.

b) Hausarbeiten.

1. Ausmessung der Bildkoordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 von identen oder korrespondierenden Punkten mittels eines Photogramm-Koordinatometers;
2. Bestimmung der Horizontalwinkel α_1, α_2 und der Vertikalwinkel β_1, β_2 und zwar entweder durch Konstruktion oder Rechnung und
3. Ermittlung der Situation P' des Raumpunktes mittels der Horizontalwinkel $\omega_1 - \alpha_1$, und $\omega_2 - \alpha_2$, sowie der relativen Höhen h_1, h_2 über den Stationen S_1 und S_2; die durch Konstruktion oder Rechnung bestimmte Lage und Höhe eines Punktes kann einfach kontrolliert werden.

Diese mit einem photogrammetrischen Instrumente ausgeführte Standlinienmethode, welche bisher auch die photogrammetrische Methode schlechtweg genannt wurde, läßt sich leicht und einfach ausführen; sie ist brauchbar, liefert gute Resultate und kann stets dann angewendet werden, wenn die aufzunehmenden Punkte von beiden Stationen gesehen werden. Hiebei kann die Festlegung nur von solchen Punkten mit hinlänglicher Genauigkeit erfolgen, für welche die verwendete Basis eine genügende Länge hat, die identen Punkte auf beiden Photogrammen leicht und unzweideutig sicher erkannt werden und die Ausmessung der Bildkoordinaten mit Sicherheit und Schärfe vorgenommen werden kann.

Diese Bedingung kann bei Aufnahmen bestimmter Objekte im Raume, wie bei Architekturen, Baudenkmälern u. s. w. leicht erfüllt werden.

Bei Terrainaufnahmen stößt das Vorhandensein dieser Bedingung je nach der Beschaffenheit des Terrains, insbesonders wenn es reich differenziert ist, auf Schwierigkeiten, da es nicht möglich ist, bei Anwendung einer größeren Basis idente Punkte aufzufinden oder die Bildkoordinaten mit Sicherheit zu bestimmen.

In diesem Falle ist man genötigt, eine kürzere Basis zu wählen, dieselbe mit großer Genauigkeit direkt oder indirekt zu messen und die photographischen Aufnahmen in den Endpunkten so auszuführen, daß die Bildebenen parallel zur Basis und als zusammenfallend angenommen werden können. Dadurch, daß noch das stereoskopische Sehen ausgewertet wird, kommt man auf die folgende

2. Stereophotogrammetrische Methode (Koordinaten-Methode).

Indem man nach diesem Verfahren die rechtwinkeligen Koordinaten im Raume mittels des photogrammetrischen Instrumentes ermittelt, wird diese Koordinaten-Methode, wo die beiden Basisbilder ein stereoskopisches Bild liefern, auch Stereophotogrammetrie genannt.

Diese stereophotogrammetrische Methode besteht darin, daß man die beiden Orientierungswinkel $\omega_1 = \omega_2 = 90^0$ macht, wodurch die beiden Bildebenen in eine und dieselbe Ebene zu liegen kommen. (Fig. 2).

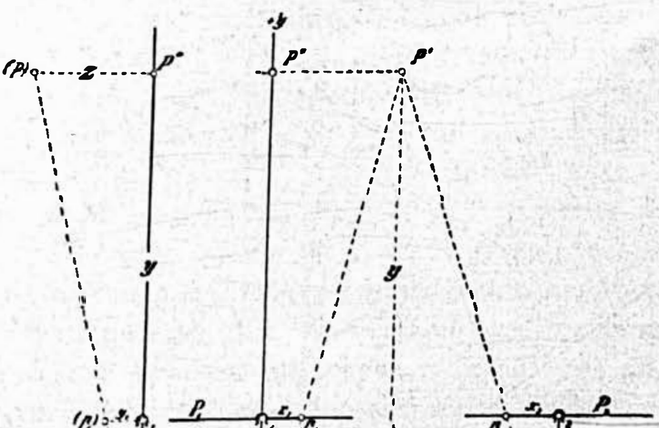

Fig. 2.

In diesem Falle lassen sich die räumlichen Koordinaten X, Y, Z des Punktes P, wie folgt, ermitteln.

Aus den ähnlichen Dreiecken $S_1 \mathfrak{Q}_1 p_1$ und $S_1 P' Q$, sowie $S_2 \mathfrak{Q}_2 p_2$ und $S_2 P' Q$ folgt:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 : f = X : Y \\ x_2 : f = (b - X) : Y \end{array}\right\},$$

aus welchen Proportionen unmittelbar die ebenen Koordinaten X und Y, welche die Situation des Punktes P' geben, sich bestimmen;

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{b}{x_1 + x_2}\, x_1 \\ Y &= \frac{b}{x_1 + x_2}\, f \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Ist $P' P''$ parallel zur Basis $S_1 S_2$, und denkt man sich den Bildpunkt p_1 im Raume, sowie den Raumpunkt P auf die Hauptvertikalebene der ersten Station S_1 projiziert und dann um die Trasse $S_1 P''$ in die Zeichenebene umgelegt, wobei die Umlegung in der Fig. 2 seitlich links gezeichnet erscheint, so ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken $S_1 \Omega_1 (p_1)$ und $S_1 P'' (P)$ die Proportion:

$$Z : y_1 = Y : f,$$

daher

$$Z = \frac{Y}{f}\, y_1 = \frac{b}{x_1 + x_2}\, y_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

In Fig. 2 ist das Qualitätszeichen von x_1 positiv, während x_2 ein negatives Qualitätszeichen besitzt. Die algebraische Differenz der Abszissen, d. i.

$$(+ x_1) - (- x_2) = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

wird die stereoskopische Horizontal-Parallaxe genannt, welche konsequent in vorstehender Weise angesetzt wird, so daß beide Abszissen mit dem ihnen zugehörenden Qualitätszeichen einzuführen sind.

Berücksichtigt man die Horizontal-Parallaxe a, so werden nach Einführung ihres Wertes in die Gleichungen 1) und 2) die Raumkoordinaten eines Punktes die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{b}{a}\, x_1 \\ Y &= \frac{b}{a}\, f \\ Z &= \frac{b}{a}\, y_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I})$$

Um die Raumkoordinaten berechnen oder auf graphischem Wege erhalten zu können, ist es unter der Voraussetzung, daß die Länge der Basis b bekannt ist, notwendig, die Größen: x_1, y_1 und a zu bestimmen.

Die beiden Basisbilder stellen stereoskopische Halbbilder vor und lassen eine bequeme Betrachtung des plastischen Bildes im Telestereoskope zu.

Dr. Pulfrich, wissenschaftlicher Mitarbeiter der Zeißwerke in Jena, hat einen Apparat angegeben, von ihm Stereokomparator genannt, der mittels eines binokularen Mikroskopes die richtig in den Apparat eingelegten (adjustierten) Basis-Stereophotogramme zu einem Raumbilde vereinigt und dieses in seiner plastischen Wirkung wie ein Modell zu betrachten gestattet. Besondere Einrichtungen ermöglichen, die Bilderkoordinaten des linken Bildes x_1 und y_1 sowie die stereoskopische Horizontal-Parallaxe a mit Schärfe auszumessen.

Da die Ausmessung der algebraischen Abzissendifferenz identer Punkte, der stereoskopischen Horizontal-Parallaxe, auf den zusammengehörenden Stereophotogrammen mittels einer Feinschraube, der Parallaxenschraube, sich auf das stereoskopische Sehen stützt und auf Stereophotogrammen vorgenommen wird, so wäre wohl die Benennung des schönen Pulfrich'schen Stereokomparators als Stereogramm-Koordinatometer bezeichnender.

Bezüglich der näheren Einrichtung und des Gebrauches des Stereogramm-Koordinatometers von Pulfrich sei auf folgende Publikationen verwiesen:

1. Baron A. Hübl: «Die stereophotogrammetrische Terrainaufnahme» in den Mitteilungen des k. u. k. militärgeographischen Institutes, XXIII. Band 1904.
2. Dr. Pulfrich: «Über neuere Anwendungen der Stereoskopie und über einen hiefür bestimmten Stereo-Komparator» in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1902.
3. Dr. A. Schell: Die stereophotogrammetrische Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume, Wien, bei Seidel & Sohn, 1904.

Die Genaugkeit in der Ausmessung des linken Stereogrammes ist auf Maßstäben durch den mittleren Fehler $\triangle x_1 = \triangle y_1 = \pm 0{\cdot}1$ mm gegeben, während die Feinschraube zur Bestimmung der stereoskopischen Horizontal-Parallaxe zufolge der sicheren Einstellung, die im stereoskopischen Sehen begründet ist, eine Schärfe von $\triangle a = \pm 0{\cdot}01$ mm bietet.

Was die Arbeiten bei Ausführung einer stereophotogrammetrischen Aufnahme betrifft, so hat man zu unterscheiden:

a) Feldarbeiten:

1. Messung der Basis;
2. richtige Aufstellung der Instrumente in den Endpunkten der Basis, insbesondere in der zweiten Station, und zwar so, daß die beiden Platten P_1 und P_2 in einer Ebene liegen und
3. Ausführung des photographischen Teiles der Aufnahme.

b) Hausarbeiten:

1. Nach Entwicklung und Fixierung der Stereophotogramme erfolgt die Ausmessung der Bildkoordinaten x_1 und y_1 des linken Bildes und die Messung der stereoskopischen Horizontal-Parallaxe a;
2. Bestimmung der Raumkoordinaten X, Y, Z entweder durch Konstruktion, auf mechanischem Wege oder durch Rechnung und
3. Herstellung des Planes.

Die stereophotogrammetrische Aufnahme zeigt im Vergleiche mit der gewöhnlichen Photogrammetrie eine Reihe von Vorteilen und zwar:

1. Zufolge der kurzen Basis werden Photogramme von gleichem Inhalte erzielt;
2. die mühsame, zeitraubende und lästige Punktidentifizierung entfällt;
3. an die photographischen Bilder werden bezüglich der technischen Vollkommenheit keine so hohen Bedingungen gestellt wie bei der gewöhnlichen Photogrammetrie;
4. die ebenen Photogramme der gewöhnlichen photogrammetrischen Aufnahmen werden durch Stereogramme ersetzt, die im Stereoskope ein Raumbild liefern, an dem bequem und sicher Messungen vorgenommen werden können, und
5. im Stereogramm-Koordinatometer (Stereokomparator) können die Terrainformen und -gliederungen wie auf einem Modelle studiert werden, wodurch die richtige und naturtreue Wiedergabe der aufgenommenen Terrainpartie wesentlich gefördert wird.

Die angeführten großen Vorteile der Stereophotogrammetrie wurden im k. u. k. militärgeographischen Institute zu Wien von Baron Hübl wohl erkannt und bei Aufnahmen im Hochgebirge mit großem Nutzen verwertet.

Die Bestrebungen des Obersten v. Hübl fanden bei dem Kommandanten des erwähnten Institutes, General Frank, die weiteste Förderung und mit Freude und Genugtung können wir erklären, daß die phototopographischen Arbeiten unseres militärgeographischen Institutes rationell betrieben werden und mustergiltig sind, so daß Österreich in dieser Beziehung an der Spitze aller Staaten steht.

In der Sommercampagne 1906 wurden 600 km² im Hochgebirge von Tirol stereophotogrammetrisch aufgenommen und heute ist dieses Materiale bereits verarbeitet und bewundernd betrachtet man im Konstruktionssaale die überraschend naturtreue Wiedergabe des Terrains in der gezeichneten Karte.

Hauptmann S. Truck hat im Sommer 1906 eingehende Versuche über die Verwendung der Stereophotogrammetrie für Eisenbahnvorarbeiten angestellt; seinen Bemühungen durch Wort und Schrift ist es zu danken, daß sich Interessenten gefunden haben, welche die Vorteile der Stereophotogrammetrie in dieser Richtung auszunützen beabsichtigen.

Jeder, der sich praktisch mit photogrammetrischen Aufnahmen nach dem alten Verfahren (Standlinienmethode) intensiv beschäftigt hat und seine Nachteile kennt, hingegen das Wesen der Stereo-Photogrammetrie richtig erfaßt hat, wird, die erwähnten bedeutenden Vorteile würdigend, in der Stereophotogrammetrie eine große Förderin der photographischen Meßkunst begrüßen.

Heute ist die Stereophotogrammetrie für topographische Zwecke und für Terrainaufnahmen zu Ingenieurzwecken erprobt, sie hat bereits auch in andern Wissenszweigen namhafte Erfolge zu verzeichnen und es steht außer allem Zweifel, daß ihr auch für die Architekturaufnahmen die beste Prognose gestellt werden kann.

Die Stereophotogrammetrie wird der Denkmalpflege gewiß vorzügliche Dienste leisten und es wäre ein vollkommenes Verkennen ihrer Leistungsfähigkeit, wenn man ihr im Dienste der Denkmalpflege und des Denkmälerarchives nicht jene Stellung einräumen würde, die ihr gebührt.

II. Genauigkeit der Raumkoordinaten bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen.

Die stereophotogrammetrisch bestimmten rechtwinkeligen Koordinaten eines Raumpunktes lauten:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{b}{a}\,x_1 \\ Y &= \frac{b}{a}\,f \\ Z &= \frac{b}{a}\,y_1 \end{aligned}\right\} ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

sind nun die mit dem Stereogramm-Koordinatometer gemessenen Größen: x_1, y_1 und a mit den mittleren Fehlern $\pm\Delta x_1$, $\pm\Delta y_1$ und $\pm\Delta a$ behaftet und bezeichnen weiters $\pm \Delta b$ und $\pm \Delta f$ die mittleren Fehler der Basis und der Bilddistanz, so ergeben sich die mittleren Fehler der Raumkoordinaten nach einem bekannten Satze der Methode der kleinsten Quadrate aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial b}\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial a}\Delta a\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2} \\ \Delta Y &= \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial b}\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\Delta a\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial f}\Delta f\right)^2} \\ \Delta Z &= \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial b}\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial a}\Delta a\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots .5)$$

Die im mittleren Fehler für X auftretenden partiellen Differentialquotienten ergeben sich aus der obersten der Gleichungen 4) mit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial b} &= \frac{x_1}{a} = \frac{X}{b} \\ \frac{\partial X}{\partial a} &= -\frac{b x_1}{a^2} = -\frac{X}{a} \\ \frac{\partial X}{\partial x_1} &= \frac{b}{a} = \frac{X}{x_1} \end{aligned}\right\},$$

so daß der mittlere absolute Fehler in X in doppelter Form erscheint.

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= \sqrt{\left(\frac{x}{a}\Delta b\right)^2+\left(\frac{b x_1}{a^2}\Delta a\right)^2+\left(\frac{b}{a}\Delta x_1\right)^2} \\ &= X\sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2} \\ &\text{und der relative Fehler wird sein:} \\ \frac{\Delta X}{X} &= \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \text{II)}$$

In analoger Weise können nun die absoluten und relativen Fehler für die Raumkoordinaten Y und Z berechnet werden; wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \Delta Y &= \sqrt{\left(\frac{f}{a}\Delta b\right)^2+\left(\frac{bf}{a^2}\Delta a\right)^2+\left(\frac{b}{a}\Delta f\right)^2} \\ &= Y\sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2} \\ \text{und} \quad \frac{\Delta Y}{Y} &= \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2} \end{aligned}\right\}; \quad \ldots \text{III)}$$

weiters

$$\left.\begin{aligned} \Delta Z &= \sqrt{\left(\frac{y_1}{a}\Delta b\right)^2+\left(\frac{b y_1}{a^2}\Delta a\right)^2+\left(\frac{b}{a}\Delta y_1\right)^2} \\ &= Z\sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta y_1}{y_1}\right)^2} \\ \text{und} \quad \frac{\Delta Z}{Z} &= \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2+\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta y_1}{y_1}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \text{IV)}$$

Will man eine klare Vorstellung von den mittleren Fehlern der Raumkoordinaten gewinnen, so ist es nach den vorstehend abgeleiteten Formeln unbedingt notwendig, daß man sich über die mittleren absoluten und relativen Fehler in der Basis b, in den Bildkoordinaten x_1 und y_1, in der Horizontal-Parallaxe a und in der Brennweite f volle Klarheit verschafft.

1. Der mittlere Fehler der Basis. Die Basis b kann direkt oder indirekt gemessen werden. Die direkte Messung derselben gibt für den mittleren absoluten zu befürchtenden Fehler zufolge des Quadratwurzelgesetzes der direkten Längenmessung:

$$\triangle b = \mu \sqrt{b},$$

wobei der Koeffizient μ die Änderung für die Längeneinheit bedeutet, und zwar:

für die Meßlatten . . . . . $\mu = 0{\cdot}001$
„ das Stahlband . . . . . $\mu = 0{\cdot}005$.

Mit solchen Mitteln, sorgfältige Messung vorausgesetzt, fällt es wohl nicht schwer, die Basis auf ein Tausendtel ihrer Länge scharf zu erhalten, so daß der relative Fehler wird:

$$\frac{\triangle b}{b} \leqq \frac{1}{1000}.$$

Wird die Basis indirekt, und zwar auf optischem Wege ermittelt, so könnte eine der bekannten Methoden der optischen Distanzmessung, welche die geforderte Genauigkeit bietet, Verwendung finden. Nach reiflicher Überlegung der Nebenumstände bei der stereophotogrammetrischen Aufnahme kommt man zu dem Schlusse, daß es sich empfiehlt, die trigonometrische Bestimmung mittels eines Okularfilar-Schraubenmikrometers bei Benützung einer horizontalen Latte zu verwenden.

Es sei uns gestattet, den Beweis zu führen, daß diese Art der optischen Distanzmessung eine Genauigkeit der Distanz auf $\frac{1}{1000}$ gewährleistet.

Denken wir uns in Fig 3. in dem Basisendpunkte A ein Instrument mit einem optischen Distanzmesser versehen, und in dem zweiten Endpunkte B der Basis eine horizontale Distanzlatte normal zur Basis AB aufgestellt, dann ergibt sich die Basis AB = b auf Grund der Distanzgleichung:

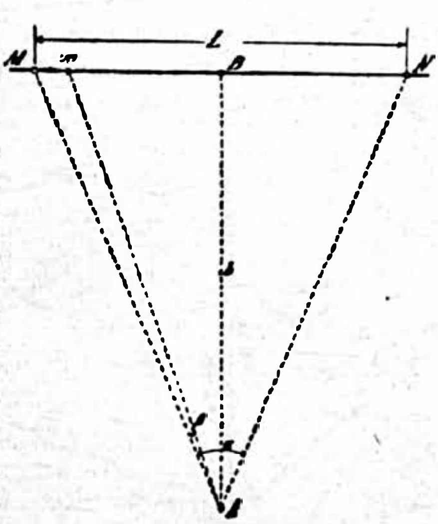

Fig. 3.

$$b = K \frac{L}{S'}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

wobei K die Konstante des Distanzmessers,
L den Lattenabschnitt zwischen dem fixen und beweglichen Faden des Schraubenmikrometers, der die Basis für die Distanzmessung abgibt, und
S die Anzahl der Schraubenumdrehungen, welche dem Lattenabschnitte L entspricht, bedeuten.

Die Latte, welche zur Verwendung gelangt, trägt eine Zackenteilung, die wohl keine Teilungsfehler aufweisen dürfte, so daß der verwendete Lattenabschnitt L als fehlerfrei angenommen werden kann, daher $\triangle L = 0$ zu setzen ist; seien weiters $\triangle K$ und $\triangle S$ die mittleren Fehler in K und S, so wird für den mittleren Fehler der Basis b, gestützt auf Gleichung 6) erhalten:

$$\triangle b = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial K} \triangle K\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial S} \triangle S\right)^2}, \quad \ldots \ldots \ldots 7)$$

wobei die partiellen Differentialquotientent sich rechnen mit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial K} &= \frac{L}{S} = \frac{b}{K} \\ \frac{\partial b}{\partial S} &- \frac{KL}{S^2} = -\frac{b}{K} \end{aligned}\right\},$$

so daß erhalten wird:

$$\left.\begin{aligned} \triangle b &= \sqrt{\left(\frac{L}{S} \triangle K\right)^2 + \left(\frac{b}{K} \triangle S\right)^2} \\ &= b \sqrt{\left(\frac{\triangle K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\triangle S}{S}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots V$$

als absoluter und

$$\frac{\triangle b}{b} = \sqrt{\left(\frac{\triangle K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\triangle S}{S}\right)^2}$$

als relativer Fehler in der Basis.

a) Mittlere Fehler in der Konstanten. Was $\triangle K$ betrifft, so besitzen mathematisch-mechanische Institute Hilfsmittel, die Konstante K bis auf $\frac{1}{1000}$ ihres Wertes scharf zu bestimmen.

Ein ganz vorzügliches Hilfsmittel, die Konstante K zu regeln, ist die Korrektionslinse, welche das mathematisch-mechanische Institut von Starke & Kammerer seit fast 40 Jahren verwendet.[1])

Ein zweites Verfahren, die Konstante sehr genau und bequem zu bestimmen, besteht in der scharfen Ausmessung des mikrometischen Winkels nach dem von Gauss angegebenen Verfahren mit Benützung eines Kollimatorfernrohres.[2])

Da die Konstante K des Distanzmessers den reziproken Wert der Tangente des distanzmessenden Winkels bedeutet, d. i.

$$K = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\widehat{\alpha}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 8)$$

ist, so kann auch K aus dem gemessenen Winkel α ermittelt werden.

Dies kann durch ein Stampfer'sches Nivellierinstrument geschehen, welches mit dem distanzmessenden Fernrohre kollimiert wird; hiebei wird mit der Stampfer'schen Meßschraube der Winkel α gemessen und es läßt sich unschwer eine Genauigkeit von $\triangle \alpha = 1''$ erreichen.

---

[1]) Dr. A. Schell: «Das Präzisions-Nivellierinstrument» in den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1903.

[2]) Dr. W. Tinter: «Fadendistanzmesser» in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1882.

Es ist:
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{100} = \widehat{\alpha} = \frac{1}{K}$$
oder
$$K = \frac{1}{\widehat{\alpha}} = \frac{206.265''}{\alpha''} = 100, \quad \text{9)}$$
daher
$$\alpha'' = 2062{\cdot}65'' = 34' \; 23''. \quad \text{10)}$$
Wird die Gleichung $K = \frac{1}{\widehat{\alpha}}$ difierenziert, so erhält man:
$$\Delta K = -\frac{\widehat{\Delta\alpha}}{\widehat{\alpha^2}} = -K\frac{\widehat{\Delta\alpha}}{\widehat{\alpha}} = -K\frac{\Delta\alpha''}{\alpha''}$$
als absoluter Fehler der Konstanten und mit Berücksichtigung von Gleichung 10)
$$\frac{\Delta K}{K} = -\frac{\Delta\alpha''}{\alpha''} = -\frac{\Delta\alpha}{2062{\cdot}65''} \quad \text{11)}$$
Setzt man $\Delta\alpha'' = 1''$, so wird:
$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{1}{2062} \quad \text{VI.}$$
b) Mittlerer Fehler ΔS. Der mittlere Fehler ΔS, welcher mit Gleichung V erscheint, setzt sich aus zwei Teilen zusammen, und zwar: aus den Einstellungsfehlern des Mikrometerfadens auf die Endpunkte M und N der Latte und aus einem zweiten Teile, welcher durch die Ablesefehler an der Schraube verursacht wird. Es werden zwei Einstellungsfehler und zwei Ablesefehler gemacht, so daß, wenn diese Fehler mit ΔS_1 und ΔS_2 bezeichnet werden, man hat:
$$\Delta S^2 = 2\,(\Delta S_1{}^2 + \Delta S^2{}_2)$$
Entsprechen dem mikrometrischen Winkel α, der zum Lattenabschnitte L gehört, S Schraubenumdrehungen und sei β'' der Einstellungsfehler, dem ΔS_1 Schraubenumdrehungen in Partes zugehören, und wobei der Faden statt auf M auf m eingestellt wird, so kann man die Proportion aufstellen:
$$\Delta S_1{}^p : S^p = \beta'' : \alpha'' \quad \text{13)}$$
oder, da $S^p = 500^p$ oder 5 Umdrehungen ausmacht, so hat man aus der Proportion 13)
$$\Delta S_1{}^p = 500^p \frac{\beta''}{\alpha''} \quad \text{14)}$$
Nun ist
$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha = \frac{1}{K} = \frac{1}{100},$$
somit
$$\alpha'' = \frac{206.265''}{100} = 2.063''. \quad \text{15)}$$
Da der Einstellungsfehler β, wenn v die Vergrößerung des Fernrohres bedeutet, nach den Stampfer'schen Versuchen mit
$$\beta'' = \frac{15''}{v} \quad \text{16)}$$
eingeführt werden kann, so erhalten wir nach Substitution der vorstehenden Werte für α'' und β'' in die Gleichung 14):

$$\triangle S_1{}^p = \frac{500.15''}{2063''\,v} = \frac{3{\cdot}64^p}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ 17)$$

Angenommen, es ist die Fernrohrvergrößerung $v = 15$, so würde der Visurfehler $\beta'' = \frac{15''}{v} = \frac{15''}{15} = 1''$ betragen, oder es wäre

$$\triangle S_1{}^p = \frac{3{\cdot}64}{v} = 0.24_2{}^p$$

Der Ablesefehler $\triangle S_2$ kann zu $0{\cdot}1^p$ angenommen werden, da sich die Schätzung auf diese Größe sicher bestimmen läßt.

Da nun

$$\left.\begin{aligned}\triangle S_1 &= 0{\cdot}002^r\\ \triangle S_2 &= 0{\cdot}001^r\end{aligned}\right\}$$

in Revolutionen gesetzt werden kann, so folgt aus Gleichung 12):

$$\begin{aligned}\triangle S^2 &= 2\,(\triangle S_1{}^2 + \triangle S_2{}^2)\\ &= 2\,(0{\cdot}002^2 + 0{\cdot}001^2) = 0{\cdot}00\,00\,10\end{aligned}$$

oder

$$\triangle S = \sqrt{0{\cdot}00\,00\,10} = \pm\,0{\cdot}003_1\ .$$

Bei der Distanzmessung soll der größte distanzmessende Winkel α angewendet werden; diesem entsprechen $S = 5^r$. Da nun $S = 5$ ist, so resultiert:

$$\frac{\triangle S}{S} = \pm\,\frac{0{\cdot}003_1}{5} = \frac{1}{1.666}\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{VII})$$

Um jedesmal einen Lattenabschnitt wählen zu können, der dem vollen distanzmessenden Winkel α entspricht, dessen Mitte nahezu über dem zweiten Basispunkt B (Fig. 3) und auf der Basis AB senkrecht steht, kann man eine Latte mit Zackenteilung, von Zentimeter zu Zentimeter geteilt, benützen; die Latte soll eine Länge von $2{\cdot}5\,m$ besitzen, um den vollen distanzmessenden Winkel $\alpha'' = 2062''$ noch bei der Distanz von $250\,m$ auswerten zu können.

Führt man in den Ausdruck für den relativen Fehler in der Basis, d. i.

$$\frac{\triangle b}{b} = \sqrt{\left(\frac{\triangle K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\triangle S}{S}\right)^2}$$

die gefundenen Werte:

$$\frac{\triangle K}{K} = \frac{1}{2063} \quad \text{und} \quad \frac{\triangle S}{S} = \frac{1}{1.666}$$

ein, so wird die bemerkenswerte Relation erhalten:

$$\frac{\triangle b}{b} = \pm\,\frac{1}{1297},$$

die relative Genauigkeit in der Basis kann also, wenn ein optischer Distanzmesser mit einem Schraubenmikrometer verwendet wird, mit Sicherheit mit

$$\frac{\triangle b}{b} = \pm\,\frac{1}{1000} \quad \ldots\ldots\ \mathrm{VIII})$$

angesetzt werden.

2. Der mittlere Fehler in der Horizontal-Parallaxe. Wiederholte Einstellungen mittels der Parallaxenschraube auf einem bezüglich der Horizontal-

Parallaxe zu bestimmenden Punkte lehren, daß a sehr sicher bestimmt werden kann, weil das Anstechen des auszumessenden Punktes mittels der wandernden oder fliegenden Marke in dem plastischen Bilde des Stereokomparators mit überraschender Sicherheit vorgenommen werden kann. Es ist $\triangle a = \pm 0{\cdot}01\ mm$.

Dieser mittlere Fehler gilt unter der Voraussetzung, daß die Bildebenen in beiden Stationen streng in einer Ebene liegen, wie es die Theorie fordert.

Falls die Bildebenen eine Verschwenkung um einen Winkel ψ erfahren, so hat dies eine Änderung der Parallaxe zur Folge, die eventuell in Rechnung gebracht werden muß.

3. Der mittlere Fehler in den Bildkoordinaten des linken Bildes. Erfahrungsgemäß können die mittleren Fehler der Bildkoordinaten bei sorgfältiger Ausmessung einander gleichgesetzt werden und betragen:

$$\triangle x_1 = \triangle y_1 = \pm 0{\cdot}1\ mm. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{IX)}$$

4. Der mittlere Fehler in der Brennweite. Die Brennweite des Objektives, welches bei der Kamera eines stereophotogrammetrischen Apparates benützt wird, muß auf $\frac{1}{1000}$ ihrer Länge genau bekannt sein. Bei dem heutigen Stande der instrumentellen Hilfsmittel, um die Brennweite eines Objektes zu bestimmen, fällt es nicht schwer, mittels eines guten Fokometers[1]) die angegebene Genauigkeit zu erzielen.

Auch die scharfen Methoden der photographischen Bestimmung der Bilddistanz[2]) gewährleisten diese Schärfe, so daß also

$$\frac{\triangle f}{f} = \frac{1}{1000} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{X)}$$

Auf Grund der vorstehenden Auseinandersetzungen hat man zu setzen:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\triangle b}{b} = \frac{\triangle f}{f} = \pm \frac{1}{1000} \\ \triangle x_1 = \triangle y_1 = \pm 0{\cdot}1\ mm \\ \triangle a = \pm 0{\cdot}01\ mm \end{array}\right\};$$

wählt man

$$x_1 = 50\ mm,\quad y_1 = 40\ mm \text{ und } a = 10\ mm,$$

so ergeben sich nach Einführung dieser Werte in die Gleichungen II, III und IV, als relative Fehler der Raumkoordinaten des unter vorstehenden Bedingungen bestimmten Punktes:

$$\frac{\triangle X}{X} = \pm \frac{1}{449},\quad \frac{\triangle Y}{Y} = \pm \frac{1}{349},\quad \frac{\triangle Z}{Z} = \pm \frac{1}{578} \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{XI)}$$

(Fortsetzung folgt.)

---

[1]) Dr. A. Schell: »Die Bestimmung der optischen Konstanten eines zentrierten sphärischen Systems mit dem Präzisions-Fokometer von Dr. Anton Schell« in den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien 1903.

[2]) Dr. A. Schell: »Der Phototheodolit von Prof. Dr. A. Schell«, Original-Mitteilung in Eder's Handbuch der Photographie, I. Band, 2. Hälfte, Halle a. S. 1892

[3]) Hartner-Doležal: Lehr- und Handbuch der niederen Geodäsie, II. Band, Wien 1905.

$$M^* = \pm \frac{m^*}{\sqrt{n}} \qquad T^* = \pm \frac{t^*}{\sqrt{n}} \qquad R^* = \pm \frac{r^*}{\sqrt{n}},$$

und es resultiert als Normalwert des Genauigkeitsmaßes des arithmetischen Mittels die eindeutige Bestimmung:

$$H^* = \frac{1}{M^* \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2n}}{2m^*}.$$

Im Beispiele des vorigen Kapitels ist für $n = 40$:

$[vv] = 32{\cdot}5268$		$[\lvert v \rvert] = 29{\cdot}26$	
$m = 0{\cdot}913$	$t = 0{\cdot}741$	$r_1 = 0{\cdot}616$	$r_2 = 0{\cdot}626$
$m^* = 0{\cdot}919$	$t^* = 0{\cdot}733$	$r^* = 0{\cdot}621$ $(0{\cdot}620)$	
	$h^* = 0{\cdot}769$	$H^* = 4{\cdot}866.$	

Die Erfüllung der Grenzbedingung für $\alpha = 0{\cdot}128$

$$m^* (1 - \alpha) = 0{\cdot}811 < 0{\cdot}913 < 1{\cdot}027 = m^* (1 + \alpha)$$

läßt keine der 40 Beobachtungen als abnorm zweifelhaft erscheinen.

(Fortsetzung folgt).

Genauigkeit und Prüfung einer stereophotogrammetrischen Aufnahme.

Von Eduard Doležal, o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Fortsetzung).

III. Einfluß einer Plattenverschwenkung auf die Horizontal-Parallaxe und die Raumkoordinaten.

Eine prinzipielle Forderung der Stereophotogrammetrie ist, daß die in den beiden Basispunkten erhaltenen Bilder sich in einer Ebene befinden. Hat aber die eine Bildebene eine Verschwenkung erfahren, so ist es nun von Interesse, den Einfluß dieser Verschwenkung auf die Horizontal-Parallaxe und die Raumkoordinaten selbst kennen zu lernen.

1. Änderung der Horizontal-Parallaxe eines Punktes durch eine Änderung der Lage der parallelen Platten (Bilder).

Angenommen, das Bild in der Station S_2 sei um den Winkel φ verschwenkt (Fig. 4); die Trasse der Bildebene $\overline{T_2' T_2'}$ schließt mit der theoretisch richtigen Lage der Trasse $\overline{T_2 T_2}$ den Winkel φ, den Verschwenkungswinkel, ein.

Es seien:

$\overline{\Omega_2 p_2} = a_0$ die wahre Horizontal-Parallaxe,

$\overline{\Omega_2' p_2'} = a$ die effektiv gemessene Parallaxe,

$\overline{S_2 \Omega_2} = \overline{S_2 \Omega_2'} = f$ die Bilddistanz und

α der Horizontalwinkel des Strahles $\overline{S_2 P}$ mit der Bilddistanz in S_2, so ergeben sich aus den rechtwinkeligen Dreiecken $p_2 \Omega_2 S_2$ und $p_2' \Omega_2' S_2'$ unmittelbar die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= f \operatorname{tg} \alpha \\ a &= f \operatorname{tg} (\alpha \mp \varphi) \end{aligned}\right\} , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 18)$$

wobei — oder + zu nehmen sind, je nachdem die Verschwenkung links oder rechts zur richtigen Lage erfolgte.

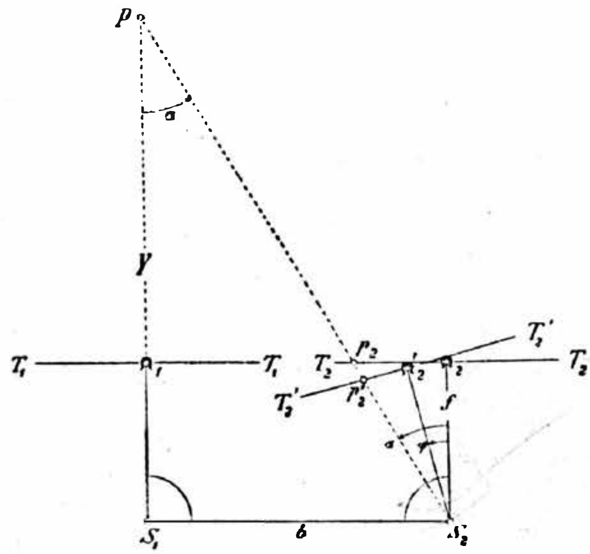

Fig. 4.

Die Änderung in der Horizontal-Parallaxe, die Parallaxen-Korrektion, lautet:

$$\triangle a_0 = a_0 - a\,; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 19)$$

nach Einführung der Werte aus den Gleichungen 18) folgt:

$$\triangle a_0 = [\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha \mp \varphi)] f$$

oder entwickelt:

$$\triangle a_0 = \left[\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\varphi}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi}\right] f$$

$$\triangle a_0 = \left[\operatorname{tg}\alpha - \frac{(\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\varphi)(1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi)}{1 - (\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi)^2}\right] f.$$

Da man den Nenner im Bruche des zweiten Gliedes nahezu der Einheit gleichsetzen kann, so wird erhalten:

$$\triangle a_0 = [\operatorname{tg}\alpha - (\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\varphi)(1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi)] f$$

oder reduziert:

$$\triangle a_0 = \pm f \operatorname{tg}\varphi \pm f \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha (\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\varphi) \quad \ldots \ldots \quad 20)$$

Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} f \operatorname{tg}\varphi &= \triangle a \\ f \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha (\operatorname{tg} \mp \operatorname{tg}\varphi) &= \triangle a \operatorname{tg}\alpha (\operatorname{tg}\alpha \mp \operatorname{tg}\varphi) = \delta \end{aligned}\right\},$$

so nimmt schließlich die Parallaxen-Korrektion die Form an:

$$\triangle a_0 = \triangle a + \delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 21)$$

und die wahre Parallaxe wird lauten:

$$a_0 = a + \triangle a_0 = a + \triangle a + \delta \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mathrm{XII}$$

In der Gleichung 21) für die Parallaxen-Korrektion stellt der erste Summand

$$\triangle a = f \operatorname{tg}\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathrm{XIII}$$

eine für ein gegebenes Instrument f und eine bestimmte Verschwenkung φ unveränderliche Größe, die konstante Korrektion der Parallaxe, vor, welche nur durch die Verschwenkung φ der Platte bedingt und von der Lage des ausgemessenen Punktes unabhängig ist; diese Korrektion ist für alle Punkte gleich und unabhängig vom Winkel α, der die Lage des Raumpunktes charakterisiert. Der zweite Summand in derselben Gleichung 21)

$$\delta = \triangle a \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha \mp \operatorname{tg} \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XIV}$$

stellt den variablen Teil der Parallaxen-Korrektion vor, für welche die Lage des Punktes im Raume maßgebend ist.

Da der Verschwenkungswinkel φ zumeist einen kleinen Wert haben dürfte, daher $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ gesetzt werden kann, und ferner für den Winkel α nach Fig. 4 die Beziehung besteht:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{Y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

so erhalten wir für die Teil-Korrektionen:

$$\left.\begin{aligned} \triangle a &= \varphi f \\ \delta &= \triangle a \frac{b}{Y}\left(\frac{b}{Y} \mp \varphi\right) = \triangle a \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \mp \triangle a \frac{b}{Y} \varphi \\ &= \triangle a \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \mp \triangle a^2 \frac{b}{Yf} \doteq \triangle a \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \doteq \varphi f \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad . \text{XV}$$

und für die totale Parallaxen-Korrektion als Näherungswert:

$$\left.\begin{aligned} \triangle a_0 &= \triangle a \mp \triangle a \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \doteq \triangle a \left[1 \mp \left(\frac{b}{Y}\right)^2\right] \\ &= \varphi f \mp \varphi f \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \doteq \varphi f \left[1 \mp \left(\frac{b}{Y}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \text{XVI}$$

Der variable Teil der Korrektion

$$\delta \doteq \triangle a \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \doteq \varphi f \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \doteq f \left(\frac{b}{Y}\right)^2 \frac{\varphi'}{3438'} \quad . \; . \text{XV}'$$

wird desto kleiner:

a) je kleiner bei einer bestimmten Brennweite f der Verschwenkungswinkel φ ist,

b) je kleiner die Basis b und

c) je größer der Normalabstand Y werden.

Setzen wir in Gleichung XV' für $f = 100\,mm$, $\varphi' = 1'$, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Tabelle für den variablen Teil der Parallaxen-Korrektion.

Y / b	in Metern															Y / b
	20	30	40	50	60	80	100	200	300	400	500	1000	2000	5000	10.000	
m																m
10	0·0073	0·0032	0·0018	0·0012	0·0008	0·0004	0·0003	0·0001	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	10
20	0·0291	0·0129	0·0073	0·0046	0·0032	0·0018	0·0012	0·0003	0·0001	0·0001	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	20
30	0·0654	0·0291	0·0164	0·0105	0·0073	0·0041	0·0026	0·0006	0·0003	0·0002	0·0001	0·0000	0·0000	0·0000	0·0000	30
40	0·1164	0·0517	0·0291	0·0186	0·0129	0·0073	0·0046	0·0012	0·0005	0·0003	0·0002	0·0001	0·0000	0·0000	0·0000	40
50	0·1818	0·0808	0·0454	0·0291	0·0202	0·0114	0·0073	0·0018	0·0008	0·0004	0·0003	0·0001	0·0000	0·0000	0·0000	50
60	0·2618	0·1164	0·0654	0·0419	0·0291	0·0164	0·0105	0·0026	0·0012	0·0006	0·0004	0·0001	0·0000	0·0000	0·0000	60
80	0·4654	0·2069	0·1164	0·0745	0·0517	0·0291	0·0186	0·0046	0·0021	0·0012	0·0007	0·0002	0·0001	0·0000	0·0000	80
100	0·7272	0·3233	0·1818	0·1163	0·0808	0·0454	0·0291	0·0073	0·0032	0·0018	0·0011	0·0003	0·0001	0·0000	0·0000	100
200	2·9087	1·2931	0·7272	0·4653	0·3232	0·1818	0·1163	0·0291	0·0129	0·0073	0·0046	0·0011	0·0003	0·0001	0·0000	200
300	6·5445	2·9087	1·6361	1·0471	0·7272	0·4090	0·2618	0·0654	0·0291	0·0163	0·0105	0·0026	0·0006	0·0001	0·0000	300
400	11·6347	5·1726	2·9087	1·8615	1·2927	0·7272	0·4654	0·1163	0·0517	0·0291	0·0186	0·0046	0·0012	0·0002	0·0001	400
500	18·1792	8·0822	4·5448	2·9087	2·0199	1·1362	0·7272	0·1818	0·0808	0·0454	0·0291	0·0073	0·0018	0·0003	0·0001	500

Diese Tabelle gestattet:

a) für eine beliebige Bilddistanz f und Verschwenkung φ die variable Parallaxen-Korrektion δ zu finden; man braucht bloß den Tafelwert mit $\frac{f\varphi}{100}$ zu multiplizieren

b) bei gewählter Basis b jenen Normalabstand Y zu vermitteln, für welchen die variable Korrektion einen bestimmten Wert erreicht und umgekehrt

c) bei angenommenen Y jene Basis b anzugeben, welche einer bestimmten Korrektion δ entspricht; in beiden Fällen muß natürlich der Tafelwert noch mit $\frac{f\varphi}{100}$ multipliziert werden.

Für die Praxis ist der folgende Fall von Wichtigkeit.

Die Horizontal-Parallaxe kann mit einem Photo-Stereokoordinatometer erfahrungsmäßig auf $\pm 0{\cdot}01\ mm$ bestimmt werden; bringen wir diese Angabe mit der variablen Korrektion δ in Verbindung, so können wir sagen, daß in der Gesamt-Parallaxen-Korrektion:

$$\triangle a_0 = \triangle a + \delta$$

das zweite Glied weggelassen werden kann, wenn

$$\delta \lesseqgtr \pm 0{\cdot}01\ mm \text{ ist.}$$

Mit Berücksichtigung dieses Wertes für δ erhalten wir aus Gleichung XV':

$$Y \gtreqless b\sqrt{\frac{f\varphi}{\delta}} \gtreqless b\sqrt{\frac{f\varphi'}{34{\cdot}38'.1\,mm}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ 23)$$

aus welchem Ausdrucke bei Verwertung des oberen Zeichens der kleinste Normalabstand Y bestimmbar ist, für welchen noch δ wegfällt; wird Y kleiner, so wird $\delta > \pm 0{\cdot}01\ mm$ und muß in Rechnung gezogen werden.

Interessant ist die Beziehung zwischen dem kleinsten Normalabstande Y_{min} und der Basis b, nämlich:

$$Y_{min} = b\sqrt{\frac{f\varphi'}{34{\cdot}38'.1\,mm}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ 24)$$

welche für $f = 250\,mm$ und einige gewählte Verschwenkungswinkel φ gibt:

$\varphi = 10''$	$Y = 1{\cdot}1\,b$
20	$1{\cdot}6\,b$
30	$1{\cdot}9\,b$
40	$2{\cdot}2\,b$
$60'' = 1'$	$2{\cdot}7\,b$
$2'$	$3{\cdot}8\,b$
$5'$	$6{\cdot}0\,b$
$10'$	$8{\cdot}5\,b$.

Der relative Fehler in der Parallaxe ist nach Verwertung der Gleichungen XVI:

$$\frac{\triangle a_0}{a_0} = \frac{\triangle a}{a_0}\left[1 \mp \left(\frac{b}{Y}\right)^2\right];$$

werden hierin für $\triangle a$ und a_0 die Werte aus den Gleichungen 18), 22) und XV eingeführt, so ergibt sich

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = \varphi \frac{Y}{b}\left[1 \mp \left(\frac{b}{Y}\right)^2\right]$$

oder auch

$$= \varphi \frac{Y}{b} \mp \varphi \frac{b}{Y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

als der vollständige Ausdruck für die relative Parallaxen-Korrektion.

Der zweite Summand in Gleichung 25) gibt kleine Beträge, wovon man sich nach Substitution spezieller Werte von b und Y leicht überzeugen kann, so daß als Näherungswert gilt:

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = \varphi \frac{Y}{b} = \frac{\varphi'}{3.438'} \frac{Y}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad XVI$$

Wir erhalten:

für $\varphi = 0{\cdot}5'$ $\quad \frac{Y}{b} = 2$, somit $\frac{\Delta a_0}{a_0} = \frac{1}{3.438}$

$= 1{\cdot}0 \quad = 2{\cdot}7 \quad$ » $\quad = \frac{1}{1.146}$.

$= 2 \quad = 3 \quad$ » $\quad = \frac{1}{860}$.

2. Änderung der Raumkoordinaten zufolge einer Verschwenkung der parallelen Platten.

Die partiellen Änderungen in den Raumkoordinaten, bedingt durch eine Änderung in der Horizontal-Parallaxe, werden nach den Gleichungen II, III und IV erhalten, indem man $\Delta x_1 = \Delta y_1 = o$ setzt, also:

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= \frac{bx_1}{a^2}\Delta a = X\frac{\Delta a}{a} \\ \Delta Y &= \frac{bf}{a^2}\Delta a = Y\frac{\Delta a}{a} \\ \Delta Z &= \frac{by_1}{a^2}\Delta a = Z\frac{\Delta a}{a} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

woraus mit Berücksichtigung der Gleichungen 25), resp. XVI), wenn statt $\Delta a, a$ die berechneten Größen $\Delta a_0, a_0$ eingeführt werden, die relativen Fehler folgen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta a}{a} &= \varphi \frac{Y}{b} \mp \varphi \frac{b}{Y} \\ \text{oder näherungsweise} \ldots\ldots\ldots\ldots &\doteq \varphi \frac{Y}{b} = \frac{\varphi'}{3.438'}\frac{Y}{b} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad XVII$$

d. h. die relative Genauigkeit der drei Raumkoordinaten ist dieselbe.

Die absoluten Fehler der Raumkoordinaten können somit auch geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= \varphi \frac{XY}{b} \mp \varphi b \frac{X}{Y} \doteq \varphi \frac{XY}{b} = \frac{\varphi'}{3.438'}\frac{XY}{b} \\ \Delta Y &= \varphi \frac{Y^2}{b} \mp \varphi b \doteq \varphi \frac{Y^2}{b} = \frac{\varphi'}{3.438'}\frac{Y.Y}{b} \\ \Delta Z &= \varphi \frac{YZ}{b} \mp \varphi b \frac{Z}{Y} \doteq \varphi \frac{YZ}{b} = \frac{\varphi'}{3.438'}\frac{ZY}{b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad XVIII$$

Nennen wir den tolerierten Fehler in der Zeichnung ε, sei $1:n$ das Verjüngungsverhältnis und stelle $\frac{1}{m}$ die relative Genauigkeit der Raumkoordinaten vor, so hat man z. B. für die Ordinate Y:

$$\left.\begin{aligned} \triangle Y &= n \,.\, \varepsilon \\ \frac{\triangle Y}{Y} &= \frac{1}{m} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 27)$$

somit

$$\left.\begin{aligned} Y &= m \,.\, n \,.\, \varepsilon \\ \triangle Y &= \frac{\varphi'}{3.438'} \frac{(m\, n\, \varepsilon)^2}{b} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{XIX}$$

woraus sich für den Verschwenkungswinkel φ die Relation ergibt:

$$\varphi' = 3.438' \frac{b}{m^2\, n\, \varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{XX}$$

Da man in einem gegebenen Falle nicht sicher weiß, ob die prinzipielle Forderung der Stereophotogrammetrie, wornach die Plattenebenen beider Stationen zusammenfallen sollen, erfüllt wird oder nicht, so muß man in den Ausdrücken für die Raumkoordinaten für die Parallaxe setzen $a + \triangle a + \delta$; man erhält dann:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{b}{a + \triangle a + \delta}\, x_1 \\ Y &= \frac{b}{a + \triangle a + \delta}\, f \\ Z &= \frac{b}{a + \triangle a + \delta}\, y_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{XXI}$$

Für Punkte, deren Normalabstände Y_0 von der Basis, d. i.

$$Y_0 \leqq b \sqrt{\frac{f\varphi'}{3.438'}}$$

sind, wird die variable Parallaxen-Korrektion $\delta \geqq 0{\cdot}01$ *mm* sein und δ muß berücksichtigt werden; wenn hingegen $Y > Y_0$ ist, dann wird $\delta < 0{\cdot}01$ *mm* und man hat für die Parallaxe einzuführen $a + \triangle a$, so daß die Raumkoordinaten lauten:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{b}{a + \triangle a}\, x_1 \\ Y &= \frac{b}{a + \triangle a}\, f \\ Z &= \frac{b}{a + \triangle a}\, y_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{XXII}$$

Der Horizontalabstand D des Raumpunktes von der Station S_1 ergibt sich nach Fig. 2 zufolge der Proportion:

$$\overline{S_1 P'} : \overline{S_1 p_1} = \overline{S_1 P''} : \overline{S_1 \Omega_1}$$

mit

$$\overline{S_1 P'} = \frac{\overline{S_1 P''} \,.\, \overline{S_1 p_1}}{\overline{S_1 \Omega_1}}, \text{ worin } \overline{S_1 P_1} = D_1,\ \overline{S_1 p_1} = \sqrt{x_1^2 + f^2},$$

$\overline{S_1 P''} = Y$ und $\overline{S_1 \Omega_1} = f$ bedeuten, so daß nach Einführung des Wertes für Y folgt:

$$D = \frac{Y}{f} \sqrt{x_1^2 + f^2} = \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 + f^2} \quad \ldots\ldots \quad 28)$$

Bei Berücksichtigung der Verschwenkung hat man:

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{b}{a+\Delta a+\delta}\sqrt{x_1^2+f^2} \\ \text{oder}\quad D &= \frac{b}{a+\Delta a}\sqrt{x_1^2+f^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{XXIII}$$

Anmerkung. In den Formeln 18—27, resp. XII—XX, in welchen der Normalabstand von der Basis Y vorkommt, kann man auch aus Gleichung 28) den Abstand des Punktes von der Station S_1, d. i. D einführen, wodurch die Formeln eine kleine Modifikation erfahren.

(Schluß folgt.)

Der Koordinatograph der Gebrüder Fromme.

Von Eduard Demmer, k. k. Obergeometer im Triangulierungs- und Kalkül-Bureau.

Der im Triangulierungs- und Kalkulbureau seit ungefähr einem Jahre in Verwendung stehende Koordinatograph der Gebrüder Fromme hat der ersten Bedingung, die man an ihn stellte, das Auftragen der koordinatenmäßig bestimmten Punkte zu beschleunigen, vollauf Genüge geleistet; er wurde nach eingehender Rücksprache seitens des Chefs der Firma mit der Direktion des Triangulierungsbureaus angefertigt und hat sich als eine Verbesserung gegenüber dem ersten von der genannten Firma konstruierten Koordinatograph erwiesen; derselbe ent-

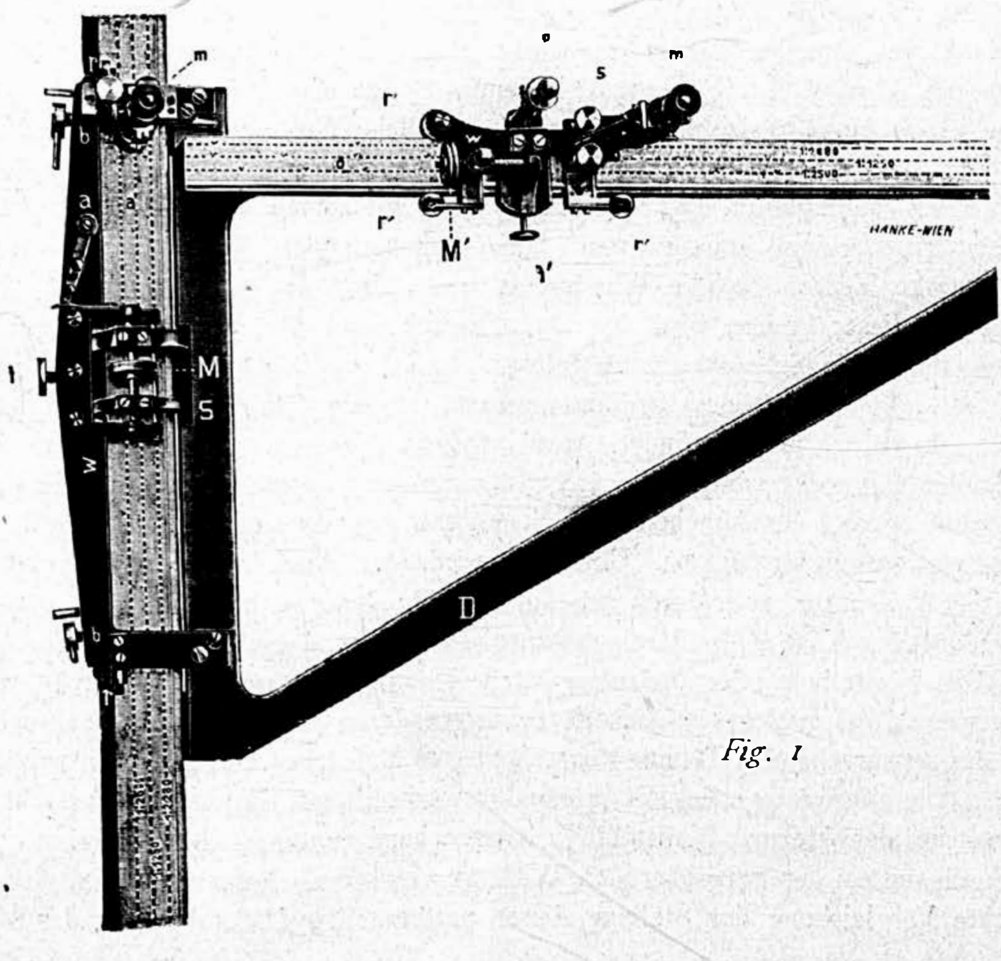

Fig. 1

genommen werden können und bei welchem die den gewöhnlichen Fadendistanzmessern eigentümlichen Vorteile der Unveränderlichkeit des Abstandes, der Distanzfäden und der vollständigen Freihaltung des Gesichtsfeldes, mit dem den Schraubendistanzmessern zukommenden Vorteile der leichten Abstimmung der Instrumentenkonstante C vereinigt sind. (Fortsetzung folgt.)

Genauigkeit und Prüfung einer stereophotogrammetrischen Aufnahme.

Von Eduard Doležal, o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Schluß).

IV. Prüfung einer stereophotogrammetrischen Aufnahme.

Kommen bei der stereophotogrammetrischen Aufnahme auf dem aufzunehmenden Teile der topographischen Fläche Punkte vor, die ihrer Lage und Höhe nach bekannt sind und auf zwei zusammengehörigen Aufnahmen abgebildet erscheinen, so können sie als Probe- oder Kontrollpunkte zur Prüfung der Genauigkeit und Brauchbarkeit der betreffenden Aufnahme mit großem Vorteile verwertet werden.

Mit Rücksicht auf das Vorhandensein oder den Mangel solcher Punkte lassen sich für die praktische Ausführung der Aufnahme, ihre Genauigkeit und Prüfung folgende zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Die aufzunehmende Terrainfläche enthält mehrere ziemlich gleichmäßig zerstreut liegende trigonometrisch bestimmte Punkte, Kontrollpunkte (Fig. 5).

In diesem Falle erfolgt die photographische Aufnahme des Terrainobjektes an den beiden Endpunkten S_1 und S_2 der entsprechend gewählten Basis mit einem gewöhnlichen, jedoch scharf rektifizierten Phototheodolite dadurch, daß man die photographischen Platten der Kamera an den beiden Stationen, den Basispunkten, mittels des Horizontalkreises eines gewöhnlichen Phototheodolites bis auf $1'$—$^1/_2{}'$ genau parallel stellt und die photographische Aufnahme ausführt.

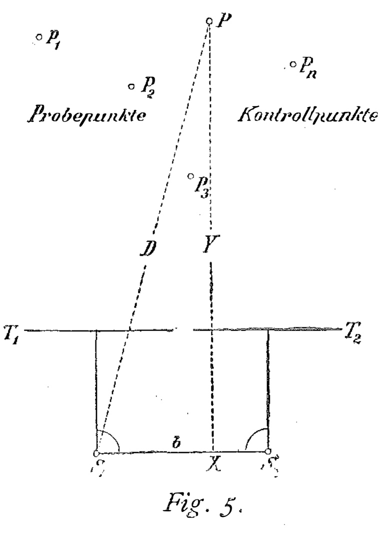

Fig. 5.

Eine stereophotogrammetrische Aufnahme fordert allerdings, daß die photographischen Platten während der Exposition in den beiden Endpunkten der Basis bis auf einige Sekunden genau in einer Ebene liegen.

Wie wir in der Folge zeigen werden, ist man durch die Probepunkte in den Stand gesetzt, mit aller Schärfe den Neigungswinkel φ

beider Platten zu ermitteln und mittels desselben die der Platte entsprechende Änderung der Parallaxe zu bestimmen.

Um die aus einer stereophotogrammetrischen Aufnahme durch Abmessung mit dem Photo-Stereokoordinatometer gewonnenen Koordinaten x, y und die Parallaxe a zur Berechnung der Raumkoordinaten des ausgemessenen Bildpunktes verwerten zu können, müssen die Elemente einer jeden stereophotogrammetrischen Aufnahme, d. i. b (Basis), f (Bilddistanz), sowie die der Plattenneigung entsprechende Korrektion der Parallaxe a bekannt sein. Dann ist:

$$X = \frac{b}{a + \triangle a} x, \qquad Y = \frac{b}{a + \triangle a} f, \qquad Z = \frac{b}{a + \triangle a} y \quad . \ . \ . \ 29)$$

wobei die variable Parallaxen-Korrektion $\delta < \pm 0{\cdot}01\,mm$ vernachlässigt werden kann.

1. Sind in dem aufzunehmenden Terrain mehrere trigonometrisch bestimmte Punkte gegeben, wie dieses bei topographischen Arbeiten stets der Fall ist, so geschieht die Ermittlung der Elemente der stereophotogrammetrischen Aufnahme, d. i. b, f und $\triangle a$ am einfachsten und sichersten auf indirektem Wege.

Seien in Bezug auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte $P_1\, P_2 \ldots P \ldots P_n$, d. i.

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & & P_2 & \ldots & P & \ldots & P_n \\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1 & & \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2 & & \xi,\ \eta,\ \zeta & & \xi_n,\ \eta_n,\ \zeta_n \end{array}$$

und jene des Punktes S_1: $\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0,$

wobei $\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \zeta_0$ die absoluten Höhen der betreffenden Punkte darstellen.

Die Horizontal-Koordinaten ξ_0 und η_0 erhält man durch trigonometrisches Rückwärtseinschneiden aus den gegebenen Punkten $P_1,\ P_2,\ P_3 \ldots$ und die Meereshöhe ζ_0 durch Messung des Vertikalwinkels irgend eines gegebenen trigonometrischen Punktes.

Die Entfernungen $D_1,\ D_2, \ldots$ sämtlicher trigonometrischer Punkte von dem ersten Basispunkte S_1 ergeben sich auf Grund der Distanzgleichung der analytischen Geometrie mit:

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \sqrt{(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2} \\ D_2 = \sqrt{(\xi_2 - \xi_0)^2 + (\eta_2 - \eta_0)^2} \\ \vdots \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 30)$$

Die relativen Höhen $h_1,\ h_2, \ldots$ der trigonometrischen Punkte, bezogen auf den Horizont des Basispunktes S_1, ergeben sich, wenn J die bekannte Instrument- oder Horizonthöhe im Punkte S_1 bezeichnet, aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = \zeta_1 - \zeta_0 - J \\ h_2 = \zeta_2 - \zeta_0 - J \\ \vdots \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 31)$$

Liegen die Messungsresultate der Bildkoordinaten:

$x_1,\ y_1 \quad x_2,\ y_2 \quad x_3,\ y_3 \ \ldots$ und die Parallaxen
$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ \ldots$ vor, die am Photo-Stereokoordinatometer gemessen worden sind, so werden die räumlichen Koordinaten eines Punktes in Bezug auf das durch den Anfangspunkt S_1 als Ursprung gelegte, rechtwinklige Koordinatensystem lauten:

$$\left.\begin{array}{lll} X_1 = \dfrac{b}{a_1 + \triangle a} x_1, & Y_1 = \dfrac{b}{a_1 + \triangle a} f, & Z_1 = \dfrac{b}{a_1 + \triangle a} y_1 \\ X_2 = \dfrac{b}{a_2 + \triangle a} y_2, & Y_2 = \dfrac{b}{a_2 + \triangle a} f, & Z_2 = \dfrac{b}{a_2 + \triangle a} y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 32)$$

Da aber die horizontalen Koordinaten X und Y der trigonometrischen Punkte nicht bekannt sind, sondern nur ihre Entfernungen D von dem ersten Standpunkte S_1, so werden Gleichungen 28), resp. XXIII verwendet, wonach

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{b}{a + \triangle a}\sqrt{x^2 + f^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

ist.

Die relativen Höhen $h_1, h_2 \ldots$ sind gleich der dritten Raumkoordinate: $Z_1, Z_2, \ldots$.

Zur Bestimmung der drei Unbekannten b, f und $\triangle a$ liegen folgende Gleichungen vor:

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \dfrac{b}{a_1 + \triangle a}\sqrt{x_1^2 + f^2} \\ D_2 = \dfrac{b}{a_2 + \triangle a}\sqrt{x_2^2 + f^2} \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = \dfrac{b}{a_1 + \triangle a} y_1 \\ h_2 = \dfrac{b}{a_2 + \triangle a} y_2 \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

Bevor die beiden Unbekannten b und f aus den Gleichungen 34) bestimmt werden, hat man die Parallaxen-Korrektion $\triangle a$ aus den Gleichungen 35) zu ermitteln. Durch Elimination von b aus diesen Gleichungen, indem die erste Gleichung sukzessive mit den (n — 1) folgenden Gleichungen verbunden wird, ergeben sich (n — 1) im allgemeinen verschiedene Werte für $\triangle a$, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle a' = \dfrac{h_1 a_1 y_2 - h_2 a_2 y_1}{y_1 h_2 - y_2 h_1} \\ \triangle a'' = \dfrac{h_1 a_1 y_3 - h_3 a_3 y_1}{y_1 h_3 - y_3 h_1} \\ \vdots \\ \triangle a^{(n-1)} = \dfrac{h_1 a_1 y_n - h_n a_n y_1}{y_1 h_n - y_n h_1} \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

so daß der wahrscheinlichste Wert lautet:

$$\triangle a = \frac{1}{n-1}(\triangle a' + \triangle a'' + \ldots + \triangle a^{(n-1)}) \quad \ldots \quad XXIV$$

Setzen wir $\triangle a - \triangle a' = v_1$, $\triangle a - \triangle a'' = v_2$, ... $\triangle a - \triangle a^{(n-1)} = v_{n-1}$, so wird der m i t t l e r e F e h l e r der P a r a l l a x e n - K o r r e k t i o n:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-2)}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad XXV$$

welcher den Betrag von 0·01 *mm* nicht überschreiten darf.

Was die Bestimmung von b und f betrifft, so kann sie in doppelter Art erfolgen aus den Gleichungen 34), und zwar:

a) unabhängig oder getrennt und

b) summarisch.

Ad a): Nach Elimination von b aus den Gleichungen 34) wird erhalten:

$$\left.\begin{aligned} f' &= \sqrt{\frac{D_2^2(a_2+\triangle a)^2x_1^2 - D_1^2(a_1+\triangle a)^2x_2^2}{D_1^2(a_1+\triangle a)^2 - D_2^2(a_2+\triangle a)^2}} \\ f'' &= \sqrt{\frac{D_3^2(a_3+\triangle a)^2x_1^2 - D_1^2(a_1+\triangle a)^2x_3^2}{D_1(a_1+\triangle a)^2 - D_3^2(a_3+\triangle a)^2}} \\ &\vdots \\ f^{(n-1)} &= \sqrt{\frac{D_n^2(a_n+\triangle a)^2x_1^2 - D_1^2(a_1+\triangle a)^2x_n^2}{D_1^2(a_1+\triangle a)^2 - D_n^2(a_n+\triangle a)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 37)$$

Hieraus folgt der wahrscheinlichste Wert der Brennweite:

$$f = \frac{1}{n-1}(f' + f'' + \ldots + f^{(n-1)}) \quad \ldots\ldots\ldots \text{XXVI}$$

und wenn $f - f' = v_1$, $f - f'' = v_2$, ... $f - f^{(n-1)} = v_{n-1}$ gesetzt wird, der mittlere Fehler $\triangle f$ derselben:

$$\triangle f = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n(n-2)}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{XXVII}$$

Sind $\triangle a$ und f als bekannt anzusehen, so erhält man aus den Gleichungen 34) die Basis:

$$\left.\begin{aligned} b' &= \frac{D_1(a_1+\triangle a)}{\sqrt{x_1^2+f^2}} \\ b'' &= \frac{D_2(a_2+\triangle a)}{\sqrt{x_2^2+f^2}} \\ &\vdots \\ b^{(n)} &= \frac{D_n(a_n+\triangle a)}{\sqrt{x_n^2+f^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 38)$$

Es ist demnach der wahrscheinlichste Wert der Basis:

$$b = \frac{1}{n}(b' + b'' + \ldots + b^{(n)}) \quad \ldots\ldots \text{XXVIII}$$

und wenn $b - b' = v_1$, $b - b'' = v_2$, ... $b - b^{(n)} = v_n$ gesetzt wird, ergibt sich der mittlere Fehler der Basis $\triangle b$ aus der Gleichung:

$$\triangle b = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n(n-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{XXIX}$$

Ad b): Die Gleichung 33) quadriert gibt:

$$b^2x^2 + b^2f^2 = D^2(a+\triangle a)^2$$

Führt man hierin die Symbole ein:

$$b^2 = u,\ b^2f^2 = v \text{ und } x^2 = p,\ D^2(a+\triangle a)^2 = q, \quad \ldots\ldots 39)$$

worin u und v als Variable zu betrachten sind, so können die Gleichungen 34) auch geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} p_1 u + v &= q_1 \\ p_2 u + v &= q_2 \\ &\vdots \\ p_n u + v &= q_n \end{aligned}\right\},$$

aus welchen die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [pp]\,u + [p]\,v &= [pq] \\ [p]\,u + n\,v &= [q] \end{aligned}\right\}$$

zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte von u und v folgen. Man hat dann

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{n\,[pq] - [p]\,[q]}{n\,[pp] - [p]\,[p]} \\ v &= \frac{[q]\,[pp] - [p]\,[pq]}{n\,[pp] - [p]\,[p]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 40)$$

Die mittleren Fehler der neuen Unbekannten lauten:

$$\triangle u = m\sqrt{Q_{11}}, \qquad \triangle v = m\sqrt{Q_{22}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 41)$$

worin der mittlere Fehler der Gewichtseinheit sich aus

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}$$

bestimmt und die Gewichtskoeffizienten aus den Gewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [pp]\,Q_{11} + [p]\,Q_{12} &= 1 \\ [p]\,Q_{11} + n\,Q_{12} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} [pp]\,Q_{21} + [p]\,Q_{22} &= 0 \\ [p]\,Q_{21} + n\,Q_{22} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

gerechnet werden.

Die gesuchten Größen b und f ergeben sich aus den Symbolen in Gleichungen 39) mit:

$$\left.\begin{aligned} b &= \sqrt{u} \\ f &= \sqrt{\frac{v}{u}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{XXX}$$

Um die mittleren Fehler $\triangle b$ und $\triangle f$ zu erhalten, hat man zu berücksichtigen, daß es sich um mittlere Fehler einer Funktion von Funktionen handelt, welche nach bekannten Sätzen der Methode der kleinsten Quadrate lauten:

$$\left.\begin{aligned} \triangle b^2 &= \left(\frac{\partial b}{\partial u}\right)^2 \triangle u^2 + 2\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v}\triangle u\,\triangle v + \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)^2 \triangle v^2 \\ \triangle f^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \triangle u^2 + 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\triangle u\,\triangle v + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \triangle v^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 42)$$

Da nun die partiellen Differentialquotienten sind:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial b}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2v}}, \quad \frac{\partial b}{\partial v} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{v}{u}}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} \end{aligned}\right\},$$

so resultiert nach Einführung dieser Werte in die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \triangle b &= \frac{1}{2}\frac{\triangle u}{\sqrt{u}} \\ \triangle f &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\triangle v^2}{uv} - \frac{2\triangle u\,\triangle v}{u^2} + \frac{\triangle v}{uv}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{XXXI}$$

Durch den eben gezeigten Vorgang ist man im Stande, auf indirektem Wege die Elemente der stereophotogrammetrischen Vermessung zu erhalten, d. i. b, f

und Δa, so daß, wenn die Koordinaten und die Parallaxe (x, y, a) irgend eines Punktes mit dem Photo-Stereokoordinatometer gemessen wurden, die räumlichen Koordinaten eines jeden Punktes durch die Gleichungen:

$$X = \frac{b}{a + \Delta a} x_1, \quad Y = \frac{b}{a + \Delta a} f, \quad Z = \frac{b}{a + \Delta a} y_1 \quad \ldots \quad 43)$$

gegeben sind.

Da außerdem durch dieses Verfahren noch die mittleren Fehler Δb, Δf und der mittlere Fehler der Parallaxe $m_{\Delta a}$ bekannt werden, die mittleren Fehler in den Messungsdaten des Photo-Stereokoordinators vorliegen, so läßt sich über die Genauigkeit der Punktbestimmung durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta X}{X} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2} \\ \frac{\Delta Y}{Y} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2} \\ \frac{\Delta Z}{Z} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 44)$$

der gewünschte Aufschluß geben.

Kennt man nun die Elemente der stereogrammetrischen Vermessung b, f und Δa, sowie ihre mittlere Fehler, so läßt sich die Verschwenkung der Platten bestimmen, ferner kann man auch entscheiden, ob die zweite Platte bei der Aufnahme eine vertikale Lage hatte oder nicht; außerdem vermag man anzugeben, ob die Richtungen der beiden Schlitten am Photo-Stereokoordinatometer auf einander senkrecht standen, bezw. die richtige Führung hatten.

Die Verschwenkung der Platten. Für die konstante Parallaxen-Korrektion, welche bestimmt wurde, hat man den Ausdruck:

$$\Delta a = f \cdot \operatorname{tg} \varphi = f \frac{\varphi'}{3.438'}$$

woraus

$$\varphi' = 3.438' \frac{\Delta a}{f} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{XXXII}$$

als die gewünschte Plattenverschwenkung resultiert.

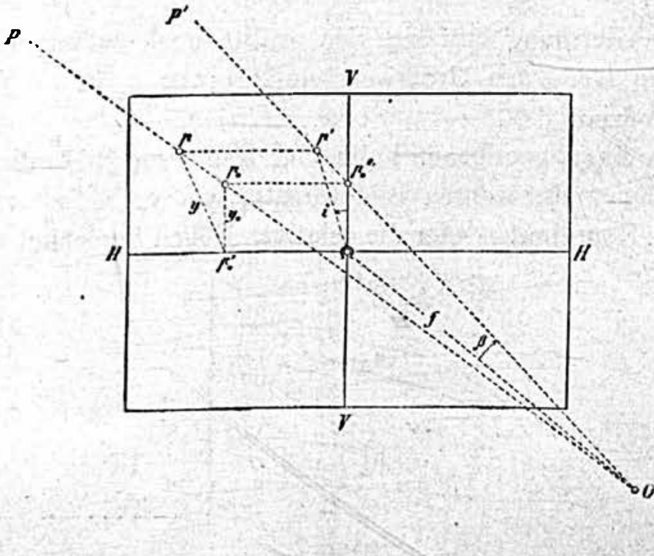

Fig. 6.

Einfluß der Plattenneigung. Angenommen die Bildplatte sei nicht vertikal, sondern um den Winkel i zur Vertikalebene geneigt (Figur 6) und $\overline{pp_0'} = \overline{p'\Omega} = y$ sei die auf der Bildplatte gemessenen Ordinate; ferner $\overline{p_0 p_0'} = \overline{p_0''\Omega} = y_0$ stelle die wahre Ordinate dar, welche bei vertikaler Lage der Platte erhalten würde. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $O\Omega p_0''$ und dem schiefwinkligen Dreiecke $O\Omega p'$ kann die Bilddistanz doppelt gerechnet werden; es ist, wenn β den Vertikalwinkel des Strahles $\overline{OP}$ darstellt:

$$f = y_0 \cot g\,\beta = \frac{\cos(\beta + i)}{\sin\beta}\,y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 45)$$

oder entwickelt und entsprechend reduziert:

$$y_0 \cos\beta = y\cos\beta\cos i - y\sin\beta\sin i = y\cos\beta - y\,.\,i\,.\,\sin\beta$$

oder $$y_0 = y - y\,.\,i\,.\,\mathrm{tg}\,\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 46)$$

Da nun $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{y_0}{f}$ ist, so ergibt sich nach Einführung in die Gleichung 46)

$$y_0 = y - \frac{y y_0}{f} i = y - \frac{y^2}{f} i$$

Die Korrektion in der Ordinate wird aus dem vorstehenden Ausdrucke erhalten mit:

$$\triangle y = y_0 - y = -\frac{y^2}{f} i = -\frac{y^2}{f}\,\frac{i'}{3.438'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{XXXIII}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

Der Einfluß einer Neigung der Platte auf die Ordinaten wächst mit dem Quadrate der Ordinate und dem Neigungswinkel i und nimmt mit der Bilddistanz f ab.

Die Plattenneigung i ergibt sich aus Gleichung XXXIII mit:

$$i' = 3.438'\,\frac{f}{y^2}\triangle y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{XXXIV}$$

Nennen wir $\triangle y = 0{\cdot}1$ *mm* die kleinste meßbare Änderung der Ordinate, so beträgt die zulässige Plattenneigung für diesen Fall:

$$i' = 344'\,\frac{f}{y^2}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 47)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die größte noch zulässige Plattenneigung i finden, wenn man für y den Größtwert einführt; so z. B. für $f = 250$ *mm* und $y = 100$ *mm* wird $i = 8{\cdot}6'$.

Hat man in einem gegebenen Falle eine Reihe von Bildordinaten $y_1, y_2 \ldots y_n$ gemessen, so können die wahren Bildordinaten $y_1^0, y_2^0 \ldots y_n^0$ aus den Gleichungen 35) für die z-Koordinaten oder die relativen Höhen berechnet werden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} y_1^0 &= \frac{a_1 + \triangle a}{b} h_1 \\ y_2^0 &= \frac{a_2 + \triangle a}{b} h_2 \\ &\vdots \\ y_n^0 &= \frac{a_n + \triangle a}{b} h_n \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 48)$$

Die Differenzen

$$\Delta y_1 = y_1^0 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_2^0 - y_2, \quad \ldots \quad \Delta y_n - y_n^0 - y_n \quad \ldots 49)$$

sind berechenbar, mithin die Plattenneigung:

$$\left.\begin{aligned} i' &= 3.438' \frac{f}{y_1^2} \Delta y_1 \\ i'' &= 3.438' \frac{f}{y_2^2} \Delta y_2 \\ &\vdots \\ i^{(n)} &= 3.438' \frac{f}{y_n^2} \Delta y_n \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 50)$$

sonach der wahrscheinlichste Wert der Neigung i:

$$i = \frac{1}{n}(i' + i'' + \ldots + i^{(n)}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{XXXV}$$

mit dem mittleren Fehler:

$$\Delta i = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{XXXVI}$$

worin $\quad i - i' = v_1, \; i - i'' = v_2 \ldots i - i^{(n)} = v_n$

die Verbesserungen bedeuten.

Einfluß einer unrichtigen Plattenführung. Die wahren Plattenkoordinaten des Bildpunktes p (Fig. 7) seien $\overline{\Omega p'} = x_0$ und $\overline{pp'} = y_0$. Wird die Platte solange in der Richtung der Führung $\overline{\Omega P}$ (strichelt-punktierte Linie) bewegt, bis der Punkt p nach Q kommt, so wird das Stück $\overline{Q\Omega} = y$ gefunden.

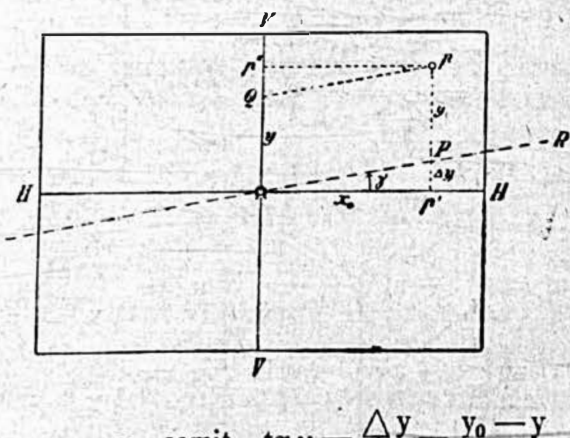

Fig. 7.

Es ist also:

$$\Delta y = y_0 - y \quad \text{somit} \quad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\Delta y}{x_0} = \frac{y_0 - y}{x_0} \quad \ldots \mathrm{XXXVII}$$

Sind also $y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0$ die aus den Gleichungen 48) gerechneten, wahren Bildordinaten und $y_1, y_2 \ldots y_n$ die mit dem Photo-Stereokoordinatometer gemessenen Werte, so sind nach Gleichung 49) die Ordinaten-Korrektionen bekannt, somit

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\gamma' &= \frac{\Delta y_1}{x_1^0} = \frac{y_1^0 - y_1}{x_1^0} \\ \mathrm{tg}\,\gamma'' &= \frac{\Delta y_2}{x_2^0} = \frac{y_2^0 - y_2}{x_2^0} \\ &\vdots \\ \mathrm{tg}\,\gamma^{(n)} &= \frac{\Delta y_n}{x_n^0} = \frac{y_n^0 - y_n}{x_n^0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 51)$$

und daraus den wahrscheinlichsten Wert für den Neigungswinkel γ:

$$\gamma = \frac{1}{n}(\gamma' + \gamma'' + \ldots + \gamma^{(n)}) \quad \ldots\ldots \quad \text{XXXVIII}$$

mit dem mittleren Fehler:

$$\Delta\gamma = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}, \quad \ldots\ldots \quad \text{XXXIX}$$

wobei $\gamma - \gamma' = v_1,\ \gamma - \gamma'' = v_2 \ldots \gamma - \gamma^{(n)} = v_n$ . . . . . . 52)

die Verbesserungen darstellen.

2. Sehr oft wird sich in der Praxis der Fall ergeben, eine stereophotogrammetrische Aufnahme auf ihre Genauigkeit und Brauchbarkeit zu prüfen, wenn die Elemente der Vermessung b und f, nebst den mittleren Fehlern $\triangle$b und $\triangle f$, sowie die Lage und Höhe von Kontrollpunkten gegeben sind.

Ehe die Aufstellung des stereophotogrammetrischen Instrumentes geprüft wird, handelt es sich um die Parallaxen-Korrektion $\triangle$a; da die Elemente b und f bekannt sind, so hat man nur eine Unbekannte $\triangle$a, zu deren Bestimmung die Kenntnis eines Kontrollpunktes vollends ausreicht.

Handelt es sich um die Genauigkeitsangabe für die Parallaxen-Korrektion $\triangle$a, so muß man mindestens drei Kontrollpunkte als gegeben annehmen; man wird in der Praxis stets trachten, auf zusammengehörigen Plattenpaaren drei Kontrollpunkte zu erhalten:

Zur Bestimmuug von $\triangle$a hat man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \frac{b}{a_1 + \triangle a}\sqrt{x_1^2 + f^2} \\ D_2 &= \frac{b}{a_2 + \triangle a}\sqrt{x_2^2 + f^2} \\ D_3 &= \frac{b}{a_3 + \triangle a}\sqrt{x_3^2 + f^2} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad 53)$$

aus welchem folgt:

$$\left.\begin{aligned} \triangle a' &= \frac{b}{u_1} - a_1 \\ \triangle a'' &= \frac{b}{u_2} - a_2 \\ \triangle a''' &= \frac{b}{u_3} - a_3 \end{aligned}\right\}, \text{ worin } \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{D_1}{\sqrt{x_1^2 + f^2}} \\ u_2 &= \frac{D_2}{\sqrt{x_2^2 + f^2}} \\ u_3 &= \frac{D_3}{\sqrt{x_3^2 + f^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 54)$$

Es ist demnach der wahrscheinlichste Wert der Parallaxen-Verbesserung:

$$\triangle a = \tfrac{1}{3}(\triangle a' + \triangle a'' + \triangle a''') \quad \ldots\ldots \quad \text{XL}$$

und somit der mittlere Fehler:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{2}}, \quad \ldots\ldots \quad \text{XLI}$$

worin die Verbessserungen v lauten:

$$\triangle a - \triangle a' = v_1,\ \triangle a - \triangle a'' = v_2,\ \triangle a - \triangle a''' = v_3 \quad \ldots \quad 55)$$

Der mittlere Fehler in der Parallaxen-Korrektion darf die Größe von $\pm$ 0·01 *mm* nicht übersteigen.

Ist die Parallaxen-Korrektion $\triangle a$ bekannt, so rechnet man die Bildordinaten:

$$y_1{}^0 = \frac{a_1 + \triangle a}{b} h_1, \quad y_2{}^0 = \frac{a_2 + \triangle a}{b} h_2, \quad y_3{}^0 = \frac{a_3 + \triangle a}{b} h_3, \quad . \quad . \quad 56)$$

worauf die Differenzen:

$$\triangle y_1 = y_1{}^0 - y_1, \quad \triangle y_2 = y_2{}^0 - \triangle y_2, \quad \triangle y_3 = \triangle y_3{}^0 - y_3 \quad . \quad . \quad 57)$$

bestimmt werden.

Nun ergeben sich die für die Güte in der Aufstellung des Stereophototheodolites maßgebenden Größen.

Für die Plattenverschwenkung φ folgt nach Gleichung XXXII:

$$\varphi' = 3.438' \frac{\triangle a}{f}$$

Die Plattenneigung ergibt sich aus Gleichung XXXIV, resp. 50) und XXXV mit:

$$i = \tfrac{1}{3}(i' + i'' + i'''), \quad i = 3.438 \frac{f}{y^2} \triangle y$$

wenn für $\triangle y$ die Werte für 57) eingeführt werden; und bezüglich der Plattenführung rechnet sich der maßgebende Winkel γ nach den Gleichungen 51) und XXXVIII mit:

$$\gamma = \tfrac{1}{3}(\gamma' + \gamma'' + \gamma'''), \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\triangle y}{x^0} = \frac{y^0 - y}{x.^0},$$

worin $\triangle y$ die früher angegebenen Differenzen bezeichnen.

Selbstredend kann man, da überschüssige Beobachtungen vorliegen, auch die mittleren Fehler dieser Größen nach den Gleichungen XXXVI und XXXIX finden.

Anmerkung. Da die mit dem Photo-Stereokoordinatometer erhaltenen Werte eventuell von γ abhängig sein können, so liegt darin der Grund, die Parallaxen-Korrektion $\triangle a$ nicht aus den Gleichungen:

$$h_1 = \frac{b}{a_1 + \triangle a} y_1, \quad h_2 = \frac{b}{a_2 + \triangle a} y_2, \quad h_3 = \frac{b}{a_3 + \triangle a}$$

zu berechnen. Die gemessenen Werte y_1, y_2, y_3 sollen, wenn ein Fehler φ in der Führung vorhanden ist, zur Bestimmung von $\triangle a$ nicht verwendet werden.

Zweiter Fall: In der aufzunehmenden Terrainpartie sind trigonometrisch bestimmte Punkte nicht gegeben.

In diesem Falle muß die stereophotogrammetrische Aufnahme als eine selbstständige angesehen werden und es müssen die Elemente einer solchen Vermessung, d. i. die Größe der Basis b und der Wert der Brennweite f des Aufnahmeobjektes ermittelt werden.

Eine sehr leicht zu erfüllende Forderung der Stereophotogrammetrie ist das genaue Messen der Basis auf indirektem Wege mittels der in Österreich vorzüglich hergestellten optischen Distanzmesser mit Schraubenmikrometer, welche mit Leichtigkeit eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ der Länge erreichen lassen.

Ebenso einfach kann die Brennweite des Aufnahmeobjektives entweder direkt mit einem Fokometer oder indirekt auf photographischem Wege bis auf $\frac{1}{1000}$ der Brennweite bestimmt werden, so daß die Elemente einer stereophotogrammetrischen Aufnahme, d. i. b und f unter allen Umständen mit der angegebenen Schärfe als gegeben betrachtet werden können.

Die Genauigkeit einer solch selbständigen stereophotogrammetrischen Aufnahme ist jedoch nur dann als bestimmt gegeben anzusehen, wenn außer der relativen Genauigkeit der Basis und der Brennweite, d. i. $\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{1000}$ noch der Nachweis geliefert wird, daß die beiden Platten während der Exposition bis auf wenige Sekunden genau in einer Ebene lagen, was durch einen oder mehrere Probepunkte nachgewiesen werden kann.

* *
*

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle, meinem hochverehrten Lehrer, dem Herrn Hofrate Prof. Dr. A. Schell, der mich bei der Abfassung dieses Aufsatzes mit seinem bewährten Rate förderte, meinen tiefgefühlten Dank zu sagen.

Die königlich bayrischen Saalforste,

ihre Entstehung, Belastung und deren grundbücherliche Durchführung.

Von August Gabrielli, k. k. Geometer in Zell am See.

Auf Grund der zwischen Österreich und Bayern am 18. März 1829 geschlossenen Konvention über die Forst- und Salinenverhältnisse wurden der kön. bayr. Regierung auf dem k. k. österr. Landesgebiete zur Deckung des Holzbedarfes der Reichenhaller Salzwerke die bereits seit Jahrhunderten diesem Zwecke dienenden großen Besitzungen im Loferer und Saalfeldner Gebiete, die sogenannten Saalforste, mit Ausnahme der darin befindlichen, den k. k. Untertanen verbleibenden oder ihnen durch eigene Stipulation der Konvention zugewiesenen Güter, Ehealpen, Eheblößen, Mähder und Etzen, als volles, unwiderrufliches Grundeigentum und für ewige Zeiten steuer- und abgabenfrei, jedoch unter kais. kön. Souveränität überlassen. (Art. I bis III.)

Die kön. bayr. Regierung übernimmt (Art. XVIII bis XXV) mit den Saalforsten zugleich auch die Verpflichtung, einen Teil ihres Holzertrages für die Bedürfnisse jener k. k. Untertanen, öffentlicher Gebäude und Anlagen abzugeben, welche bisher mit ihrem Holzbezuge an die bei Bayern verbleibenden oder an Bayern neu überlassenen Saalforste angewiesen waren, und zwar den Bedarf derselben an Brenn-, Bau-, Zaun-, Dach- und Badholz zu decken, soferne nicht dieser Bedarf schon durch den Ertrag von Eigentumswäldern, Hofsachen und Freiwaldungen gedeckt erscheint.

Diese Holzbezugsrechte wurden von einer gemischten Kommission genau fixiert und in den Liquidationsprotokollen handschriftlich niedergelegt.

Ferner wird (Art. XXVI) den hiezu berechtigten Gütern und Alpen die Weidebenützung in den Saalforsten in der früheren Ausdehnung derart und unentgeltlich gestattet, als es sich mit dem Zwecke der Erhaltung des Waldbestandes verträgt.

Diese Weiderechte wurden, falls sie nicht schon durch bestehende Urkunden nachgewiesen waren, nach den bisherigen Gepflogenheiten festgelegt und in neu errichtete Urkunden, die sogenannten Eichbriefe niedergeschrieben.

Dies der kurze Auszug aus den Artikeln I bis XXVI der Salinenkonvention, welche für die grundbücherlichen Eintragungen in Betracht kommen.