Paper-ID: VGI_190740

# Zur geometrischen Konstruktion der Normalgleichungen

W. Láska [1]

[1] *o. ö. Professor an der k. k. techn. Hochschnle in Lemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **5** (21–22), S. 333–335

1907

BibTeX:

```
@ARTICLE{Laska_VGI_190740,
Title = {Zur geometrischen Konstruktion der Normalgleichungen},
Author = {L{\'a}ska, W.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {333--335},
Number = {21--22},
Year = {1907},
Volume = {5}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

# ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

**Redaktion:** Prof. E. Doležal und Obergeometer L. v. Klatecki.

Doppelheft Nr. 21—22. **Wien, am 1. November 1907.** V. Jahrgang.

## Zur Geometrischen Konstruktion der Normalgleichungen.

Von Dr. **W. Láska**, o. ö. Professor an der k. k technischen Hochschule in Lemberg.

Die geometrischen Konstruktionen der Ausgleichsrechnung, obschon sie oft keine Zeitersparnis gegenüber der numerischen Rechnung bringen, haben doch vor dieser den Vorteil der Anschaulichkeit voraus. Von diesem Standpunkte aus möchte ich die in den nachfolgenden Zeilen gegebene geometrische Konstruktion der Normalgleichungen aufgenommen sehen.

Die Normalgleichungen sind bekanntlich Summengleichungen, welche entstehen, wenn die gegebenen Gleichungen mit entsprechenden Gewichten multipliziert und dann addiert werden. Um das geometrische Äquivalent dieser Operation zu erhalten, betrachten wir den einfachsten Fall zweier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 \\ g_2 &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned}\right\},$$

welche wir mit den Gewichten

$$p_1, \quad p_2$$

multiplizieren und dann addieren, so daß

$$g_{12} = g_1 p_1 + g_2 p_2$$

wird, wobei

$$g_{12} \equiv a_{12} x + b_{12} y + c_{12}$$

ist, und

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_1 p_1 + a_2 p_2 \\ b_{12} &= b_1 p_1 + b_2 p_2 \\ c_{12} &= c_1 p_1 + c_2 p_2 . \end{aligned}$$

Wird angenommen, daß die Geraden

$$g_1, \quad g_2$$

gezeichnet vorliegen, so fragt es sich, wie $g_{12}$ zu konstruieren ist.

Vor allem ist klar, daß die Gerade $g_{12}$ durch den Schnittpunkt der Geraden $g_1$, $g_2$ gehen muß (Fig. 1).

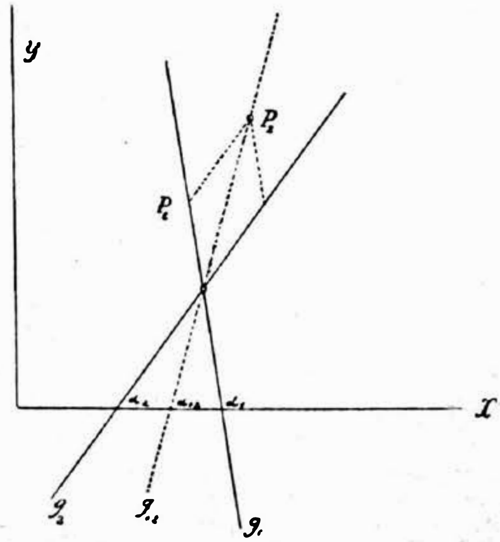


*Fig. 1.*

Sodann ist (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen)

$$\text{tang}\ \alpha_1 = \frac{a_1}{b_1} \qquad \text{tang}\ \alpha_2 = \frac{a_2}{b_2},$$

wobei $\alpha_1$, $\alpha_2$ die Schnittwinkel der Geraden $g_1$, $g_2$ mit der positiven X-Richtung bezeichnen.

Mat hat ferner

$$\text{tang}\ \alpha_{12} = \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2}{b_1 p_1 + b_2 p_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ 1)$$

Denkt man sich die Gerade $g_{12}$ in bekannter Weise der Kräftezusammenlegung mit Hilfe eines Parallelograms konstruiert, so folgt:

$$\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_{12})}{\sin(\alpha_{12} - \alpha_2)} = \frac{P_2}{P_1},$$

wobei $P_1$ und $P_2$ die Seiten des Kräftenparallelograms sind.

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$\text{tang}\ \alpha_{12} = \frac{P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2}{P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ 2)$$

Die Gleichungen 1) und 2) werden gleich, wenn

$$\lambda P_1 \sin\alpha_1 = a_1 p_1, \qquad \lambda P_2 \sin\alpha_2 = a_2 p_2$$
$$\lambda P_1 \cos\alpha_1 = b_1 p_1, \qquad \lambda P_2 \cos\alpha_2 = b_2 p_2.$$

Um die Normalgleichungen zu erhalten, hat man bekanntlich

$$p_1 = a_1 \qquad p_2 = a_2$$

resp. $\quad p_1 = b_1 \qquad p_2 = b_2$

zu setzen. Bleibt man beim ersten Falle stehen, so folgt:

$$\lambda P_1 = \frac{a_1^2}{\sin\alpha_1} \qquad \lambda P_2 = \frac{a_2^2}{\sin\alpha_2},$$

wobei $\lambda$ ein Proportionalfaktor ist.

Die Konstruktion bietet keine Schwierigkeiten und ist in der Fig. 2 gegeben. Man hat nur durch den Schnittpunkt der Geraden $g_1, g_2$ eine zur X-Axe parallele Gerade zu ziehen.

Zwei in der Entfernung $\frac{a_1^2}{\lambda}$ resp. $\frac{a_2^2}{\lambda}$

von dieser Geraden gezogene Parallelen schneiden die Geraden $g_1$, resp. $g_2$ in Punkten, deren Entfernungen von dem Schnittpunkte der Geraden $g_1, g_2$ eben die gesuchten Größen $P_1$ und $P_2$ sind.

Wird die Gerade $g_{12}$ in gleicher Weise mit einer weiteren $g_3$ u. s. w. kombiniert, so erhält man zum Schlusse eine Gerade, welcher der einen Normalgleichung entspricht.

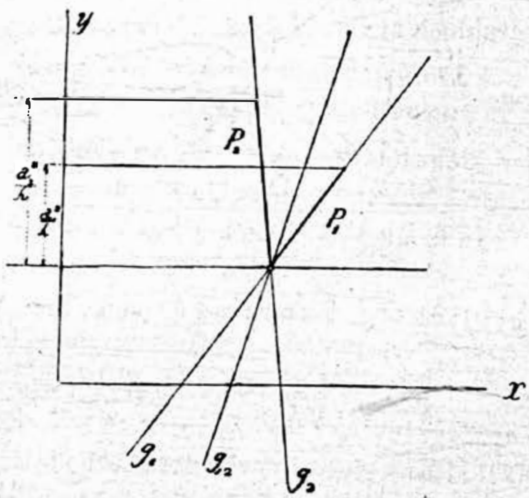


*Fig. 2.*

Ebenso ist die Gerade für die zweite Normalgleichung zu konstruieren. Der Schnittpunkt beider gibt dann diejenigen Werte von x und y, welche der Methode der kleinsten Quadrate entsprechen.

Die Konstruktion läßt sich bei Anwendung der Lehren der graphischen Statik wesentlich vereinfachen, wovon jedoch hier abgesehen werden soll, nachdem ein Bedürfnis der praktischen Anwendung dieser Gleichungen nicht vorliegt.

---

# Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichungsrechnung.

Von Oberingenieur **S. Wellisch.**

(Schluß).

Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß man, um durch Ausgleichung mehrerer Strahlenschnitte zu den von Fuchs erwarteten Werten zu gelangen, die einfache Methode der kleinsten Quadrate nicht anwenden darf.

Versuchen wir es also mit einer anderen Methode, z. B. mit dem Bertotschen Verfahren, nach welchem den einzelnen Geraden Gewichte anzuweisen