Das Problem der größten Digressionen in geometrischer Darstellung

Joseph J. Adamczik [1]

[1] *Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (1), S. 3–7

1908

BibTEX:

```
@ARTICLE{Adamczik_VGI_190801,
Title =  {Das Problem der gr{\"o}{\ss}ten Digressionen in geometrischer
   Darstellung},
Author =  {Adamczik, Joseph J.},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {3--7},
Number =  {1},
Year =  {1908},
Volume =  {6}
}
```

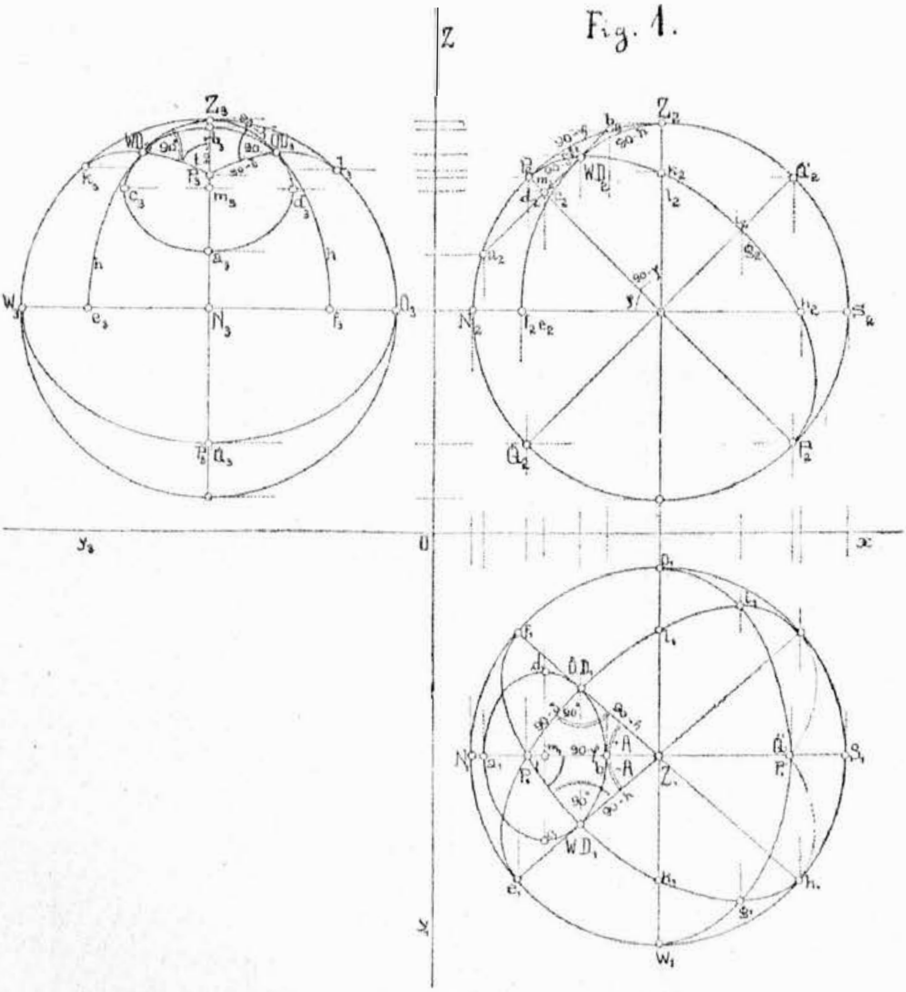
holtenmalen sich unentwegt für uns eingesetzt hat; lassen wir daher seiner Leitung ein dankbares Vertrauen angedeihen. Möge unter seiner bewährten Führung das anbrechende Jahr den durch so viele herbe Enttäuschungen umwölkten Horizont unserer Hoffnungen zu einem heiteren Ausblicke auf eine freudigere Zukunft lichten.

Das Problem der größten Digressionen in geometrischer Darstellung.

Von Professor Jos. Adamczik in Prag.

Ein Gestirn, dessen Deklination δ größer ist als die geographische Breite φ des Beobachtungsortes, gelangt niemals in den I. Vertikal. Diejenigen zwei Stellungen des Gestirnes, in welchen sein Azimut den größten Wert rechts und links vom Meridiane erreicht, in welchen sich also das Gestirn in der größten östlichen und westlichen Ausweichung aus der Meridianebene befindet, heißen seine größten Digressionen. In diesen beiden Stellungen verändert sich sein Azimut nur sehr

Fig. 1.



wenig und sehr langsam, so daß man auch vom «stationären Azimut» sprechen kann. Die Beobachtungen eines solchen Gestirnes im Augenblicke seiner größten Digression liefern daher gute Azimut-, bezw. gute Meridian-Bestimmungen.

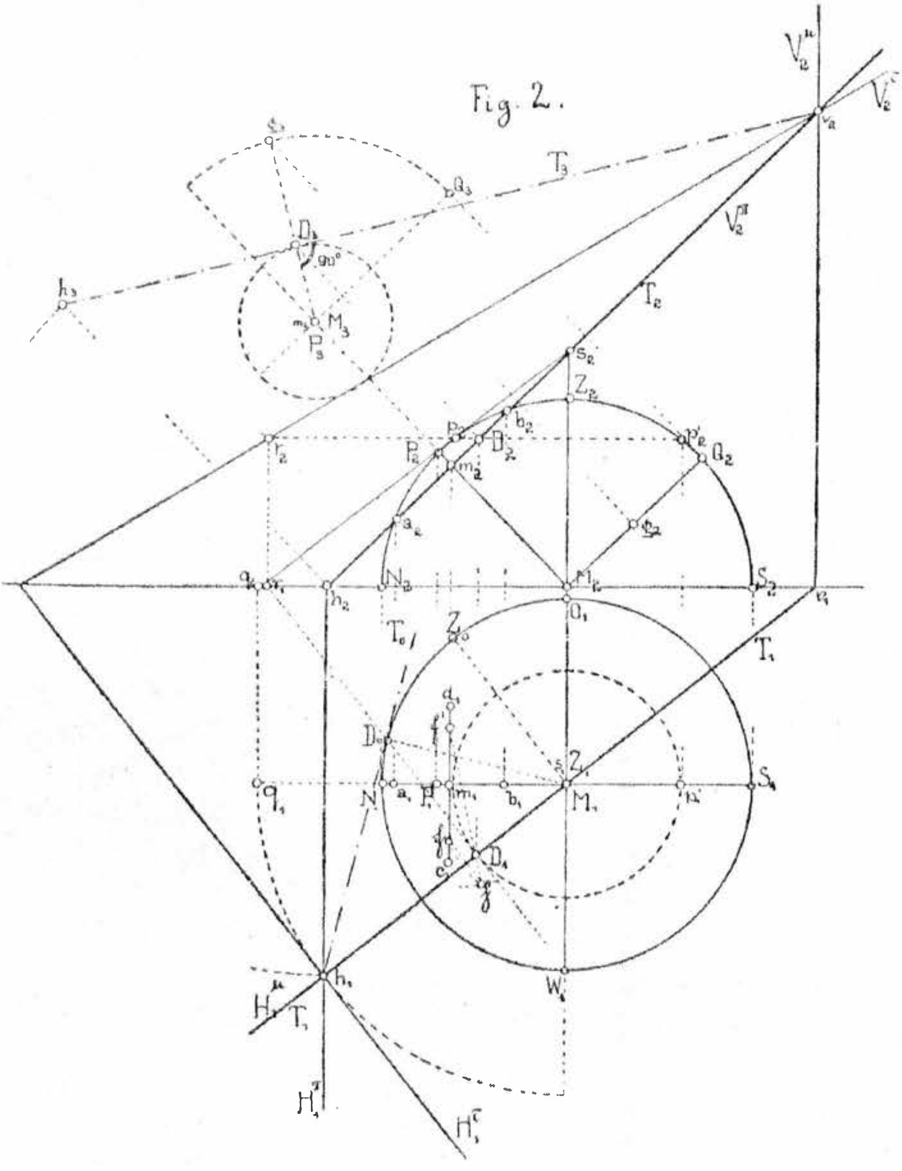
Wir wollen nun zunächst diesen Vorgang nach den Regeln der darstellenden Geometrie in den drei Haupt-Projektionsebenen zur Darstellung bringen. In Fig. 1 ist O der Koordinaten-Ursprung und die Kreuzrißebene ist linksseitig gedacht. Die Vertikal-Projektionsebene ist parallel zur Meridianebene angeordnet, so daß der Umriß der Vertikalprojektion der Sphäre mit dem Meridiankreise, der Umriß der Horizontalprojektion mit dem Horizontalkreise und der Umriß der Kreuzrißprojektion mit dem I. Vertikale zusammenfallen. Mit der gegebenen Polhöhe φ des betreffenden Beobachtungsortes ergibt sich sofort die Lage der Weltachse und des Äquators. Mit der bekannten Deklination $\delta = \widehat{Q_2 a_2} = \widehat{Q_2' b_2}$ erhält man den (Aequatorial-)Parallelkreis des Gestirnes in der Vertikalprojektion durch die Gerade $a_2 b_2$ dargestellt. Dies ist die tägliche Bahn des Gestirnes. Dieser Parallelkreis stellt sich in der Horizontalprojektion als Ellipse dar, u. zw. ist die große Achse $c_1 d_1$ ihrer Länge nach gleich der wahren Größe des Parallelkreis-Durchmessers, also gleich der Strecke $a_2 b_2$ und die kleine Achse gegeben durch $a_1 b_1$. In der Kreuzrißprojektion bildet sich der Parallelkreis ebenfalls als Ellipse ab mit der großen Achse $c_3 d_3$ in wahrer Größe des Parallelkreis-Durchmessers, während sich in $a_3 b_3$ die kleine Achse ergibt.

In der Stellung der größten westlichen, oder östlichen Ausweichung muß der Vertikalkreis des Gestirnes seinen Parallelkreis berühren. Ziehen wir also von Z_1 die Tangenten an die Horizontalprojektion des Parallels, so erhalten wir in $W.D_1$ die westliche und in $Ö D_1$ die östliche Digression. $Z_1 e_1$ ist die Horizontalprojektion des Vertikalkreises für den Augenblick der westlichen und $Z_1 f_1$ jene für den Zeitpunkt der östlichen Digression. Die zwei sich berührenden Kreise, nämlich der Parallel und Vertikal, liegen in verschiedenen Ebenen. Im Berührungspunkte müssen aber beide Kreise eine gemeinschaftliche Tangente T haben. Diese gemeinschaftliche Tangente T ist die Schnittlinie der beiden Kreisebenen.

Wir wollen nun in Figur 2 dieses Problem der größten Digression rein geometrisch auffassen und darstellen.

Um an Raum zu sparen, denken wir uns nur die hier allein in Betracht kommende, obere, sichtbare Kugelhälfte dargestellt, so daß die Horizontal-Projektionsebene mit der Horizontalebene durch den Kugelmittelpunkt zusammenfällt. Wir wollen ferner die geometrischen Konstruktionen nur für die westliche Digression zur Durchführung bringen. Wir haben zunächst die geometrische Aufgabe zu lösen, durch den gegebenen Punkt Z_1 an die, durch ihre Achsen $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ gegebene Ellipse eine Tangente zu ziehen. Nach Bestimmung der beiden Brennpunkte f und f' setzen wir den Zirkel in Z_1 ein und ziehen mit dem Radius $Z_1 f$ einen Kreisbogen, sodann nehmen wir die große Achse $c_1 d_1$ in den Zirkel und beschreiben aus dem zweiten Brennpunkte f' einen Kreisbogen. Wird der Schnittpunkt $\mathfrak{h}$ dieser beiden Bogen mit f' verbunden, so ist dies der Brennstrahl für den Tangierungspunkt D_1. Dieser Berührungspunkt D_1 ergibt sich nun im Schnitte dieses Strahles $f' \mathfrak{h}$ mit der Senkrechten, welche wir von Z_1 auf die

Fig. 2.



Verbindungsgerade $f\mathfrak{h}$ fällen. $Z_1 D_1$ ist die Horizontalprojektion T_1 der gemeinschaftlichen Tangente T.

Die Verlängerung der Geraden $a_2 b_2$ ergibt die Vertikalspur $V_2{}^\pi$ der Parallelkreisebene π, deren Horizontalspur $H_1{}^\pi$ senkrecht zur X-Achse steht, da dies eine vertikal projizierende Ebene ist. Die Vertikalprojektion T_2 der oben erwähnten, gemeinschaftlichen Tangente T muß mit $V_2{}^\pi$ zusammenfallen.

Alle meridionalen Tangenten, welche die Kugel längs eines horizontalen Parallelkreises berühren, schneiden sich in der Vertikal-Linie $M_2 Z_2$, welche die Achse für den Berührungskegel an diesen horizontalen Parallelkreis vorstellt. Der Schnittpunkt s_2 der Verlängerung von $M_2 Z_2$ mit T_2 ist daher die Vertikalprojektion der Spitze eines Berührungskegels längs eines durch D_2 gehenden horizontalen Parallels. Ziehen wir nun die Tangente $s_2 p_2$ an den Kugelhauptmeridian, so erhalten wir dadurch den vertikalen Umriß dieses Berührungskegels, dessen Basiskreis durch den Radius $M_1 q_1$ gegeben ist. Die Vertikalprojektion D_2 der westlichen Digression ergibt sich unabhängig von der bereits bestimmten Horizontalprojektion D_1 im Schnittpunkte von $a_2 b_2$ mit dem Horizontalkreise $p_2 p_2'$. Selbstverständlich hätte die Bestimmung von D_2 auch mit Benützung von D_1 mit Hilfe des Horizontal-Parallels in einfacher Weise geschehen können.

h_2 ist die Vertikalprojektion des Horizontal-Spurpunktes der Tangente T; h_1 muß auf dem Basiskreis des Berührungskegels liegen, wodurch sich wieder T_1 ergibt, welches also bereits mehrfach bestimmt erscheint.

Bezeichnen wir die Vertikalkreisebene für die größte Digression mit μ, so ist deren Horizontalspur $H_1\mu$ zusammenfallend mit T_1 und die Vertikalspur $V_2\mu$ senkrecht zur X-Achse. Wir haben also in v_1 und v_2 die beiden Projektionen des Vertikalspurpunktes der Tangente T gegeben. Man ersieht also, wie sich T als Schnittlinie der Parallelkreisebene π und der Vertikalebene μ darstellt.

Denken wir uns die Spur $V_2\pi$ als die neue Achse einer dritten Hilfsprojektionsebene π, so braucht man nur $m_2 m_3$ gleich dem Abstande m_1 von der X-Achse zu machen, um in m_3 den Mittelpunkt des Äquatorial-Parallelkreises in dritter Projektion zu erhalten. Macht man ferner $h_2 h_3$ gleich $h_2 h_1$, so ergibt sich in T_3 die dritte Hilfsprojektion von T und damit wieder D_3, woraus sich D_2 und D_1 rückbestimmen lassen, unabhängig von den früheren Bestimmungen. Hiebei müßte der Abstand des Punktes D_1 von der X-Achse gleich gemacht werden der Strecke $D_2 D_3$. In der Verbindungsgeraden $P_3 D_3$ erhält man die dritte Hilfsprojektion des Deklinationskreises für die größte Digression und mit den Halbachsen $M_2 P_2$ und $M_2 g_2$ ließe sich die Vertikalprojektion dieses Deklinationskreises leicht zeichnen.

Man sieht in dieser dritten Projektion deutlich, wie der Deklinationskreis senkrecht stehen muß auf der Tangente T und da T auch eine Tangente an den Vertikalkreis ist, so wird in der Stellung der größten Digression auch der Deklinationskreis senkrecht zum Vertikalkreis stehen müssen.

Denken wir uns diesen Vertikalkreis in der horizontalen Projektionsebene um seine Spur $H_1\mu$ umgelegt, so gelangt der umgelegte Zenitpunkt nach Z_0, die umgelegte Tangente ist T_0 und D_0 die Umlegung von D. Die Strecke $D_1 D_0$ ist gleich dem Abstande des Punktes D_2 von der X-Achse. Hier sieht man am deutlichsten, wie T auch als Tangente des Vertikalkreises μ auftritt. Die Tangente T muß aber naturgemäß auch in der Berührungsebene τ gelegen sein, welche die Kugel im Punkte D berührt. Konstruieren wir also die Horizontalspur $H_1\tau$ als Tangente an den Basiskreis des Berührungskegels, gehend durch h_1 und bestimmen ferner mittelst der horizontalen Spurparallelen $D_1 r_1$ die Vertikalspur $V_2\tau$ dieser Berührungsebene, so muß diese auch durch v_2 gehen. T erscheint demnach als die Schnittlinie der drei Ebenen π, μ und τ.

Kehren wir nun zur Figur 1 zurück, so wäre allenfalls noch zu bemerken, daß in der Kreuzrißprojektion nur die hintere Kugelhälfte zur Darstellung gebracht ist, so wie sich der Anblick ergibt, wenn man sich die hier belanglose vordere Kugelhälfte ganz wegdenkt. Man sieht in dieser Figur die beiden für die Rechnung maßgebenden, rechtwinkeligen, sphärischen Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Hypotenuse ZP und den rechten Winkeln in den Digressions-Stellungen in allen drei Hauptprojektionen exakt dargestellt.

Als Schlußwort sei noch folgendes hinzugefügt: Jedenfalls ist eine, in allen Teilen exakte, jeden Zweifel und jede Unsicherheit ausschließende Darstellung jeder anderen, weniger vollkommenen vorzuziehen. Weiters möchte ich aber auch wieder einmal einer intensiveren Pflege und Anwendung der darstellenden Geometrie auf dem Gebiete der Geodäsie das Wort reden, wie ich dies schon wiederholt getan habe. (Siehe des Verf. Aufsätze in der «Z. f. V.», Jg. 1907: «Über rein geometrische Kartenprojektionen», Heft 7 und «Über Sonnenuhrkonstruktionen», Heft Nr. 11).

*

Anmerkung der Redaktion. Es ist keine unbekannte Tatsache, daß das Raumvorstellungsvermögen der Studierenden von Hochschulen technischer Richtung vielfach andern Kenntnissen zurücksteht und vielleicht nicht zuletzt aus dem Grunde, weil den Studierenden zu wenig Anregung zum gründlichen Nachdenken über räumliche Probleme gegeben wird.

Der Hochschul-Lehrer soll trachten, wo es nur möglich ist, die darstellende Geometrie in seinen Fächern anzuwenden; wir begrüßen daher die Aufsätze des Kollegen Prof. J. Adamczik, welche er in seinem Schlußworte anführt und von welchen wir neben dem vorstehend publizierten noch ein anderes schönes Beispiel über die Libelle besitzen, aufs wärmste; zeigen doch diese Arbeiten, daß die darstellende Geometrie in der Geodäsie mit großem Nutzen Verwendung finden kann. *D.*

Ein Näherungsverfahren
in der Methode der kleinsten Quadrate.

Von Prof. **Karl Fuchs** in Preßburg.

I.

Es sei eine Reihe von linearen Gleichungen gegeben:

$$a_1 x + b_1 y + \dots = l_1$$
$$a_2 x + b_2 y + \dots = l_2 \qquad \dots\dots\dots\dots \quad 1)$$
$$\dots\dots$$

Wenn wir die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten $x\ y \dots$ mittelst der Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate berechnen wollen, dann müssen wir vor allem die Normalkoeffizienten berechnen und das ist eine überaus lästige Arbeit. Es soll hiemit ein Näherungsverfahren angegeben werden, das uns ganz dieselben wahrscheinlichsten Werte gibt, wie die Normalgleichungen, ohne daß wir die Normalkoeffizienten zu berechnen hätten. Da die Theorie des Verfahrens nicht leicht verständlich ist, wenn man nicht weiß, wo die Sache hinauswill, so soll zunächst das Verfahren selbst beschrieben werden, ohne alle Begründungen, und zwar in seiner ersten, umständlichen, wenig versprechenden Form. Die Begründung und zweckmäßige Umformung des Verfahrens soll später folgen.

1. Bevor wir an die Arbeit gehen, transformieren wir die gegebenen Gleichungen 1) so, daß wir jede einzelne Gleichung durch die Summe ihrer Koeffizienten dividieren. In der neuen Form bezeichnen wir die Gleichungen so: