Paper-ID: VGI_190806

Reduktion der Zenitdistanzen des Polaris für Polhöhenbestimmungen

Norbert Herz [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (2), S. 46–49

1908

Diese Methode der Annäherung führt offenbar zu denselben wahrscheinlichsten Werten wie die Normalgleichungen; man hat aber den Vorteil, die Normalkoeffizienten weder berechnen noch eliminieren zu müssen.

2. Die beschriebene Methode fördert besser, wenn wir die Unbekannten paarweise verbessern. Wenn wir beispielsweise gleichzeitig x_0 um ξ, y_0 um η verbessern, dann wächst der Widerspruch λ_1 um $a_1\xi + b_1\eta$; analoges gilt für alle λ_i und die neue Quadratsumme der Widersprüche ist:

$$(\lambda_1 + a_1\xi + b_1\eta)^2 + (\lambda_2 + a_2\xi + b_2\eta)^2 + \ldots \quad \ldots\ldots \quad 47)$$
$$= [\lambda^2] + 2[a\lambda]\xi + 2[b\lambda]\eta + [a^2]\xi^2 + 2[ab]\xi\eta + [b^2]\eta^2$$

Dieser Ausdruck zeigt uns, daß der Zuwachs $\triangle$ der Quadratsumme $[\lambda^2]$ als Funktion von ξ und η durch den Paraboloid gegeben ist:

$$\triangle = 2[a\lambda]\xi + 2[b\lambda]\eta + [a^2]\xi^2 + 2[ab]\xi\eta + [b^2]\eta^2$$

und diese Fläche geht durch den Koordinatenursprung $\xi = o$, $\eta = o$, $\triangle = o$.

Das System der Incremente ξ, η, die dieselbe Änderung $\triangle =$ konst. von $[\lambda^2]$ geben, ist durch eine Ellipse ausgedrückt.

Durch Differentiation von 44) finden wir, unter welchen Bedingungen die Quadratsumme $[\lambda^2]$ am ausgiebigsten herabgedrückt wird:

$$[a\lambda] + [a^2]\xi + [ab]\eta = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48)$$
$$[b\lambda] + [ab]\xi + [b^2]\eta = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Das sind die Normalgleichungen für zwei Unbekannte, und durch graphische Elimination finden wir leicht die angenäherten Werte der günstigsten Verbesserungen ξ und η und auch diese Werte runden wir am besten ab.

Wenn wir in den Gleichungen 48), 49) die Konstante $[ab]$ gleich Null setzen, dann fallen die Gleichungen mit den Gleichungen 44), 46) für Einzelverbesserungen zusammen; wir sehen daraus, daß wir $[ab]$ nicht sehr genau zu kennen brauchen.

Bei Einzelverbesserungen brauchen wir von den Normalkoeffizienten nur die allerbequemsten: $[a^2]$, $[b^2]$, $[c^2]$ . . .; bei Doppelverbesserungen brauchen wir auch noch die Koeffizienten $[ab]$, $[cd]$ . . .

Hiemit sind die Näherungsverfahren ohne Normalgleichungen genügen charakterisiert.

Reduktion der Zenitdistanzen des Polaris
für Polhöhenbestimmungen.

Von Prof. Dr. **Norbert Herz** in Wien.

Methoden zur Reduktion von Polarisbeobachtungen gibt es eine ganz erhebliche Zahl; dennoch dürfte die folgende Methode ihrer Kürze wegen allgemeineres Interesse verdienen.

Schreibt man in der Formel

$$\cos z = \sin \varphi \cos p + \cos \varphi \sin p \cos t$$

in welcher z, φ, p, t die allgemein übliche Bedeutung haben,

$$z = 90^0 - \varphi + x, \quad \cos z = \sin(\varphi - x)$$

so nimmt dieselbe die Form an

$$\sin\varphi\cos x - \cos\varphi\sin x = \sin\varphi\cos p + \cos\varphi\sin p\cos t,$$

welche auch den Reihenentwickelungen zugrunde gelegt wird. Man erhält aber aus derselben durch Transposition

$$\sin\varphi(\cos x - \cos p) = \cos\varphi(\sin x + \sin p) - 2\cos\varphi\sin p\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

oder durch passende Umformungen nacheinander:

$$\sin\varphi\sin\frac{p+x}{2}\sin\frac{p+x}{2} = \cos\varphi\sin\frac{p-x}{2}\cos\frac{p-x}{2} - \cos\varphi\sin p\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

$$\sin\frac{p+x}{2}\left[\sin\varphi\sin\frac{p-x}{2} - \cos\varphi\cos\frac{p-x}{2}\right] = -\cos\varphi\sin p\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

$$\sin\frac{p+x}{2}\cos\left(\varphi+\frac{p-x}{2}\right) = +\cos\varphi\sin p\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

$$\sin\frac{p+x}{2} = \frac{\cos\varphi\sin p}{\cos\left(\varphi+\frac{p-x}{2}\right)}\sin\tfrac{1}{2}t^2 \quad \ldots\ldots 1)$$

Diese Formel kann bereits zur Bestimmung von x durch aufeinanderfolgende Näherungen dienen; ist x bekannt, so folgt dann φ aus

$$\varphi = 90^0 - z + x.$$

Da in erster Näherung x im Nenner gleich Null angenommen werden muß, so kann für diese erste Näherung, da p sowie x nur kleine Größen sind, auch

$$\frac{p+x}{2} = \frac{p\cos\varphi}{\cos\left(\varphi+\frac{p}{2}\right)}\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

geschrieben werden. Bezeichnet man

$$\frac{p-x}{2} = K$$

so wird die Formel

$$\sin\frac{p+x}{2} = \frac{\cos\varphi\sin p}{\cos(\varphi+K)}\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

und, wie vorhin erwähnt, könnte in erster Näherung $K = \frac{p}{2}$ gesetzt werden. Es ist aber:

für $t = 0$: $\frac{p+x}{2} = 0$, $x = -p$, demnach $K = p$

und genähert: » $t = 90^0$: $\frac{p+x}{2} = \frac{p}{2}$, $x = 0$, » $K = \frac{p}{2}$

» $t = 180^0$: $\frac{p+x}{2} = p$, $x = +p$, » $K = 0$

Man sieht hieraus, daß der Wert von K umso kleiner wird, je größer $\frac{x+p}{2}$ ist, d. h. je größer t ist. Da aber für kleine Werte von t selbst größere Veränderungen von K einen nur mäßigen Einfluß auf $p+x$ haben und für große Werte von t die Korrektion K klein wird, so genügt es, für eine Vorberechnung K ganz zu vernachlässigen; dann wird für die erste Näherung:

$$\sin\frac{p+x}{2} = \sin p\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

oder einfacher

$$\frac{p+x}{2}=p \sin \tfrac{1}{2} t^2.$$

Damit wird

$$\frac{p-x}{2}=p-\frac{p+x}{2}=p \cos \tfrac{1}{2} t^2$$

so daß die zur Reduktion dienenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} K &= p \cos \tfrac{1}{2} t^2 \\ \sin \frac{x+p}{2} &= \frac{\cos\varphi \sin p}{\cos(\varphi+K)} \sin \tfrac{1}{2} t^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; 2)$$

werden.

Bezeichnet man den hieraus folgenden Wert mit x' (zum Unterschiede von dem strengen Wert x) und entwickelt in Reihen, so folgt nach Division des Zählers und Nenners durch $\cos\varphi$:

$$\frac{x'+p}{2}-\tfrac{1}{6}\frac{(x'+p)^3}{8}=\frac{p-\frac{1}{6}p^3}{(1-\frac{1}{2}K^2)-\operatorname{tang}\varphi\,(K-\frac{1}{6}K^3)}\sin\tfrac{1}{2}t^2=$$
$$=(p-\tfrac{1}{6}p^3)[1-K\operatorname{tang}\varphi-\tfrac{1}{2}K^2]^{-1}\sin\tfrac{1}{2}t^2=$$
$$=[p+pK\operatorname{tang}\varphi-\tfrac{1}{6}p^3+\tfrac{1}{2}pK^2+pK^2\operatorname{tang}\varphi^2]\sin\tfrac{1}{2}t^2.$$

Substituiert man hier für K seinen Wert $p\cos\frac{1}{2}t^2$ und setzt links in den Gliedern dritter Ordnung

$$x'=-p+2p\sin\tfrac{1}{2}t^2=-p\cos t$$

ein, so erhält man

$$\frac{x'+p}{2}=(p+p^2\cos\tfrac{1}{2}t^2\operatorname{tang}\varphi)\sin\tfrac{1}{2}t^2+Cp^3$$
$$x'=-p\cos t+\tfrac{1}{2}p^2\sin t^2\operatorname{tang}\varphi+2Cp^3.$$

Der Koeffizient C wird:

$$C=(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}t^4+\cos\tfrac{1}{2}t^4\operatorname{tang}\varphi^2)\sin\tfrac{1}{2}t^2+$$
$$+\tfrac{1}{48}(-\cos t^3+3\cos t^2-3\cos t+1)=$$
$$=\tfrac{1}{48}-\tfrac{1}{16}\cos t+\tfrac{1}{16}\cos t^2-\tfrac{1}{48}\cos t^3-\tfrac{1}{12}(1-\cos t)+\tfrac{1}{16}\sin t^2(1+\cos t)+$$
$$+\tfrac{1}{8}\sin t^2(1+\cos t)\operatorname{tang}\varphi^2=$$
$$=\tfrac{1}{12}\sin t^2\cos t+\tfrac{1}{8}\sin t^2(1+\cos t)\operatorname{tang}\varphi^2$$

demnach

$$x'=-p\cos t+\tfrac{1}{2}p^2\sin t^2\operatorname{tang}\varphi+p^3[\tfrac{1}{6}\sin t^2\cos t+\tfrac{1}{4}\sin t^2(1+\cos t)\operatorname{tang}\varphi^2]\;..\;3)$$

Die Reihenentwickelung der strengen Formel ergibt bekanntlich:

$$x=-p\cos t+\tfrac{1}{2}p^2\sin t^2\operatorname{tang}\varphi+p^3[\tfrac{1}{6}\sin t^2\cos t+\tfrac{1}{2}\sin t^2\cos t\operatorname{tang}\varphi^2].$$

Es wird daher

$$x-x'=\frac{p^3}{4}\sin t^2\operatorname{tang}\varphi^2(\cos t-1)=-\frac{p^3}{2}\sin t^2\sin\tfrac{1}{2}t^2\operatorname{tang}\varphi^2$$

Unter Umständen kann nun auch x' dem wahren Werte näher liegen, doch hängt dies wesentlich von dem Zeichen des von p^4 abhängigen Gliedes ab, da $x-x'$ stets negativ ist.

Die Funktion

$$f=\sin t^2\sin\tfrac{1}{2}t^2$$

hat wegen

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\tfrac{1}{4}\sin 2t\sin t\,(2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t+\operatorname{tang}t)$$

ein Minimum für $t_0 = o$; d. i. der oberen Kulmination und ein Maximum für

$$\operatorname{tang} t_0 = -2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t_0$$

oder

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t_0^2 = 2.$$

Der hieraus folgende Wert von t ist

$$t_0 = 109^0\, 28'\, 16'' = 7^h.17^m\, 53^s$$

und da der hiezu gehörige Wert von f

$$f_0 = \tfrac{16}{27}$$

ist, so wird der Maximalwert von $x - x'$

$$(x - x')_0 = -\tfrac{8}{27} p^3 \operatorname{tang} \varphi^2$$

und da gegenwärtig p etwa $1^0\, 12' = 4320''$ ist, so wird der numerische Wert dieses Ausdruckes $-0''.56$. In allen Fällen, wo die Genauigkeit von $1''$ als ausreichend gilt (Forschungsreisen), sind daher die Formeln 2) ausreichend und wegen ihrer Bequemlichkeit besonders zu empfehlen; aber selbst dann, wenn die äußerste Genauigkeit verlangt wird, wird Formel 2) einen Wert von x ergeben, der in die rechte Seite von 1) substituiert, sofort einen völlig strengen Wert von x finden läßt. Da übrigens Formel 3) zeigt, daß der Einfluß von φ erst in den Gliedern zweiter Ordnung erscheint, so wird selbst ein um $2'$ und mehr fehlerhafter Wert von φ für x' noch immer ein ausreichend sicheres Resultat ergeben; für mittlere Breiten ($\varphi = 45^0$) wird das zweite Glied für $\Delta\varphi = 7'.5$ erst eine Änderung von $0''.1$ erfahren.

Bemerkung des Prof. Dr. H. Löschner.

Zu meinem Aufsatze: «Über Tachymetrie und ihre Geschichte» gibt mir die Firma Otto Fennel Söhne in Kassel bekannt, daß gegenwärtig etwa 400 Tachymeter und Tachygraphometer des Systems Wagner-Fennel in den verschiedensten Ländern der Erde in Gebrauch stehen und ferner, daß von den Jähnschen Vielmessern laut Mitteilung der mechanischen Werkstätte Franz Schmidt und Haensch in Berlin nur wenige Exemplare, sicherlich nicht mehr als 12 Stück, verkauft worden sind.

Brünn, den 16. Jänner 1908. *Prof. Dr. H. Löschner.*

Aus dem Abgeordnetenhause.

In der Sitzung des Abgeordnetenhauses vom 30. Oktober 1907 wurde folgender Antrag des Abgeordneten Viktor Silberer und Genossen wegen Erlassung eines Vermarkungsgesetzes eingebracht.

In den breitesten Schichten der Bevölkerung wurden seit Jahren Stimmen darüber laut, daß die Zustände in der Sicherung der Eigentumsgrenzen der Grundstücke unhaltbar seien und jahraus, jahrein werden Klagen geführt, daß es an solchen gesetzlichen Vorschriften mangelt, welche es ermöglichen, die vielfachen und bedeutenden Übelstände durch Herstellung geordneter Verhältnisse auf einfache und billige Weise zu beheben.