

Paper-ID: VGI\_190816



## Über graphische Ausgleichung vorwärtseingeschnittener Punkte

W. Láska <sup>1</sup>

<sup>1</sup> o. ö. Professor an der k. k. techn. Hochschule in Lemberg

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (5), S. 135–139

1908

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Laska_VGI_190816,  
Title = {{\U}ber graphische Ausgleichung vorw{\a}rtseingeschnittener Punkte  
},  
Author = {L{\a}ska, W.},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {135--139},  
Number = {5},  
Year = {1908},  
Volume = {6}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergemeter Max Reinisch.

Nr. 5.

Wien, am 1. Mai 1908.

VI. Jahrgang.

## Über graphische Ausgleichung vorwärts- eingeschnittener Punkte.

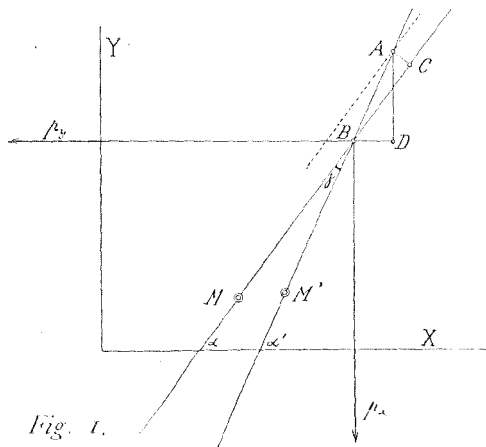
Von W. Láska.

Wie bekannt, handelt es sich bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nicht so sehr darum, zu einer mathematisch mehr als bestimmten Größe, den numerisch plausibelsten Wert zu finden, als vielmehr um die Bestimmung des Gewichtes, d. h. des Maßes der Tauglichkeit dessen, was gegeben ist, zur Bestimmung der unbekanntenen Größe.

Bei algebraischer Rechnung ergeben sich die Gewichte als Schlußresultate, bei graphischen Konstruktionen müssen sie dagegen von vornherein eingeführt werden. Es ist evident, daß von der Richtigkeit der Gewichte in erster Linie die Brauchbarkeit einer graphischen Methode abhängt.

In diesem Aufsatz soll für das Vorwärtseinschneiden eine geometrische Konstruktion aufgesucht werden, welche sich möglichst eng an die Prinzipien der Methode der kleinsten Quadrate anschließt. Zu diesem Zwecke muß zunächst der Ausdruck für das Gewicht eines Schnittpunktes zweier Geraden bestimmt werden.

Wird ein Punkt durch den Schnitt zweier Geraden bestimmt, welche auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogen werden, so hängt das Gewicht der Koordinaten von zwei Faktoren ab: von dem Schnittwinkel der Geraden und von der Lage des Koordinatensystems. In der Vermessungspraxis, wo die Geraden durch Sichten bestimmt werden, kommt noch ein dritter Faktor hinzu: die Genauigkeit der Sichten.



Um diese Abhängigkeit mathematisch auszudrücken, sei  $B$  der Schnittpunkt zweier Geraden, welche durch die beiden Punkte  $M$  und  $M'$  sowie die Azimute  $\alpha$  und  $\alpha'$  (siehe Fig. 1) bestimmt sind. Um die Gewichtskomponenten der Projektionen des Punktes  $B$  auf die  $X$ - und  $Y$ -Axe, d. h. die Größen

$$p_x \quad p_y$$

zu bestimmen, nehme man vorläufig den Strahl ( $\alpha' M'$ ) als feststehend. Einer elementaren Drehung des Strahles ( $\alpha M$ ) um  $M$  als Zentrum, entspricht eine Verschiebung im Ausmaß

$$AC = r \Delta \alpha$$

wobei  $r = MB$ . Der Schnittpunkt  $B$  verschiebt sich dadurch nach  $A$  um die Strecke

$$AB = \frac{r \Delta \alpha}{\sin \gamma}$$

Die Komponenten dieser Verschiebung sind

$$\Delta y = AD = \frac{r \Delta \alpha}{\sin \gamma} \sin \alpha'$$

$$\Delta x = BD = \frac{r \Delta \alpha}{\sin \gamma} \cos \alpha'$$

Dieselben Formeln gelten auch mutatis mutandis für eine elementare Drehung der zweiten Geraden um den Punkt  $M'$ . Die Punkte  $M$  und  $M'$  sind die Instrumentenstände beim Vorwärtseinschneiden.

Ersetzt man  $\Delta \alpha$  und  $\Delta \alpha'$  durch ihre mittleren Fehler  $m$  sowie  $m'$ , so werden die mittleren Fehler der Koordinaten  $x$  und  $y$  des Punktes  $B$  gegeben sein durch

$$m_y = \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{(r \sin \alpha')^2 m^2 + (r' \sin \alpha)^2 m'^2}$$

$$m_x = \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{(r \cos \alpha')^2 m^2 + (r' \cos \alpha)^2 m'^2}$$

Wir erhalten somit die Gewichte

$$p_x = \frac{\lambda^2}{m_x^2}, \quad p_y = \frac{\lambda^2}{m_y^2}$$

wobei  $\lambda$  eine beliebig zu wählende Zahl darstellt. In der Praxis wird man wohl

$$m = m'$$

setzen können, sobald es sich um einen mit demselben Instrumente und mit gleicher Genauigkeit vorwärtseingeschnittenen Punkt handelt. Dadurch gehen  $m$  und  $m'$  in den Proportionalfaktor  $\lambda$  ein und wir können sie einfach gleich 1 setzen. Man hat also

$$p_y = \frac{\lambda \sin^2 \gamma}{(r \sin \alpha')^2 + (r' \sin \alpha)^2}$$

$$p_x = \frac{\lambda \sin^2 \gamma}{(r \cos \alpha')^2 + (r' \cos \alpha)^2}$$

Wird noch

$$u^2 = (r \sin \alpha')^2 + (r' \sin \alpha)^2$$

$$v^2 = (r \cos \alpha')^2 + (r' \cos \alpha)^2$$

gesetzt, so kann man auch schreiben

$$p_y = \frac{\lambda}{u^2} \sin^2 \gamma, \quad p_x = \frac{\lambda}{v^2} \sin^2 \gamma.$$

Aus den Gleichungen ergibt sich zunächst:

$$\frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} = \frac{1}{\lambda} \frac{r^2 + r'^2}{\sin^2 \gamma}$$

Die Summe der reziproken Gewichte ist also unabhängig von der Lage der Koordinatenachsen. Nimmt man noch

$$r = r'$$

und sucht das Maximum sowie Minimum der Gewichte, so folgt:

$$p_{\max} : p_{\min} = \cos^2 \frac{\gamma}{2} : \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

wobei im Falle des Maximums

$$\alpha' = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$$

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

wird. Geometrisch bedeutet dies, daß die Winkelhalbierenden des Winkels  $\gamma = \alpha' - \alpha$  senkrecht stehen auf den Koordinatenachsen.

Wird also das Koordinatensystem so gewählt, daß seine Axen die Richtungen der Winkelhalbierenden annehmen, so stellt die eine Gewichtskomponente das Maximum, die andere das Minimum dar, vorausgesetzt natürlich, daß  $r = r'$ , was auch unmittelbar geometrisch klar ist.

Es soll nun der Anschluß der mitgeteilten Gewichte an die Methode der kleinsten Quadrate untersucht werden, und zwar an einem speziellen Falle: der drei Punkte, da die Verallgemeinerung keine Schwierigkeiten bietet.

Es sei also

$$g = ax + by + c$$

die Gleichung einer Geraden und es seien

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

die Schnittpunkte der Geraden

$$g_2 g_3 \quad g_1 g_3 \quad g_1 g_2;$$

dann ist der nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichene Punkt, gegeben durch die Koordinaten

$$x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

$$y = \frac{y_1 p_1 + y_2 p_2 + y_3 p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

wobei

$$p_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$$

Der Schnittwinkel  $\gamma_1$  der Geraden  $g_2 g_3$  ergibt sich aus der Gleichung

$$\sin \gamma_1 = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

so daß man schreiben kann

$$p_1' = (a_2^2 + b_2^2) (a_3^2 + b_3^2) \sin^2 \gamma_1$$

oder auch

$$p_1' = \frac{b_2^2 b_3^2 \sin^2 \gamma_1}{\cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3} = \frac{a_2^2 a_3^2 \sin^2 \gamma_1}{\sin^2 \alpha_2 \sin^2 \alpha_3}$$

Man hat also

$$\frac{p_1' a_1^2}{\sin^2 \alpha_1 \sin^2 \gamma_1} = \frac{p_2' a_2^2}{\sin^2 \alpha_2 \sin^2 \gamma_2} = \frac{p_3' a_3^2}{\sin^2 \alpha_3 \sin^2 \gamma_3}$$

oder auch

$$\frac{p_1' b_1^2}{\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \gamma_1} = \frac{p_2' b_2^2}{\cos^2 \alpha_2 \sin^2 \gamma_2} = \frac{p_3' b_3^2}{\cos^2 \alpha_3 \sin^2 \gamma_3}$$

Da aber

$$a_1 = q_1 \sin \alpha_1$$

$$b_1 = q_1 \cos \alpha_1$$

wobei  $q$  eine näher zu bestimmende Größe ist, so folgt weiters

$$\frac{p_1' q_1^2}{\sin^2 \gamma_1} = \frac{p_2' q_2^2}{\sin^2 \gamma_2} = \frac{p_3' q_3^2}{\sin^2 \gamma_3}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit

$$\frac{p_1 u_1^2}{\sin^2 \gamma_1} = \frac{p_2 u_2^2}{\sin^2 \gamma_2} = \frac{p_3 u_3^2}{\sin^2 \gamma_3}$$

so ergibt sich sofort:

$$\frac{p_1' q_1^2}{p_1 u_1^2} = \frac{p_2' q_2^2}{p_2 u_2^2} = \frac{p_3' q_3^2}{p_3 u_3^2}$$

durch welche Gleichung die Gleichwertigkeit der Gewichte

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3$$

der Normalgleichungen mit den Gewichten

$$p_1' \quad p_2' \quad p_3'$$

der geometrischen Konstruktion, wie sie hier gegeben wurde, nachgewiesen ist, soweit dieses natürlich möglich ist in Anbetracht des Umstandes, daß das eine System nur theoretische, das andere dagegen von der Entfernung der Standpunkte abhängige Gewichte hat.

Bei der praktischen Anwendung dieser Formeln wird man teils geometrisch, teils rechnend zu verfahren haben. Hier handelt es sich zunächst um die Größen

$$r \sin \alpha', \quad r' \sin \alpha, \quad r \cos \alpha', \quad r' \cos \alpha,$$

aus welchen

$$u = \sqrt{(r \sin \alpha')^2 + (r' \sin \alpha)^2}$$

$$v = \sqrt{(r \cos \alpha')^2 + (r' \cos \alpha)^2}$$

erhalten werden. Sodann ist

$$p_x = \lambda \frac{\sin^2 \gamma}{u^2}, \quad p_y = \lambda \frac{\sin^2 \gamma}{v^2}$$

wo

$$\gamma = \alpha' - \alpha.$$

Die letzteren Gleichungen können am bequemsten und genau genug mit dem Rechenschieber berechnet werden, wogegen bei  $u$  und  $v$  die geometrische Konstruktion schneller zum Ziele führt.

Man verlängert zu diesem Zwecke die Sichten über den Schnittpunkt ● (Fig. 2) und mache

$$OA = r', \quad OB = r,$$

ziehe  $CD \parallel$  zur  $X$ -Axe durch den Punkt  $O$  und

$$BC \perp CD, \quad AD \perp CD$$

Sodann ist offenbar

$$BC = r \sin \alpha', \quad CO = r \cos \alpha'$$

$$AD = r' \sin \alpha, \quad DO = r' \cos \alpha$$

Wird noch  $DE = r \sin \alpha' = BC$  gemacht, so ist  $AE = u$ .

Analog gibt  $OF = OD = r' \cos \alpha$ , wenn  $OF \perp CD$  ist, die Größe  $v = CH$ .

Um noch die Schlußkonstruktion zu zeigen, seien 1, 2, 3, die Projektionen der Scheitelpunkte des Fehlerdreiecks auf die  $X$ -Axe, sowie  $p_1, p_2, p_3$ , die ihnen zukommenden Gewichte.

Man zeichne zunächst die Hilfsfigur . . . auf Pause, indem man auf der Geraden  $AA_1$  die Gewichte (Fig. 3)

$$AA_1 = p_1, \quad A_1 A_2 = p_2 \text{ etc.}$$

aufträgt. Hierauf wird ein beliebiger Punkt  $O$  angenommen und die Strahlen  $AO, A_1 O$ , etc. sowie noch zwei bis drei zu  $AA_1$  parallele Geraden gezogen.

Sodann werden durch die Punkte 1, 2, 3, . . . Senkrechte  $I, II, III, \dots$  zu der  $X$ -Axe errichtet (Fig. 4).

Nun lege man die Pause so auf die Hauptfigur, daß die Punkte  $A$ , resp.  $A_2$  auf die Geraden  $II$ , resp.  $I$  zu liegen kommen und markiere den Punkt  $A_1$ . Hierauf wird die Pause abgenommen und so gelegt, daß der Punkt  $B_3$  auf  $A_1$  und der Punkt  $B$  auf  $III$  zu liegen kommt. Hier wird die Lage des Punktes  $B_2$  markiert. Seine Projektion auf die  $X$ -Axe ist dann der gesuchte Punkt  $R$ . Analog wird verfahren, wenn mehrere Punkte gegeben sind.

Eines Beweises bedarf diese Konstruktion wohl nicht. Analoge Konstruktionen hat man natürlich auch auf der  $Y$ -Axe.

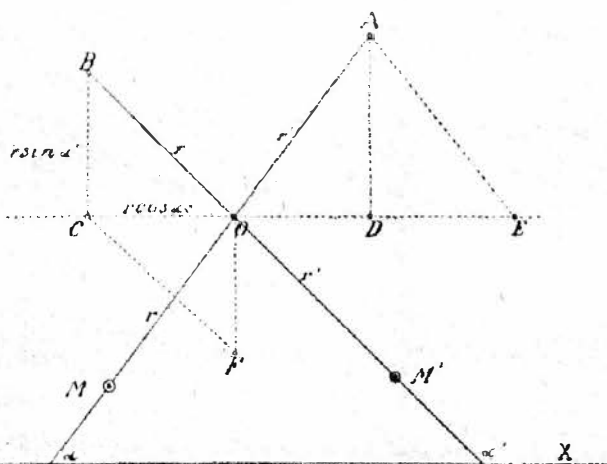


Fig. 2.

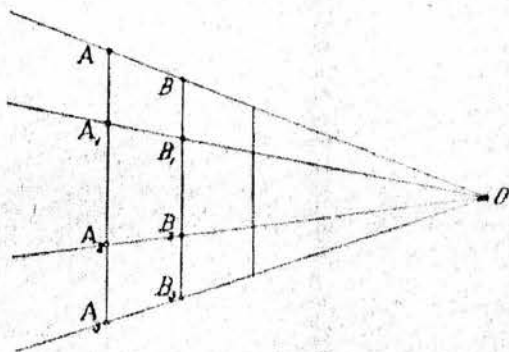


Fig. 3.

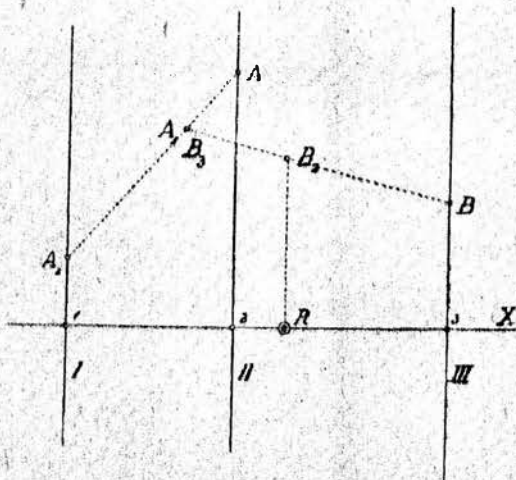


Fig. 4.