Paper-ID: VGI_190822

Graphische Ausgleichung mit zwei Unbekannten

Karl Fuchs [1]

[1] *Preßburg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (6), S. 174–176

1908

BibTEX:

```
@ARTICLE{Fuchs_VGI_190822,
Title = {Graphische Ausgleichung mit zwei Unbekannten},
Author = {Fuchs, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {174--176},
Number = {6},
Year = {1908},
Volume = {6}
}
```

Nun ist schließlich noch zu prüfen, ob die Bedingung 13) nicht im Widerspruch ist mit 5), aus welcher Gleichung bei gemessenem Winkel w und bekannten Abständen a und d_1 sich, wie bereits bemerkt, e berechnen läßt.

Indem wir 5) in der Form

$$f(e) = o \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

schreiben, ist bei der vorausgesetzten Größe von w der für die Anwendung ausreichende Näherungswert e_0 der in Betracht kommenden Wurzel von 14) durch

$$e_0 = \frac{d_1(a+d_1) \cdot \operatorname{tang} w}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

gegeben; eine Näherung, welche ebenso auf 6) angewendet, zu der einfachen Gleichung 8) führt.

Der Fehler $\triangle e$ in e_0 ergibt sich leicht aus

$$\triangle e = -\frac{f(e_0)}{f'(e_0)} = \frac{d_1^2(a+d_1)^2 \cdot \operatorname{tang} w}{a(a^2 \operatorname{cotang}^2 w - 2d_1[a+d_1])}, \quad \ldots \quad 16)$$

welche Verbesserung beispielsweise für die früheren Annahmen von a d_1 und w etwa 0·1 *mm* ausmacht.

Da nun der aus 15) folgende Wert für e kleiner ist als der durch 13) bestimmte Grenzwert, so kann der letzteren Bedingung entsprochen werden.

Graphische Ausgleichung mit zwei Unbekannten.

Von Prof. **Karl Fuchs** in Preßburg.

Das Vorwärtseinschneiden führt zu Bestimmungsgleichungen mit zwei Unbekannten, die wir in folgender Form schreiben wollen:

$$\left.\begin{array}{l} ax_1 + by_1 = z_1 \\ ax_2 + by_2 = z_2 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Hier sind a und b die Unbekannten; die z sind mit Fehlern behaftet. Es soll ein einfaches graphisches Verfahren beschrieben werden, mittelst dessen es uns möglich ist, die angenäherten Werte der Unbekannten in zweistelligen, zuweilen auch in dreistelligen Zahlen zu gewinnen.

Wenn die z fehlerfrei wären, dann würden dieselben Werte von a und b sämtlichen Gleichungen 1) genügen. Die Gleichungen 1) wären dann Spezialfälle der allgemeinen Gleichung:

$$ax + by = z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

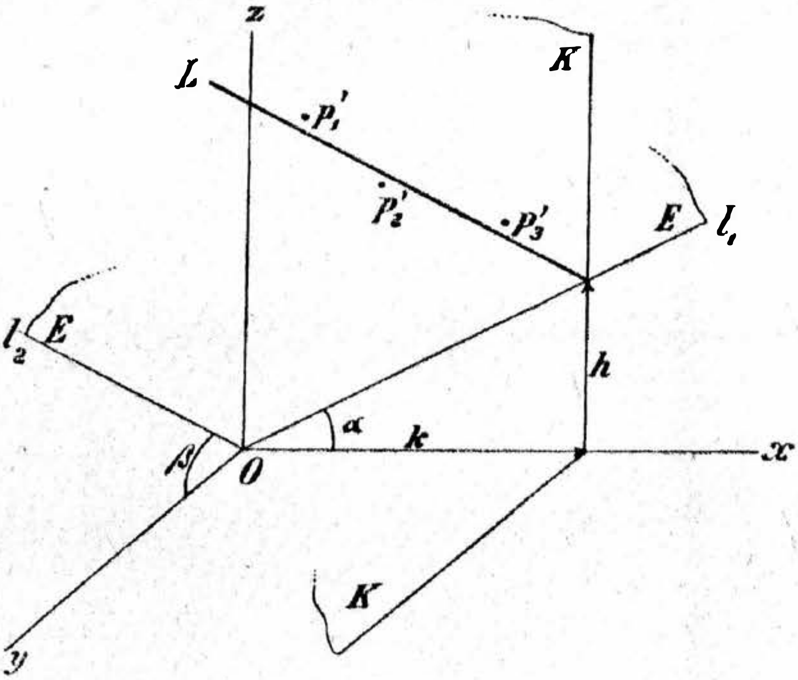
Wenn wir diese Gleichung als Gleichung einer Ebene E auffassen, die durch den Ursprung O geht, dann bestimmen die Gleichungen 1) Punkte $p_1, p_2 \ldots$ dieser Ebene E, und die Koordinaten der einzelnen Punkte $p_1, p_2 \ldots$ sind:

$$x_1 y_1 z_1 \qquad x_2 y_2 z_2 \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Da aber die z in Wirklichkeit teils zu groß, teils zu klein sind, so liegen die Punkte $p_1, p_2 \ldots$ in Wirklichkeit teils etwas zu hoch, teils etwas zu tief. Es gilt die Konstanten a_0 und b_0 der wahrscheinlichsten Ebene E_0 zu bestimmen.

Wir verfahren folgendermaßen:

Durch irgendeinen Achsenpunkt $x = k$ legen wir eine Ebene K normal zur x-Achse, also parallel zur yz-Ebene. Von jedem Punkt $p_1, p_2 \ldots$ ziehen wir einen Strahl $r_1, r_2 \ldots$ nach dem Ursprung. Diese Strahlen durchstoßen die Ebene K in Punkten $p'_1, p'_2 \ldots$ Diese Punkte p' in der Ebene K können wir graphisch sehr leicht konstruieren. Sie liegen ziemlich genau in einer Geraden. Diese Gerade wollen wir nun besprechen.



Die richtige Ebene E würde die xz-Ebene in einer Geraden l_1, die yz-Ebene in einer Geraden l_2, die Ebene K aber in einer Geraden L schneiden, die zu l_2 parallel ist. Wenn l_1 den Neigungswinkel α, l_2 und L den Neigungswinkel β haben, dann gilt offenbar:

$$a = \operatorname{tang} \alpha \qquad b = \operatorname{tang} \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Die Gerade L schneidet die z-Achse der Ebene K in einer Höhe h. Es gilt dann:

$$\frac{h}{k} = \operatorname{tang} \alpha = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Die Gerade L gibt uns also durch ihre Neigungstangente tg β und ihren Achsenabschnitt h die beiden gesuchten Konstanten a und b. Die konstruierten Punkte $p_1', p_2' \ldots$ in der Ebene K werden nun wegen den Fehlern der Ordinaten z nicht in der Geraden L, wohl aber nahe zu ihr, teils zu hoch teils zu tief, liegen. Wenn wir also die Punktreihe $p_1', p_2' \ldots$ konstruiert haben und wir ziehen nach dem Augenmaße mit dem Lineal eine mittlere Linie L', die sich den Punkten p' möglichst gut anschmiegt, dann ist diese L' von der richtigen Linie L jedenfalls wenig verschieden und ihre Neigungstangente tg β' und ihr Achsenabschnitt h' geben jedenfalls nach 4) und 5) gute Näherungswerte die Unbekannten a und b.

Das ganze Ausgleichsverfahren beruht also im Wesen darauf, daß wir durch eine nicht ganz genaue Punktreihe eine Gerade ziehen.

Wir könnten allerdings aus der Punktreihe $p_1', p_2' \ldots$ die wahrscheinlichsten Werte $a_0\, b_0$ auch rechnen; das gäbe aber mehr Arbeit, als wenn wir direkt das Normalverfahren auf die Gleichungen 1) anwenden.

Die angenäherten Werte $a'\, b'$ können wir aber in anderer Weise verwerten, wenn sie uns nicht genug genau erscheinen. Wir können sie in die Gleichungen 1) einführen, indem wir etwa die erste Gleichung so schreiben:

$$(a' + \Delta a)\, x_1 + (b' + \Delta b)\, y_1 = z_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

Wenn wir von z_1 die Zahlenwerte $a' x_1 + b' y_1$ abziehen, bleibt uns ein Rest Δz_1 und Gleichung 6) lautet einfacher:

$$x_1\, \Delta a + y_1\, \Delta b = \Delta z_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

wo Δa und Δb die Unbekannten sind. Wenn wir so alle Gleichungen umformen, dann erhalten wir eine Reihe von Bestimmungsgleichungen für die kleinen Korrektionen Δa und Δb und diese können wir nach dem Normalverfahren mit zwei- oder dreistelligen Zahlen berechnen. Es gilt dann für die wahrscheinlichsten Werte a_0 und b_0:

$$a_0 = a' + \Delta a \qquad b_0 = b' + \Delta b$$

und so haben wir auf leichte Weise etwa vier- oder fünfstellige Werte von a_0 und b_0 gewonnen.

In der Photogrammetrie hat sich die geschilderte Methode bewährt.

Geodätische Tischgespräche.

I. Das Würfelspiel.

Einige Studienkollegen, Freunde der Geodäsie, hatten zwanglose Zusammenkünfte im Café «zur Mutter Erde». Als Studiosus Faß heute das Kaffeehaus betrat, saßen bereits seine Kommilitonen Spund und Pump an dem gemütlichen Stammtische und würfelten. Nach kurzer, aber herzlicher Begrüßung nahm auch Faß an dem Stammtische, der sogenannten «geodätischen Ecke», Platz, trank seine «Schale Gold» und sah dann eine Zeit lang dem Spiele zu. Es wurde mit zwei Würfeln geworfen. Bei jedem Wurfe der Summe 7 gewinnt Pump, fällt aber die Summe 6, so gewinnt Spund; jeder andere Wurf ist als Niete ungiltig.

+ Wenn Du, lieber Spund, heute einen Gewinn davonträgst, dann kannst Du von Glück sagen, — sprach Faß —, denn nur ein Spiel des Zufalls wäre es.

= Selbstverständlich. Wie bei jedem Zufallsspiel ist der Gewinn eine glückliche Fügung des Schicksals, das mit weiser Hand Weh und Freuden verteilt.

+ Es will aber das Geschick, daß Du unter den gegebenen Umständen bei hinreichend langem Spiele verlieren mußt.

= Wenn ich schon zugebe, daß die Gesetzmäßigkeit oder die Ordnung des Geschehens berechnet werden kann, so möchte ich doch wissen, wie sich das Gesetzlose, die Unregelmäßigkeit oder die Unordnung, womit der Zufall charakterisiert erscheint, angeben läßt.