

Paper-ID: VGI\_190827



## Zur Theorie des Theodolites

Ehrenfeucht <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Baltisches Polytechnikum in Riga*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (7), S. 206–210

1908

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Ehrenfeucht_VGI_190827,  
Title = {Zur Theorie des Theodolites},  
Author = {Ehrenfeucht, },  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {206--210},  
Number = {7},  
Year = {1908},  
Volume = {6}  
}
```



Zur Übertragung der sphäroidischen Fläche in die Ebene hat man die querachsige Zylinderprojektion benützt. Die Lage der Dreieckspunkte der neuen schweizerischen Triangulierung ist durch rechtwinkelige konforme Koordinaten eines einzigen Systemes, dessen Ausgangspunkt die Sternwarte in Bern bildet, bestimmt.

Zum Schlusse dieses Abschnittes erlaubt sich der Verfasser allen Instituten, sowie jenen hochverehrten Herren, die ihn im Studium dieser Aufgabe unterstützt hatten, seinen innigen Dank auszudrücken. (Fortsetzung folgt.)

## Zur Theorie des Theodolites.

Von Prof. Ehrenfeucht am baltischen Polytechnikum in Riga.

Die gewöhnlichen kleinen geodätischen Instrumente können so genau konstruiert und justiert werden, daß die übrigbleibenden Instrumentenfehler kleiner sind, als die Ablesungsfehler. Solche Instrumente können nach der Justierung als fehlerfrei angesehen werden.

Wird aber von den Messungen eine große Genauigkeit gefordert, so benutzt man präzise Instrumente, welche mit starken Fernrohren, sehr empfindlichen Libellen, sowie feinen Nonien oder Mikroskopen versehen sind. Die genaue (innerhalb der Beobachtungsfehler) Justierung solcher Instrumente ist sehr mühsam und muß oft wiederholt werden, denn auch kleine Verstimmungen, welche durch verschiedene äußere Ursachen hervorgerufen werden und bei gewöhnlichen Instrumenten nicht fühlbar sind, dürfen bei Präzisionsmessungen nicht vernachlässigt werden. In diesem Falle ist es ratsam, kleine Instrumentenfehler bleiben zu lassen, also mit dem verstimmten Instrumente zu arbeiten und den Einfluß dieser Fehler auf gemessene Winkel durch Rechnung zu berücksichtigen. Es ist dann der Winkel  $W$  nicht nur von den Ablesungen  $N$ , sondern auch von den Instrumentenfehler  $b, c, \dots$  abhängig:

$$W = f(N, b, c, \dots) \dots \dots \dots 1)$$

Da die Instrumentenfehler  $b, c, \dots$  gewöhnlich sehr klein sind, so genügt es nach der Entwicklung der Funktion  $f$  nach den Potenzen  $b, c, \dots$  nur die Glieder 1. Ordnung zu berücksichtigen. Die Glieder 2. Ordnung werden nur dazu ermittelt, um durch die numerische Ausrechnung ersichtlich zu machen, daß sie innerhalb der Beobachtungsfehler bleiben, also gleich Null angenommen werden dürfen. Bei diesen Untersuchungen wird der Einfluß jedes Instrumentenfehlers bestimmt, wobei alle anderen Fehler gleich Null gesetzt werden. Man erhält somit partielle Korrekturen des Winkels, welche durch einzelne Instrumentenfehler verursacht sind; die totale Korrektur wird endlich als Summe der Partiellen angenommen.

Es ist aber leicht zu beweisen, daß solche einfache Summierung der partiellen Korrekturen nur dann richtig ist, wenn wir uns auf die Glieder 1. Ordnung beschränken. Aus 1) ergibt sich nämlich

$$W = f(N, 0, 0, \dots) + b \left( \frac{\partial f}{\partial b} \right)_0 + c \left( \frac{\partial f}{\partial c} \right)_0 + \dots \\ + \frac{1}{2} b^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} \right)_0 + bc \left( \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} \right)_0 + \frac{1}{2} c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \right)_0 + \dots \dots \dots 2)$$

wo  $f(N, O, O \dots)$  den Wert des Winkels bedeutet, welchen wir erhielten, ohne die Instrumentenfehler zu berücksichtigen und die Summen

$$b \left( \frac{\partial f}{\partial b} \right)_0 + \frac{1}{2} b^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} \right)_0 + \dots$$

$$c \left( \frac{\partial f}{\partial c} \right)_0 + \frac{1}{2} c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \right)_0 + \dots$$

.....

partielle Korrekturen darstellen, welche durch die Fehler  $b, c \dots$  hervorgerufen sind, während

$$b \left( \frac{\partial f}{\partial b} \right)_0 + c \left( \frac{\partial f}{\partial c} \right)_0 + \frac{1}{2} b^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} \right)_0 + bc \left( \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} \right)_0 + \frac{1}{2} c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \right)_0 + \dots$$

die totale Korrektur ist. Man sieht daraus, daß die totale Korrektur bis zu den Gliedern 2. Ordnung der Summe der partiellen gleich ist. Sollten aber auch Glieder 2. Ordnung eingeführt werden, so darf man sich auf die partiellen Korrekturen nicht beschränken, denn außer diesen treten noch Glieder

$$bc \left( \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial c} \right)_0 + \dots$$

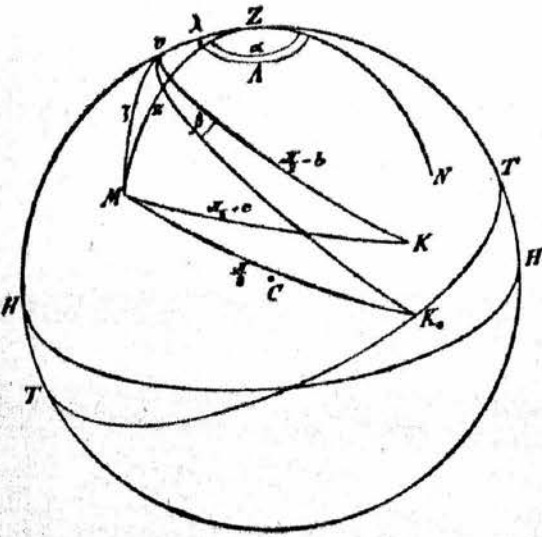
auf, welche die Produkte verschiedener Paare der Instrumentenfehler enthalten

Um alle Korrekturglieder 1. und 2. Ordnung zu ermitteln, haben wir zunächst strenge Formeln angegeben, welche zur Berechnung des Azimutes  $\alpha$  und der Zenitdistanz  $z$  der Zielaxe dienen können, wobei die Werte der Instrumentenfehler beliebig groß angenommen werden; dann haben wir dieselbe Aufgabe bis zu den Gliedern 3. Ordnung der Instrumentenfehler gelöst.

Obwohl die Werte der Instrumentenfehler bei der ersten Lösung (nach den strengen Formeln) beliebig groß sein dürfen, müssen beim Theodolite manche einschränkende Bedingungen erfüllt werden, damit er als ein brauchbares Winkelmeßinstrument betrachtet werden könne. Es sollen nämlich die Winkel zwischen der Ziel- und Horizontalaxe, zwischen der Horizontal- und Vertikalaxe konstant sein. Die Richtung der Vertikalaxe soll während der Winkelmessung auch unverändert bleiben. Außerdem soll die Alhidadenaxe zur Limbusaxe senkrecht stehen oder nur sehr wenig von dieser senkrechten Lage abweichen.

Wenn die ersten Bedingungen schon an und für sich klar sind, muß die Notwendigkeit der letzten etwas näher motiviert werden. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß jeder Punkt des Nonius (oder Mikroskopes) bei Drehung der Alhidade einen Kreis beschreibt, dessen Ebene zur Alhidadenaxe genau senkrecht steht. Wäre die Limbusebene zu derselben Axe nicht senkrecht, also dem erwähnten Kreise nicht parallel, so würde sich der Abstand zwischen dem Nonius (oder Mikroskope) und Limbus bei Drehung der Alhidade verändern und die Ablesung würde unmöglich sein. Es kann also die Alhidadenaxe von der Senkrechten zur Limbusebene nicht beliebig viel abweichen. Nimmt man aber an, daß die Abweichung sehr klein ist und bei den Ablesungen unmerklich bleibt, so wird daraus nur eine kleine Korrektur 2. Ordnung entstehen, welche praktisch immer gleich Null ist und darum unberücksichtigt bleiben kann. Aus diesem Grunde ist im folgenden angenommen, daß die Alhidadenaxe zur Limbusebene genau senkrecht steht.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Theorie des Theodolites über.



Denken wir uns eine Kugel von unendlich großem Radius, deren Mittelpunkt  $C$  der Standpunkt ist. Es sei  $Z$  das Zenit des Ortes,  $ZN$  der Meridian,  $HH$  der Horizont. Die Richtung der Alhidadenaxe trifft die Oberfläche der Kugel in einem Punkte  $v$ , dessen Lage durch sein Azimut  $A = NZv$  und seine Zenitdistanz  $\lambda = Zv$  festgestellt ist. Der größte Kreis  $IT$ , welcher zur Alhidadenaxe  $Cv$  senkrecht steht, wird auf der Kugel die Richtung der Limbusebene darstellen.

Es seien  $M$  und  $K$  die Punkte, in welchen die Richtungen der Ziel- und Horizontalaxe die Kugel treffen. Im sphärischen Dreieck  $vKM$  bezeichnen wir

$$MK = \frac{\pi}{2} + c, \quad vK = \frac{\pi}{2} - b, \quad vM = \zeta, \quad MvK = \frac{\pi}{2} + \beta,$$

wo  $c$  (Collimationsfehler) und  $b$  (Neigung der Horizontalaxe gegen die Limbus ebene) konstant sind. Der Bogen  $\zeta$  läßt sich am Vertikalkreise folgendermaßen bestimmen. Es sei  $B$  die Ablesung am Vertikalkreise, wenn die Zielaxe nach  $M$  gerichtet ist und  $B_0$  die konstante Ablesung an demselben Kreise, wenn der größte Kreis  $KM$  mit  $Kv$  zusammenfällt. Dann ist

$$vKM = \pm (B - B_0) = \zeta, \quad \dots \dots \dots 3)$$

und aus dem sphärischen Dreieck  $vKM$  finden wir

$$\cos \zeta = -\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos \beta. \quad \dots \dots \dots 4)$$

Der Winkel  $\beta$  läßt sich aus demselben Dreiecke ermitteln. Wir haben nämlich

$$-\sin c = \cos \zeta \sin b - \sin \zeta \cos b \sin \beta,$$

und hieraus

$$\sin \beta = \operatorname{tg} b \cot \zeta + \frac{\sin c}{\cos b \sin \zeta}. \quad \dots \dots \dots 5)$$

Nachdem  $\zeta$  und  $\beta$  berechnet sind,\*) können wir das Azimut  $a = NZM$  und die Zenitdistanz  $z = ZM$  der Zielaxe  $CM$  bestimmen. Es sei  $A$  die Ablesung am Horizontalkreise, wenn die Zielaxe nach  $M$  gerichtet ist und  $A_0$  die Ablesung an demselben Kreise, wenn der größte Kreis  $vK$  mit  $vZ$  zusammenfällt.  $A_0$  ist eine Konstante, solange der Limbus unbeweglich bleibt. Nach der Figur ist

\*) Wenn  $K_0$  den Pol des Kreises  $vM$  bezeichnet, so ist  $MK_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $vK_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $MvK_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $vK_0M = \zeta$  und es ist leicht zu ersehen, daß  $CK_0$  die Richtung der Horizontalaxe sein würde, wenn der Theodolit in Bezug auf die Axenfehler  $b$  und  $c$  genau justiert wäre. Es sind also  $\beta$  und  $\zeta - \zeta'$  die Korrekturen der Ablesungen am Horizontal- und Vertikalkreise wegen der Instrumentenfehler  $b$  und  $c$ .

$$ZvK = A - A_0 = \alpha, \dots \dots \dots 6)$$

$$ZvM = \frac{\pi}{2} + \beta + \alpha$$

$$vZM = A - \alpha,$$

und aus dem Dreieck *ZvM* finden wir

$$\left. \begin{aligned} \sin(A - \alpha) \sin z &= \sin \xi \cos(\alpha + \beta) \\ \cos(A - \alpha) \sin z &= \cos \xi \sin \lambda + \sin \xi \cos \lambda \sin(\alpha + \beta) \\ \cos z &= \cos \xi \sin \lambda - \sin \xi \sin \lambda \sin(\alpha + \beta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 7)$$

Die Formeln 3) — 7) lösen unsere Aufgabe: sie bestimmen das Azimut *a* und die Zenitdistanz *z* der Zielaxe nach den Ablesungen *A* und *B* an beiden Kreisen und den Konstanten *b, c, λ, A, A<sub>0</sub>, B<sub>0</sub>*.

Nehmen wir jetzt die Instrumentenfehler *b, c* und *λ* als kleine Größe 1. Ordnung an, so lassen sich die Formeln 4), 5) und 7) folgendermaßen umformen:

$$\cos \xi = \cos \xi' - bc - \frac{b^2 + c^2}{2} \cos \xi' + \text{Gl. 3. Ordn.} \dots \dots \dots 8)$$

$$\beta = b \cot \xi + \frac{c}{\sin \xi} + \text{Gl. 3. Ordn.} \dots \dots \dots 9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(A - \alpha) \sin z &= \sin \xi \cos(\alpha + \beta) \\ \cos(A - \alpha) \sin z &= \lambda \cos \xi + \sin \xi \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin \xi \sin(\alpha + \beta) + \text{Gl. 3} \end{aligned} \right\} 10)$$

$$\cos z = \cos \xi - \lambda \sin \xi \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \lambda^2 \cos \xi + \text{Gl. 3} \dots \dots \dots 11)$$

Aus den beiden Gleichungen 10) erhalten wir leicht folgende:

$$\sin(A - \alpha + \alpha + \beta) \sin z = \sin \xi + \lambda \cos \xi \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin \xi \sin^2(\alpha + \beta) + \text{Gl. 3.}$$

$$\cos(A - \alpha + \alpha + \beta) \sin z = \lambda \cos \xi \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin \xi \sin 2(\alpha + \beta) + \text{Gl. 3.}$$

Hieraus

$$\cot(A - \alpha + \alpha + \beta) = \frac{\lambda \cot \xi \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin 2(\alpha + \beta) + \text{Gl. 3.}}{1 + \lambda \cot \xi \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2(\alpha + \beta) + \text{Gl. 3.}}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - A + a - \alpha - \beta = \lambda \cot \xi \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \lambda^2 (1 + 2 \cot^2 \xi) \sin 2(\alpha + \beta) + \text{Gl. 3.}$$

Setzen wir auf der linken Seite  $\alpha = A - A_0$  und bezeichnen

$$A - \frac{\pi}{2} - A_0 = \Omega,$$

wo  $\Omega$  konstant ist, so haben wir

$$a = A + \Omega + \beta + \lambda \cot \xi \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \lambda^2 (1 + 2 \cot^2 \xi) \sin 2(\alpha + \beta) + \text{Gl. 3} \dots \dots 12)$$

Aus den Gleichungen 8) und 11) haben wir

$$\xi = \xi' + \frac{bc}{\sin \xi'} + \frac{b^2 + c^2}{2} \cot \xi' + \text{Gl. 3.}$$

$$z = \xi + \lambda \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \lambda^2 \cot \xi \cos^2(\alpha + \beta) + \text{Gl. 3.}$$

Hieraus

$$\begin{aligned} z &= \xi' + \lambda \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \lambda^2 \cot \xi \cos^2(\alpha + \beta) + \\ &+ \frac{bc}{\sin \xi'} + \frac{b^2 + c^2}{2} \cot \xi' + \text{Gl. 3} \dots \dots \dots 13) \end{aligned}$$

Führen wir endlich in 12) und 13) den Ausdruck  $\beta$  aus 9), so erhalten wir bis zu den Gliedern 3. Ordnung:

$$\begin{aligned}
 A - A_0 &= \alpha, \quad \pm (B - B_0) = \zeta', \quad 206265 = \varrho, \\
 \alpha &= A + \varrho + b \cot \zeta' + \frac{c}{\sin \zeta'} + \lambda \cot \zeta' \cos \alpha - \frac{1}{\varrho} b \lambda \cot^2 \zeta' \sin \alpha - \\
 &\quad - \frac{1}{\varrho} c \lambda \frac{\cos \zeta'}{\sin^2 \zeta'} \sin \alpha - \frac{1}{4\varrho} \lambda^2 (1 + 2 \cot^2 \zeta') \sin 2\alpha \\
 z &= \pm (B - B_0) + \lambda \sin \alpha + \frac{1}{2\varrho} b^2 \cot \zeta' + \frac{1}{\varrho} b c \operatorname{cosec} \zeta' + \\
 &\quad + \frac{1}{2\varrho} c^2 \cot \zeta' + \frac{1}{\varrho} b \lambda \cot \zeta' \cos \alpha + \frac{1}{\varrho} c \lambda \frac{\cos \alpha}{\sin \zeta'} + \frac{1}{2\varrho} \lambda^2 \cot \zeta' \cos^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

In den beiden letzten Formeln, welche die Entwicklungen des Azimutes und der Zenitdistanz der Zielachse nach den Potenzen der Instrumentenfehler  $b, c, \lambda$  darstellen, sind alle Glieder der 1. und 2. Ordnung berücksichtigt.

## Versuchs- und Vergleichs-Längenmessungen an der Wiener-Neustädter Basis.

Dem rührigen und umsichtigen Leiter der geodätischen Gruppe im k. u. k. militärgeographischen Institute in Wien, k. u. k. Hauptmann L. Andres, ist es zu danken, daß das k. u. k. militärgeographische Institut in Wien unter dem zielbewußten, allen zeitgemäßen Neuerungen auf geodätischem Gebiete volle Würdigung zollenden Kommandanten, Seiner Exzellenz dem Herrn k. u. k. Feldmarschalleutnant Otto Frank, interessante Versuchs- und Vergleichs-Längenmessungen an der Wiener-Neustädter Basis im heurigen Frühjahr angeordnet hat.

Das Programm dieser Arbeiten umfaßte:

1. Die Messung des südlichen Drittels der Wiener-Neustädter Basis mit dem alten «Österreichischen Basisapparate» (Basisapparat von Borda),
2. die Schaffung einer Etalonierungsbasis für die benützten Invardrähte und
3. die Messung des genannten Basisdrittels mit Invardrähten.

Zu diesen interessanten Arbeiten gingen Einladungen an Korporationen und einzelne Personen aus, von denen man wußte, daß sie ein reges Interesse für diese Arbeiten bekunden.

Die Vorarbeiten für die Basismessung: Abtragen der Monumente in den Basisendpunkten, Signalbau, Planierungen, Auspflocken der Geraden nebst approximativer Fixierung für die einzelnen Lagen der Meßstangen, sowie die Abholzungen des Baumbestandes, der in der Richtung der Basis sich befand, wurden Ende April und anfangs Mai vorgenommen und nahmen acht Tage in Anspruch.

Der erste Punkt des Programmes wurde am 4. Mai l. J. in Angriff genommen. Das 2.737 m lange südliche Basisdrittel wurde in nahezu vier gleiche Teile untergeteilt. Die erste Teilstrecke, vom südlichen Basispunkte, etwa 3 km von Neunkirchen entfernt, beginnend, wurde dreimal, die folgenden zwei je zweimal gemessen; diese Arbeiten erforderten neun Tage.