Paper-ID: VGI_190833

Über die Methode der kleinsten Quadrate

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Oberingenieur des Wiener Stadtbauamtes*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (10, 11), S. 295–300, 340–343

1908

BibTeX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_190833,
Title = {{\"U}ber die Methode der kleinsten Quadrate},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {295--300, 340--343},
Number = {10, 11},
Year = {1908},
Volume = {6}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer Max Reinisch.

Nr. 10. **Wien, am 1. Oktober 1908.** **VI. Jahrgang.**

Über die Methode der kleinsten Quadrate.

Von **S. Wellisch,** Oberingenieur des Wiener Stadtbauamtes.

(Nach einem am 29. November 1907 im Verein der k. k. Vermessungsbeamten an der Technischen Hochschule in Wien gehaltenen Vortrage.)

I. Über die Einteilung der Ausgleichungsaufgaben.

Die Bestimmung einer unbekannten Größe kann auf direktem oder indirektem Wege erfolgen.

Bei der direkten Bestimmung kann die zu suchende Unbekannte einer unmittelbaren Beobachtung zugänglich sein, oder sie kann aus unmittelbaren Beobachtungen anderer Größen durch eine mathematische Beziehung direkt abgeleitet werden. Ist z. B. x die unbekannte Länge einer Strecke und L der wahre Wert des hiefür erhaltenen Messungsresultates, so hat man die unmittelbare Bestimmung der Unbekannten ausgedrückt durch die Gleichung

$$x = L.$$

Wird aber x als Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes durch unmittelbares Messen der beiden Katheten a und b abgeleitet, so lautet die Bestimmungsgleichung

$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

welche aber, da $\sqrt{a^2 + b^2} = L$ nach erfolgter Messung berechenbar ist, wieder in der ursprünglichen Form

$$x = L$$

geschrieben werden kann. Ist v die an die fehlerhafte Beobachtung l anzubringende Verbesserung, so lautet die wahre Beobachtungsgröße $L = l + v$ und die sogenannte „Fehlergleichung direkter Beobachtungen" in allgemeiner Form

$$x - l = v.$$

Bei der indirekten Bestimmung unbekannter Elemente werden solche Größen beobachtet, welche mit den Unbekannten in einem theoretischen, in Form einer Vermittlungsgleichung ansetzbaren Zusammenhange stehen.

Die allgemeine Form einer linearen Vermittlungsgleichung zwischen den Unbekannten $x, y, z, \ldots$ und dem wahren Werte der Beobachtungsgröße L ist

$$a x + b y + c z + \ldots = L,$$

worin die Koeffizienten $a, b, c \ldots$ vor Anstellung der Beobachtungen angegeben, also als bekannte Zahlenwerte betrachtet werden können. Z. B. Die Formel für die nach der Theorie der optischen Distanzmessung aus dem Lattenabschnitte λ zu ermittelnde Distanz D lautet

$$D = C\lambda + c,$$

worin C und c instrumentale Konstante bedeuten, die für ein vorliegendes Instrument genau zu ermitteln sind. Die Unbekannten sind daher $x = C$, $y = c$, die Beobachtungsgröße ist $L = D$ und die gegebenen Koeffizienten sind $a = \lambda$ und $b = 1$. In üblicher Form lautet sohin die Vermittlungsgleichung für die Konstantenbestimmung der Distanzformel

$$a x + b y = L$$

oder $$\lambda C + 1 c = D.$$

Bedeutet wieder v die an die fehlerhafte Beobachtung anzubringende Verbesserung, so lautet die „Fehlergleichung vermittelnder Beobachtungen" allgemein

$$a x + b y + c z + \ldots - l = v.$$

Die allgemeine Form einer linearen Bedingungsgleichung zwischen den wahren Werten der Unbekannten $L_1, L_2, L_3 \ldots$, für welche die mit den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern $v_1, v_2, v_3 \ldots$ behafteten Werte $l_1, l_2, l_3 \ldots$ durch direkte Beobachtungen erhalten wurden, ist

$$p_0 + p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3 + \ldots = o.$$

Werden in die Bedingungsgleichung statt der wahren Werte L die fehlerhaften Beobachtungsresultate l eingeführt, so geht die Bedingungsgleichung in die Widerspruchsgleichung

$$p_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots = \omega$$

über und man erhält damit durch Substitution der Werte $L = l + v$ in die Bedingungsgleichung die „Fehlergleichung bedingter Beobachtungen"

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \ldots + \omega = o.$$

Hat man beispielsweise die drei Innenwinkel α, β, γ eines Dreieckes gemessen, so haben sie widerspruchsfrei die Bedingung zu erfüllen, daß deren Summe gleich 180^0 sein muß; die Bedingungsgleichung lautet sohin

$$\alpha + \beta + \gamma - 180 = o,$$

und es besteht im Falle des Auftretens eines Winkelwiderspruches ω die Fehlergleichung

$$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma + \omega = o.$$

Werden die Unbekannten der Bedingungsgleichungen nicht direkt, sondern durch vermittelnde Beobachtungen bestimmt, so spricht man zum Unterschiede von dem Problem der „direkten bedingten Beobachtungen" von dem Problem der „vermittelnden bedingten Beobachtungen" oder von „vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen", für welche Bestimmungsart folgende Gleichungen zur Verfügung stehen:

$$
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots &= L_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots &= L_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + \ldots &= o \\
q_0 + q_1 x + q_2 y + q_3 z + \ldots &= o \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Alle diese verschiedenen Fälle lassen sich in eine allgemeine Form der Fehlergleichungen von folgendem Bau zusammenfassen;

$$
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + \ldots + \omega_1 &= o \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3 + \ldots + \omega_2 &= o
\end{aligned}
$$

u. s. w.,

so daß von diesen „Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen mit Unbekannten" die aufgeführten Formen als Spezialfälle erscheinen.

Diese Unterscheidung der Hauptformen der Ausgleichungsaufgaben ist aber keine streng abgegrenzte, es können dieselben Aufgaben nach verschiedenen Methoden je nach der Bequemlichkeit der Rechnung aufgelöst und eine Berechnungsform auf eine andere zurückgeführt werden. Im folgenden Kapitel wird dargetan werden, daß der einfachste Fall direkter Beobachtungen nicht nur als ein Spezialfall der vermittelnden, sondern auch der bedingten Beobachtungen betrachtet werden kann.

II. Über die Beobachtungsdifferenzen.

Es ist bekannt, daß der einfachste Fall der direkten Beobachtungen als ein spezieller Fall des Problems der vermittelnden Beobachtungen anzusehen ist, indem in der allgemeinen Vermittlungsgleichung

$$a x + b y + c z + \ldots = L$$

nur eine Unbekannte x mit dem zugehörigen Koeffizienten $a = 1$ angenommen wird, so daß die Vermittlungsgleichung die spezielle Form erhält:

$$x = L.$$

Man kann aber das Problem der direkten Beobachtungen auch so behandeln, wie das Problem der bedingten Beobachtungen. Fügt man nämlich zu den n Fehlergleichungen direkter Beobachtungen

$$
\begin{aligned}
x &= l_1 + v_1 \\
x &= l_2 + v_2 \\
&\ldots\ldots \\
x &= l_n + v_n
\end{aligned}
$$

die stets erfüllbaren (n — 1) Bedingungsgleichungen hinzu:

$$l_1 + v_1 = l_2 + v_2 = \ldots = l_n + v_n$$

und bezeichnet man die Unterschiede oder die Widersprüche zwischen der ersten Beobachtung und den übrigen $(n-1)$ Beobachtungen der Reihe nach mit d_1, d_2, d_3, $\ldots d_{n-1}$, so erhält man die $(n-1)$ Widerspruchsgleichungen:

$$l_1 - l_2 = d_1$$
$$l_1 - l_3 = d_2$$
$$\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$$
$$l_1 - l_n = d_{n-1}$$

sowie die $(n-1)$ Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen:

$$v_1 - v_2 + d_1 = o$$
$$v_1 - v_3 + d_2 = o$$
$$\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$$
$$v_1 - v_n + d_{n-1} = o.$$

Soll der Minimumsbedingung $[vv] = min$ Genüge geleistet werden, so muß die Gleichung bestehen:

$$v_1\,dv_1 + v_2\,dv_2 \ldots + v_n\,dv_n = o.$$

Damit diese Gleichung mit den Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen gleichzeitig befriedigt werde, differenziere man diese Fehlergleichungen und multipliziere die so erhaltenen Gleichungen der Reihe nach mit den vorläufig noch unbestimmten Korrelaten $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$. Man erhält so:

$$k_1 \quad dv_1 - k_1 \quad dv_2 = o$$
$$k_2 \quad dv_1 - k_2 \quad dv_3 = o$$
$$\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$$
$$k_{n-1}\,dv_1 - k_{n-1}\,dv_n = o$$

Durch Addition entsteht hieraus die Summengleichung:

$$(k_1 + k_2 + \ldots k_{n-1})\,dv_1 - k_1\,dv_2 - k_2\,dv_3 - \ldots - k_{n-1}\,dv_n = o,$$

welche, mit der aus der Minimumsbedingung hervorgegangenen Gleichung verglichen, nach dem Satze von den gleichen Keoffizienten folgende n Korrelatengleichungen liefert:

$$v_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}$$
$$v_2 = -k_1$$
$$v_3 = -k_2$$
$$\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$$
$$v_n = -k_{n-1}.$$

Substituiert man diese Werte der scheinbaren Fehler in die Fehlergleichungen bedingter Beobachtungen, so bekommt man die $(n-1)$ Normalgleichungen für die Bestimmung der $(n-1)$ Korrelaten:

$$\begin{aligned}
2k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{n-1} + d_1 &= o\\
k_1 + 2k_2 + k_3 + \ldots + k_{n-1} + d_2 &= o\\
k_1 + k_2 + 2k_3 + \ldots + k_{n-1} + d_3 &= o\\
\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot& \\
k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + 2k_{n-1} + d_{n-1} &= o
\end{aligned}$$

Werden dieselben nach den Korrelaten aufgelöst, so erhält man diese als Funktionen der Beobachtungsdifferenzen, und setzt man die nunmehr bestimmten Korrelaten in die Korrelatengleichungen ein, so erscheinen auch die Verbesserungen v durch die Differenzen d ausgedrückt. Die Auflösung der Normalgleichungen geschieht am einfachsten dadurch, daß man sie zunächst addiert, wodurch erhalten wird:

$$n\,(k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}) = -\,(d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1})$$

oder:

$$[k] = -\frac{[d]_1}{n}.$$

Schreibt man jetzt die Normalgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} [k] + k_1 + d_1 &= o \\ [k] + k_2 + d_2 &= o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [k] + k_{n-1} + d_{n-1} &= o \end{aligned}$$

so ergeben sich sofort die einzelnen Korrelaten:

$$k_1 = \frac{[d]_1}{n} - d_1 \qquad k_2 = \frac{[d]_1}{n} - d_2 \qquad \text{u. s. w.}$$

und die Verbesserungen sind:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -\frac{[d]_1}{n} \\ v_2 &= -\frac{[d]_1}{n} + d_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= -\frac{[d]_1}{n} + d_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; A)$$

Setzt man die Verbesserung der ersten Beobachtung in die erste Fehlergleichung direkter Beobachtungen ein, so ergibt sich das arithmetische Mittel:

$$x = l_1 - \frac{[d]_1}{n}.$$

Bildet man die Summe der Gleichungen A), so kommt die bekannte Beziehung $[v] = o$ zum Vorschein; bildet man die Summe der Quadrate aller Verbesserungen, so erhält man

$$[vv] = [dd]_1 - \frac{[d]_1^2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; B)$$

Werden die Fehlergleichungen direkter Beobachtungen in der Form

$$\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ v_2 &= x - l_2 \\ &\ldots\ldots \\ v_n &= x - l_n \end{aligned}$$

quadriert und addiert, so erhält man zunächst

$$[vv] = n x^2 - 2x\,[l] + [ll],$$

oder wenn für $x = \frac{[l]}{n}$ gesetzt wird, die von Jordan angegebene Formel:

$$[vv] = [ll] - \frac{[l]^2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; C)$$

Die Bildung von $[vv]$ kann also auf dreierlei von einander unabhängigen Wegen erfolgen; einmal direkt durch Rechnung der einzelnen v und indirekt entweder mit Hilfe der Beobachtungsresultate oder der Beobachtungsdifferenzen.

Spezielle Fälle:

Für $n = 2$ ist: $v_1 = -\frac{d}{2}$ $\quad v_2 = +\frac{d}{2}$

» $n = 3$ »: $v_1 = -\frac{d_1 + d_2}{3}$ $\quad v_2 = -\frac{d_2 - 2d_1}{3}$ $\quad v_3 = -\frac{d_1 - 2d_2}{3}$

Bei ungleichen Gewichten lauten die

Normalgleichungen und die Korrelatengleichungen

$$\frac{[k]}{p_1} + \frac{k_1}{p_2} + d_1 = o \qquad v_1 = \frac{[k]}{p_1}$$

$$\frac{[k]}{p_1} + \frac{k_2}{p_3} + d_2 = o \qquad v_2 = -\frac{k_1}{p_2}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\frac{[k]}{p_1} + \frac{k_{n-1}}{p_n} + d_{n-1} = o \qquad v_n = -\frac{k_{n-1}}{p_n}$$

Für den speziellen Fall zweier Beobachtungen ist:

$$v_1 = -\frac{p_2 d}{p_1 + p_2} = -\frac{m_1^2 d}{m_1^2 + m_2^2}$$

$$v_2 = +\frac{p_1 d}{p_1 + p_2} = +\frac{m_2^2 d}{m_1^2 + m_2^2}$$

d. h. es verhalten sich bei Doppelbeobachtungen die scheinbaren Fehler umgekehrt wie die einfachen Potenzen der Gewichte oder gerade wie die Quadrate der mittleren Fehler. (Schluß folgt.)

Entwurf neuer Katastral-Koordinatensysteme

auf der Grundlage der österreichischen Gradmessung für die im Reichsrate vertretenen Königreiche und Länder.

Von **Dr. A. Semerád,** Privatdozent an der k. k. böhm. techn. Hochschule in Brünn.

(Schluß).

Zur Reduktion der Polarkoordinaten ist es nötig, die Reduktions-Elemente der Seitenlängen sowie der Richtungswinkel für die vorgeschlagene Projektion zu ermitteln.

Bei der Lösung dieser Aufgaben sind die rechtwinkeligen Koordinaten der Seiten-Endpunkte bekannt, oder sie werden als vorläufige Größen angenähert (mit ziemlich großer Toleranz) bestimmt.

Mit Hilfe der rechtwinkeligen Koordinaten der Endpunkte lassen sich die Reduktionselemente der Logarithmen der Seitenlängen dann einfach ableiten.

Für die vorgeschlagene Ausdehnung der Koordinaten-Systeme kommen die höheren Glieder in der Reihenentwickelung für die Bestimmung der Seitenverzerrung in der angenommenen Projektion nicht in Betracht und dieselbe wird streng durch die Gleichung (4) ergeben. Die mit diesen Verbesserungen berechneten, ausgeglichenen Werte der Dreieckswinkel entsprechen tatsächlich den durch die Beobachtung erhaltenen Lageverhältnissen der Dreieckspunkte und es werden daher diese Verbesserungen von Wellisch mit Recht als «natürliche Verbesserungen» bezeichnet. Die von Wellisch angegebene Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Produkte wurde von ihm auch schon bei praktischen Arbeiten mit großem Vorteile angewendet.

So führte er z. B. die Ausgleichung der für die Trassierung der zweiten Wiener Hochquellenleitung von ihm durchgeführten Triangulierungen nach diesem Verfahren aus und erreichte durch dasselbe bei der Richtungsangabe für die Stollen eine ganz bedeutende, bei der Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate kaum zu erreichende Genauigkeit.

Als Beispiel für diese Genauigkeit seien die bei der Absteckung des Grubbergstollens erhaltenen Resultate angeführt. Die Länge dieses Stollens beträgt rund 3670 *m*, die auf Grund der Ausgleichung der gemessenen Winkel nach der Methode der kleinsten Produkte berechnete Länge ergab gegen den nach dem Durchschlage direkt bestimmten Wert derselben einen Unterschied von 30 *cm*, die Querabweichung beim Durchschlage des Stollens war 6 *mm* und der Niveauunterschied der Vereinigungsstellen der von den beiden Seiten getriebenen Stollenteile hatte eine Größe von 13 *mm*. Hätte man die Ausgleichung nach der gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt, so hätte die Querabweichung 33 *mm* betragen, so daß man sagen kann, daß die Methode der kleinsten Produkte sich zirka 5 bis 6mal so genau erwiesen hat, wie diejenige der kleinsten Quadrate.

Die neue Methode der Ausgleichung, welche von Oberingenieur Wellisch angegeben wurde, und deren Anwendung für Triangulierungen in dem eingangs zitierten Vortrage besprochen wurde, ist mithin nicht nur theoretisch einwandfrei, sondern es ist ihr Vorteil gegenüber der bisherigen Methode auch schon durch praktische Arbeiten dargetan, so daß Herr Oberingenieur Wellisch zu diesen Resultaten seiner eingehenden Forschungen auf dem Gebiete der Ausgleichsrechnung bestens beglückwünscht werden kann.

Über die Methode der kleinsten Quadrate.

Von **S. Wellisch**, Oberingenieur des Wiener Stadtbauamtes.

(Nach einem am 29. November 1907 im Verein der k. k. Vermessungsbeamten an der Technischen Hochschule in Wien gehaltenen Vortrage.)

(Schluß.)

III. Über die Berechnung der Fehlerquadratsumme.

Als Zahlenbeispiel benützen wir die in Prof. Eggert's Geodäsie enthaltene Reihe von Längenmessungen:

s in m	v_0 in cm	$v_0 v_0$	d in cm	dd
624·63	+ 4	16		
69	— 2	4	— 6	36
80	—13	169	—17	289
58	+ 9	81	+ 5	25
64	+ 3	9	— 1	1
54	+13	169	+ 9	81
73	— 6	36	—10	100
80	—13	169	—17	289
54	+13	169	+ 9	81
66	+ 1	1	— 3	9
77	—10	100	—14	196
624·70	— 3	9	— 7	49
624·67	— 4	932	—52	1156

Das arithmetische Mittel ist $x = \frac{[s]}{12} = 624 \cdot 67$ mit dem Rest 0·04 oder genau $x = 624 \cdot 6733 \ldots$ Rechnet man mit dem abgekürzten Werte $x_0 = 624 \cdot 67$ die scheinbaren Fehler v_0, so erhält man für $[v_0] = -0 \cdot 04$ den bei der Mittelbildung zurückgebliebenen Rest. Da aber $[v_0]$ gleich Null sein soll, so wird auch die Summe $[v_0 v_0] = 932$ nur einen Näherungswert darstellen.

Will man den genauen Wert dieser Summe erhalten, so hat man folgendes zu beachten. Es ist die Differenz zwischen dem genauen und dem abgekürzten Mittel $x - x_0 = \delta_x$ gleich der Differenz zwischen dem genauen und genäherten Wert des scheinbaren Fehlers, so daß man hat:

$$v = v_0 + \delta_x$$
$$[vv] = [v_0 v_0] + 2[v_0]\delta_x + n \cdot \delta_x^2.$$

Im obigen Beispiele ist $\delta_x = + \frac{1}{3}\,cm$, $[v_0] = -4\,cm$, sohin ist

$$[vv] = 932 - 2 \cdot 66 + 1 \cdot 33 = 930 \cdot 67.$$

Diesen genauen Wert erhält man aber sofort, wenn man die Beobachtungsdifferenzen d und die Formel $B)$

$$[vv] = [dd] - \frac{[d]^2}{n}$$

verwendet, denn es ergibt sich:

$$[dd] = 1156, \quad [d] = -52, \quad \frac{[d]^2}{n} = 225 \cdot 33$$

somit:

$$[vv] = 930 \cdot 67.$$

Die Berechnung mittelst der neuen Formel $B)$ ist sohin nicht nur einfacher, sondern auch genauer, als die nach der Methode der direkten Berechnung der einzelnen v und auch einfacher als die Berechnung mittels der Jordan'schen Formel $C)$.

IV. Über die Ableitung der Formel für den mittleren Fehler.

Die wichtige Formel für den mittleren Wert der scheinbaren Beobachtungsfehler wird gewöhnlich wie folgt abgeleitet.

Ist X der wahre Wert der Beobachtungsgrößen $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$

$x = \frac{[l]}{n}$ ihr arithmetisches Mittel und

$X - x = \xi$ der wahre Fehler des arithmetischen Mittels, so daß allgemein

$\varepsilon_i = X - l_i$ den wahren Fehler und

$v_i = x - l_i$ den scheinbaren Fehler der Beobachtung l_i bezeichnet und sohin die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= v_1 + \xi\\ \varepsilon_2 &= v_2 + \xi\\ &\ldots\ldots\\ \varepsilon_n &= v_n + \xi\end{aligned}$$

so ergeben sich zunächst, indem man zuerst addiert und dann quadriert unter Berücksichtigung, daß für das arithmetische Mittel $[v] = o$ sein muß:

$$[\varepsilon]^2 = n^2 \xi^2$$

oder, da in $[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon] + 2[\varepsilon_i \varepsilon_k]$ das letzte Glied verschwindet, weil sich diese doppelten Produkte der unbestimmten Vorzeichen wegen mit größter Wahrscheinlichkeit im Durchschnitte gegenseitig aufheben:

$$\xi^2 = \frac{[\varepsilon]^2}{n^2} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}.$$

Wird aber zuerst quadriert und dann addiert, so erhält man

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + n\xi^2$$

oder wenn für ξ der soeben abgeleitete Wert eingesetzt wird:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}.$$

Indem hierin für $[\varepsilon\varepsilon] = nm^2$ eingeführt wird, weil nach der strengen Definition des mittleren Fehlers

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

ist, resultiert:

$$nm^2 = [vv] + m^2$$

oder

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

Sind also statt der wahren Beobachtungsfehler ε die scheinbaren Fehler v gegeben, so hat im Nenner an die Stelle von n die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen $n - 1$ zu treten. Der hier gegebenen Entwicklung liegt aber die Annahme zu Grunde, daß die Summe $[\varepsilon_i \varepsilon_k] = o$ ist, gegen welche Annahme Bertrand (1888) Bedenken erhoben hat. (Vergl. Czuber, Theorie der Beob., S. 153). Jordan (1869) hat daher die Ersetzung des Nenners n durch $n - 1$ mit Hilfe der Beobachtungsdifferenzen begründet, jedoch in einer anderen Weise, als es hier im Anschlusse an die Entwicklungen des vorigen Kapitels geschehen soll.

In der Formel $B)$ sind die Summen $[dd]_1$ und $[d]_1$ mit dem Index 1 versehen zum Zeichen, daß die darin vorkommenden Differenzen von der ersten Beobachtung l_1 aus gezählt wurden. Setzt man in diese Formel für $[d]_1$ den Wert aus $v_1 = -\frac{[d]_1}{n}$, so erhält sie die Form $[vv] = [dd]_1 - nv_1^2$, und wenn man der Reihe nach jede der n Beobachtungen die Rolle der Anfangsbeobachtung spielen läßt, ergibt sich folgende Gruppe von Gleichungen:

$$[vv] = [dd]_1 - n v_1^2$$
$$[vv] = [dd]_2 - n v_2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$[vv] = [dd]_n - n v_n^2$$

Summe: $$n[vv] = [[dd]] - n[vv]$$
oder: $$2n[vv] = [[dd]].$$

In dieser Summengleichung kommen die Differenzen d in der Anzahl $n(n-1)$ vor, wobei aber jede Differenz bei der Kombination jeder einzelnen Beobachtung mit den übrigen $(n-1)$ Beobachtungen doppelt auftritt. Setzt man jedes d nur einmal an, so hat man die Beziehung

$$n[vv] = [dd],$$

worin jetzt $[dd]$ ohne Index die Quadratsumme aller in der Anzahl $z = \frac{1}{2} n(n-1)$ auftretenden Beobachtungsdifferenzen ohne Widerholungen bedeutet. Hat man aber eine Anzahl z gleichartiger Differenzen d, welche den Charakter wahrer Beobachtungsfehler besitzen, weil sie ja bei fehlerfreien Beobachtungen den Wert Null ergeben, so kann man die mittlere Differenz δ je zweier Beobachtungen entsprechend der strengen Definition des mittleren Fehlers berechnen nach der Formel:

$$\delta^2 = \frac{[dd]}{z} = \frac{2[dd]}{n(n-1)}.$$

Daraus ist

$$[dd] = \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 = n[vv]$$

somit

$$[vv] = \frac{n-1}{2}\delta^2.$$

Zwischen der mittleren Differenz zweier Beobachtungen und dem mittleren Fehler einer einzelnen dieser Beobachtungen besteht aber die Relation:

$$\delta^2 = 2m^2,$$

somit ist
$$[vv] = (n-1)m^2$$
und
$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$
oder auch
$$m = \sqrt{\frac{[dd]}{n(n-1)}},$$
welche die Andrae'sche Formel genannt wird.

Die Grundbuchsmappe.

Ein Beitrag zur Erkenntnis ihrer Bedeutung für das Privatrecht.

Von Landesgerichtsrat Karl Krapf in Graz.

(Schluß.)

Randa ist mit sich selbst in offenem Widerspruch. Einerseits behauptet er (a. a. O. S. 464, Anm. 17), daß der Kataster, welcher bloß Steuerzwecken