Über die günstigste Anordnung der Winkelmessungen in einem Dreieck

Adolf Klingatsch [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **6** (12), S. 359–370

1908

BibTEX:


```
@ARTICLE{Klingatsch_VGI_190839,
Title =  {{\"U}ber die g{\"u}nstigste Anordnung der Winkelmessungen in einem
   Dreieck},
Author =  {Klingatsch, Adolf},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {359--370},
Number =  {12},
Year =  {1908},
Volume =  {6}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer Max Reinisch.

Nr. 12. **Wien, am 1. Dezember 1908.** **VI. Jahrgang.**

Über die günstigste Anordnung der Winkelmessungen in einem Dreieck.

Von Prof. dipl. Ing. A. Klingatsch in Graz.

I.

Das Problem, in einem Dreiecksnetze die Gesamtarbeit an Winkelmessungen auf die einzelnen Winkel des Netzes so zu verteilen, daß eine gegebene Seite mit möglichst großem Gewichte hervorgeht, hat bekanntlich durch Generalleutnant Schreiber[1]) seine Lösung gefunden, welche in dem sogenannten Schreiber'schen Satze zum Ausdruck kommt. Dieser lautet:

«Wenn in einem Dreiecksnetze mit Bedingungsgleichungen eine Seite mit möglichst großem Gewichte P bei konstanter Summe $[p]$ der Winkelmessungen $p_1, p_2 \ldots$ bestimmt werden soll, so ist unter den hiezu möglichen Verteilungen der Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung jener einen Seite unumgänglich nötigen Winkel beträgt, während die übrigen Gewichte p alle = Null zu setzen sind.»

Ist in einem Dreiecke ABC der gesamte Arbeitsaufwand an Winkelmessungen, also die Summe der Gewichte der drei Winkel α, β, γ mit den Scheiteln A, B, C vorgeschrieben, und sind s_1, s_2, s_3 die den Winkeln α, β, γ gegenüberliegenden Seiten, so lassen sich leicht diejenigen beiden Winkel bestimmen, welche zu messen sind, um eine Seite — etwa s_2 — aus einer gegebenen Seite s_1 mit möglichst großem Gewicht abzuleiten.

Ist das Dreieck spitzwinkelig, so entfällt die Messung von γ; ist $\beta > 90^0$, so entfällt die Messung von β, ist endlich $\alpha > 90^0$, so ist dieser Winkel nicht zu messen.[2]) Ebenso ergeben sich in diesem Falle unschwer die Gewichtsverhältnisse

[1]) Schreiber, Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz. Zeitschrift für Vermw. Stuttgart 1882.

Runge, Der Schreiber'sche Satz. Zeitschrift für Vermw. Stuttgart 1890.

[2]) Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Aufl. 1907. Seite 569.

der zu messenden Winkel und aus der bekannten Summe der Gewichte auch diese selbst.

Nun dient aber ein System von Winkelmessungen nicht allein zur Bestimmung einer einzigen Funktion, hier einer Dreiecksseite, sondern im allgemeinen zur Ermittlung mehrerer Funktionen, in dem obigen Falle der beiden Dreiecksseiten s_2 und s_3.

Ist beispielsweise das Dreieck ABC ein Bestandteil einer Dreieckskette, welche etwa die Bestimmung der Entfernung zweier Punkte zum Zwecke hat, so wird es sich nicht allein darum handeln, die Verteilung der Gewichte in diesem Dreieck so vorzunehmen, daß nur eine Seite s_2 möglichst sicher bestimmt wird, sondern es wird diejenige Verteilung zweckmäßiger sein, welche die beiden Seiten s_2 und s_3 möglichst genau abzuleiten gestattet, da eben die Fehler der beiden Seiten für die Genauigkeit der durch die folgenden Dreiecke zu bestimmenden Punkte jener Kette in Betracht kommen. In diesem Falle werden im allgemeinen alle drei Winkel des Dreieckes gemessen werden müssen.

Unter der Annahme, daß in jedem Dreieck der Arbeitsaufwand an Winkelmessungen gegeben ist und die einzelnen Dreiecke der Kette durch keine Diagonalen mit einander verbunden sind, genügt es, die Untersuchungen für ein einzelnes Dreieck durchzuführen, da unter den obigen Voraussetzungen die Bedingungsgleichungen für den Sollbetrag der Winkelsumme in den einzelnen Dreiecken der Kette von einander unabhängig sind.

Wegen

$$s_2 = s_1 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 1)$$

und

$$\alpha + \beta + \gamma - 180 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 2)$$

erhält man das Gewicht P der Seite s_2 aus der vorläufig als fehlerfrei anzunehmenden Seite s_1 aus

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 3)$$

wo

$$f_1 = \frac{\partial s_2}{\partial \alpha} = -s_2 \operatorname{cotg}\alpha,\ f_2 = \frac{\partial s_2}{\partial \beta} = s_2 \operatorname{cotg}\beta,\ f_3 = 0 \quad \ldots \ldots 4)$$

ist.

Nennt man m_2 den mittleren Fehler der Seite s_2, so ist

$$m_2 = \frac{\varepsilon}{\varrho}\sqrt{\frac{1}{P}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 5)$$

wo ε den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bedeutet und $\varrho = 206265$ ist.

Wird schließlich

$$c_1 = \operatorname{cotg}\alpha,\quad c_2 = \operatorname{cotg}\beta,\quad c_3 = \operatorname{cotg}\gamma \quad \ldots \ldots \ldots 6)$$

gesetzt, so folgt aus 5) und 3) mit Rücksicht auf 4) und 6)

$$m_2 = \frac{\varepsilon}{\varrho} s_2 \sqrt{\frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1}} \quad \ldots \ldots \ldots 7)^*)$$

*) Jordan-Reinhertz, Handbuch der Vermessungskunde, III. Band, 5. Aufl. 1907. S. 151.

und analog für den mittleren Fehler m_3 der ebenfalls aus s_1 abgeleiteten Seite s_3

$$m_3 = \frac{c}{\varrho}\, s_1 \sqrt{\frac{p_1 c_3^2 + p_3 (c_1 + c_3)^2 + p_2 c_1^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

In diesen Gleichungen bezeichnen p_1, p_2, p_3 die Gewichte von α, β, γ.

Wir setzen schließlich noch die mit $\frac{\varrho}{l}$ multiplizierten Fehlerverhältnisse $\frac{m_2}{s_2}$, $\frac{m_3}{s_3}$ der Seiten s_2 und s_3, welche den Charakter von Einheitsfehlern, respektive relativen Fehlern haben, nämlich

$$\frac{\varrho}{l} \cdot \frac{m_2}{s_2} = \mu_2, \quad \frac{\varrho}{l} \cdot \frac{m_3}{s_3} = \mu_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

und erhalten aus 7) und 8) für die Fehlerverhältnisse μ_2 und μ_3

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

$$\mu_3 = \sqrt{\frac{p_1 c_3^2 + p_2 (c_1 + c_3)^2 + p_3 c_1^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

Wir stellen uns nunmehr die Aufgabe, bei gegebenem Arbeitsaufwand an Winkelmessungen diejenige Gewichtsverteilung zu finden, bei welcher die eine Seite — etwa s_2 — in Bezug auf ihr Fehlerverhältnis möglichst genau abgeleitet wird, für welche also μ_2 den kleinsten Wert erhält, wenn überdies ein vorgeschriebenes Verhältnis ν zwischen μ_2 und μ_3 eingehalten werden soll.

Da die Gewichte $p_1\, p_2\, p_3$ positive Zahlen sind, so setzen wir vorübergehend

$$p_1 = x_1^2, \quad p_2 = x_2^2, \quad p_3 = x_3^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

und erhalten die obigen drei Bedingungen nachstehend formuliert:

$$\mu_2 = F(x_1\, x_2\, x_3) = \text{Minimum:} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

$$\mu_2 - \nu \mu_3 = \varphi(x_1\, x_2\, x_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - [p] = \psi(x_1\, x_2\, x_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Die Lösung liegt daher in den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

in welchen k_1 und k_2 zwei Korrelaten bezeichnen, sowie in den Gleichungen 14) und 15) aus welchen k_1 und k_2 eliminiert und $x_1\, x_2\, x_3$ bestimmt werden können.

Setzt man

$$a = c_2^2 - \nu^2 c_3^2, \quad b = c_1^2 - \nu^2 (c_1 + c_3)^2, \quad c = [(c_1 + c_2)^2 - \nu^2 c_1^2] \quad . \quad . \quad 17)$$

ferner mit Bezug auf 12)

$$p_1 = x_1^2 = x, \quad p_2 = x_2^2 = y, \quad p_3 = x_3^2 = z,$$

so lauten die drei Gleichungen zur Bestimmung von x, y, z

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0 \quad \ldots\ldots \quad 18)$$

$$ax + by + cz = 0 \quad \ldots\ldots \quad 19)$$

$$x + y + z - [p] = 0, \quad \ldots\ldots \quad 20)$$

wo

$$\left.\begin{array}{lll} A = c_2^2(b-c), & B = c_1^2(c-a), & C = (c_1+c_2)^2(a-b) \\ D = 2c_1c_2(a-b), & E = -2c_2(c_1+c_2)(c-a), & F = -2c_1(b-c)(c_1+c_2) \end{array}\right\} \quad 21)$$

ist.

Wird
$$\frac{x}{y} = u, \quad \frac{z}{y} = v \quad \ldots\ldots \quad 22)$$

gesetzt, so bestimmen sich die Gewichtsverhältnisse u und v aus

$$Au^2 + Cv^2 + Euv + Du + Fv + B = 0 \quad \ldots\ldots \quad 23)$$

und

$$au + cv + b = 0 \quad \ldots\ldots \quad 24)$$

Mit diesen wird

$$x = \frac{[p].u}{u+v+1}, \quad y = \frac{[p]}{u+v+1}, \quad z = \frac{[p].v}{u+v+1} \quad \ldots \quad 25)$$

Hätte man die Forderung gestellt, statt μ_2 das Fehlerverhältnis der Seite s_3 nämlich μ_3 bei Einhaltung der sonstigen Bedingungen 14) und 15) zum Minimum zu machen, so führt die analoge Entwicklung auf die Gleichung

$$A'u^2 + C'v^2 + E'uv + D'u + F'v + B' = 0, \quad \ldots\ldots \quad 23^1)$$

wo

$$\left.\begin{array}{lll} A' = c_2^2(b-c), & B' = (c_1+c_2)^2(c-a), & C' = c_1^2(a-b) \\ D' = -2c_2(c_1+c_2)(a-b), & E' = 2c_1c_2(c-a), & F' = -2c_1(c_1+c_2)(b-c) \end{array}\right\} \quad 21^1)$$

ist und a, b, c nach 17) zu bestimmen sind.

Die Gleichungen 23¹) und 24) geben dann die Verhältnisse u und v und mit diesen aus 25) die Gewichte x, y, z.

Von Interesse ist der Fall $v = 1$, also nach 14) die Bedingung $\mu_2 = \mu_3$.

Die Gleichungen 23), 24) einerseits und 23¹), 24) andererseits liefern dann dieselbe Gewichtsverteilung, diejenige nämlich, für welche die beiden Fehlerverhältnisse $\frac{m_2}{s_2}$ und $\frac{m_3}{s_3}$ gleich groß sind und bei gegebenem Gesamtgewicht der Winkelmessungen ihren Minimalwert erreichen.

Selbstverständlich ist die Lösung aus den obigen Gleichungen nur dann zu verwenden, wenn sich positive Werte für x, y, z ergeben. Folgt für ein Gewicht ein negativer Wert, so ist ersteres = Null zu setzen; der betreffende Winkel ist dann nicht zu messen. Die drei Bedingungen 13), 14), 15) können dann nicht mehr gleichzeitig eingehalten werden, indem 14) und 15) genügen, die beiden Gewichte für die zu messenden Winkel zu bestimmen. Übrigens gibt es Fälle, wo für $v = 1$ der Gleichung 14) mit den lediglich in Betracht kommenden positiven Werten von x, y, z überhaupt nicht entsprochen werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn a, b, c dasselbe Vorzeichen haben.

Man kann die Gewichtsverteilung in einem Dreiecke noch von einem anderen Gesichtspunkte vornehmen.

Die Bedingungen wären

$$\mu_2 = F(x_1 x_2 x_3) = K \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 26)$$

$$\mu_3 - \nu \mu_2 = \varphi(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 27)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \psi(x_1 x_2 x_3) = \text{Minimum} \quad \ldots \ldots \quad 28)$$

wo 27) dasselbe ausdrückt wie die Gleichung 14)

Es soll also bei gegebenem Fehlerverhältnis der Seite s_2 und wegen 27) auch bei jenem der Seite s_3 die Gewichtsverteilung so vorgenommen werden, daß der gesamte Aufwand an Winkelmessungen in dem Dreiecke gemäß 28) ein Minimum werde.

Die Elimination der Korrelaten k_1 und k_2 aus den nunmehrigen Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + k_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + k_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$

liefert zur Bestimmung der Gewichte $p_1 = x$, $p_2 = y$, $p_3 = z$ dieselbe Gleichung 18) mit den durch 21) gegebenen Koeffizienten wie bei der früheren Fassung unserer Aufgabe.

Die beiden Gleichungen 23) und 24) geben daher für dasselbe Dreieck dieselben Werte für die Gewichtsverhältnisse u und v, ob es sich nun darum handelt, bei gegebener Gewichtssumme $[p]$ ein Seitenverhältnis möglichst günstig unter der weiteren Einschränkung abzuleiten, daß hiedurch das Fehlerverhältnis der anderen abzuleitenden Seite nicht ungünstig beeinflußt wird, sondern mit jenem der ersten Seite an die Bedingung 14), resp. 27) gebunden sein soll, oder aber ob bei den nach den Gleichungen 26) und 27) vorgegebenen Fehlerverhältnissen der Seiten s_2 und s_3 die Gewichtsverteilung so zu treffen ist, daß der gesamte Aufwand an Winkelmessungen möglichst klein wird.

Die Gewichte selbst bestimmen sich in dem letzteren Falle, sowie u und v aus 23) und 24) gefunden sind aus 26) und 22).

Die erstere Gleichung liefert nämlich wegen 10) zunächst

$$y = \frac{c_2^2 u + (c_1 + c_2)^2 v + c_1^2}{K^2 (u + uv + v)}$$

und damit auch die beiden anderen Gewichte $x = yu$ und $z = y.v.$

Auch hier ist nur dann eine Ausgleichung möglich, wenn sich für x, y, z positive Werte ergeben.

Auch aus der Herleitung des Schreiber'schen Satzes überzeugt man sich leicht, daß dieselben Regeln, welche nach diesem Satze für die Ableitung einer Funktion von möglichst großem Gewichte bei gegebener Gewichtssumme der Winkelmessungen gelten, sich auch auf den Fall anwenden lassen, wo das Gewicht einer Funktion gegeben ist und der hiezu nötige Arbeitsaufwand an Winkelmessungen, also die Summe der Winkelgewichte auf ein Minimum gebracht werden soll.

II.

Bei der früheren Untersuchung betreffend die günstigste Gewichtsverteilung bei gegebener Gewichtssumme $[p]$ und möglichst kleinen Fehlerverhältnissen μ_2 und μ_3 ($\nu = 1$), wurde die Seite s_1 als fehlerfrei gegeben angesehen.

Wäre s_1 bereits selbst eine aus einem vorhergehenden Dreiecke abgeleitete Seite und m_1 ihr mittlerer Fehler, so folgt aus 1) wegen

$$\frac{\partial s_2}{\partial s_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{s_2}{s_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 29)$$

für den durch m_1 in s_2 hervorgerufenen Teilfehler m_2'

$$\frac{\varrho}{e}\cdot\frac{m_2'}{s_2} = \frac{\varrho}{e}\cdot\frac{m_1}{s_1} = \mu_1.$$

Hiebei ist m_1 durch eine die Gleichung 7) oder 8) analoge Beziehung, welche sich auf jenes Dreieck bezieht, aus welchem eben s_1 abgeleitet wurde, gegeben.

Es ist somit μ_1 von der Gewichtsverteilung in dem zur Ableitung der Seiten s_2 und s_3 dienenden Dreiecke unabhängig, daher auch unabhängig von dem Übertragungsfehler μ_2 der Seite s_2, welche durch diese Gewichtsverteilung hervorgerufen wird. Für die Seite s_2 erhält man daher das relative Fehlerquadrat $\mu_1^2 + \mu_2^2$, wo μ_2 aus 10) zu bestimmen ist.

Für eine Seite s_i einer Dreieckskette ist daher jenes Fehlerquadrat $\mu_i^2 = [\mu^2]$, wobei sich die Summe auf die relativen Fehlerquadrate aller jener Seiten des Netzes zu erstrecken hat, welche zur Ableitung der Seite s_i dienen.

Je kleiner daher die einzelnen μ sind, umso günstiger wird auch das Fehlerverhältnis für die abgeleitete Seite s_i der Dreieckskette sein, umso schärfer wird sich unter sonst gleichen Umständen die Entfernung zweier Punkte bestimmen lassen, da diese durch einen polygonalen Zug, dessen Seiten eben Bestandteile jener Kette sind, ermittelt wird.

Es sollen nun für einige spezielle Fälle die Gleichungen für u und v aufgestellt werden. Wir berücksichtigen hier lediglich den Fall $\nu = 1$, also wegen 14) und 9) die Bedingung $\mu_2 = \mu_3$, da im allgemeinen kein Grund vorliegt, die eine Seite in Bezug auf ihr Fehlerverhältnis genauer abzuleiten als die zweite, soferne dies eben möglich ist.

Das gleichschenkelige Dreieck.

Es sei $BC = s_1$ die Grundlinie, somit $AC = s_2 = AB = s_3$, oder $\beta = \gamma$.

In 6) ist dann $c_2 = c_3$ zu setzen, womit sich aus 17)

$$a = o, \quad b = -c_2(2c_1 + c_2), \quad c = -b$$

ergibt.

Mit den aus 21) folgenden Werten der Koeffizienten von 23) erhält man aus dieser Gleichung, sowie aus 24) zunächst

$$u = -\tfrac{1}{2} \pm \left(\tfrac{1}{2} + \frac{c_1}{c_2}\right)\sqrt{3}.$$

Da zwischen c_1 und c_2 in diesem Falle die Beziehung

$$c_2^2 + 2c_1c_2 = 1$$

stattfindet, so kann der Ausdruck für u auch in der einfacheren Form

$$u = \tfrac{1}{2}\left(-1 \pm \frac{1}{c_2^2}\sqrt{3}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 30)$$

geschrieben werden, während sich mit den obigen Werten von a, b, c aus 24) das selbstverständliche Resultat

$$v = -\frac{b}{c} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 31)$$

ergibt.

Da wegen 31) $v = \frac{z}{y}$ stets positiv ist, so sind stets die beiden Winkel β und γ, und zwar gleich genau zu messen. Eine Ausgleichung ist, da nur das obere Zeichen des Wurzelausdruckes in 30) in Frage kommt, nur möglich, wenn sich aus 30) $u > 0$ ergibt, so lange also $c_2^2 > \sqrt{3}$ oder $\beta > 37^0\,46'$ ist. Wird $\beta \overline{\gtrless}\, 37^0\,46'$, so ist das Gewicht x von α gleich Null zu setzen; dieser Winkel ist dann nicht mehr zu messen und folgen die gleich großen Gewichte y und z für β und γ dann aus 15).

Ist das Dreieck **gleichseitig** und hiebei wieder s_1 die Grundlinie, so folgt aus 30) mit $c_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$u = \tfrac{1}{2}(-1 \pm 3 \,.\, \sqrt{3}) = 2{\cdot}098 = \frac{x}{y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 30^1)$$

Der der Grundlinie s_1 gegenüberliegende Winkel α ist dann etwa doppelt so genau zu messen, wie die beiden anderen Winkel $\beta = \gamma = \alpha$.

Das rechtwinkelige Dreieck.

Ist s_1 die Hypotenuse, also $\alpha = 90^0$ und somit $c_1 = 0$ und $c_2 c_3 = 1$, so wird aus 17), wenn dort wie immer $v = 1$ gesetzt wird

$$a = \frac{c_2^4 - 1}{c_2^2}, \quad b = -\frac{1}{c_2^2}, \quad c = -\frac{1}{b}.$$

Aus 23) erhält man mit den aus 21) folgenden Werten für die Koeffizienten jener Gleichung

$$u = \frac{-c_2^4 + \sqrt{c_2^8 + c_2^4 + 1}}{c_2^4 + 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 32)$$

und aus 24)

$$v = \frac{1 + (1 - c_2^4)\,u}{c_2^4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 33)$$

Aus 32) ist zu ersehen, daß stets $u > 0$ bleibt. Dasselbe gilt nach 33) von v, wie man sich leicht überzeugt, wenn in 33) der aus 32) folgende Wert für u eingesetzt und berücksichtigt wird, daß wegen $\alpha = 90^0$, $c_2 > 0$ bleiben muß.

Eine Ausgleichung ist daher stets möglich und sind demnach alle drei Winkel zu messen.

Ist das Dreieck überdies gleichschenkelig, also $c_2 = 1$, so folgt aus 32) und 33)

$$u = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}) = 0{\cdot}366 = \frac{x}{y}\,; \quad v = 1$$

in Übereinstimmung mit 30), wenn dort $c_2 = 1$ gesetzt wird.

Beispiele.

Wir geben nun in einigen Fällen die Auswertung der aufgestellten Formeln. Zu diesem Zwecke sind aus den gegebenen Winkeln α, β, γ nach 6), 17) und 21) c_1, c_2, c_3, a, b, c sowie die Koeffizienten $A \ldots F$ zu berechnen und die Gleichungen 23) und 24) nach u und v aufzulösen. Die Gewichte x, y, z folgen dann aus 25). Bei den folgenden Beispielen ist mit Ausnahme des letzten $\nu = 1$ angenommen. Diejenigen Werte, welche μ_2 und μ_3 nach 10) und 11) annehmen, wenn die Winkel gleich genau gemessen werden, also bei gegebener Summe $[p]$, $x = y = z = \frac{1}{3}[p]$ gesetzt wird, sollen in der Folge mit (μ_2) und (μ_3) bezeichnet werden.

1. $\alpha = 50^0, \quad \beta = 70^0, \quad \gamma = 60^0.$

Es wird

$$u = 8{\cdot}757, \quad v = 4{\cdot}118, \quad \text{also}$$

$$x = 0{\cdot}631\,[p], \quad y = 0{\cdot}072\,[p], \quad z = 0{\cdot}297\,[p]$$

und folglich

$$\mu_2 = \mu_3 = \frac{1{\cdot}489}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34_1)$$

während

$$(\mu_2) = \frac{1{\cdot}511}{\sqrt{[p]}}, \quad (\mu_3) = \frac{1{\cdot}744}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 35_1)$$

ist.

Die Rechnung mit Benützung der Gleichungen 23') und 24), dem Minimum von μ_2 entsprechend, liefert natürlich dieselbe Gewichtsverteilung.

Würde man hingegen die Verteilung der Gewichte lediglich mit Rücksicht auf das günstigste Fehlerverhältnis der Seite s_2, also ohne Rücksicht auf die ebenfalls aus s_1 abzuleitende Seite s_3 vornehmen, so hätte man in Anwendung des Schreiber'schen Satzes den Winkel γ nicht zu messen und die Gewichte x und y der beiden Winkel α und β proportional den Cotangenten dieser Winkel zu setzen.[1])

Es wäre also dann

$$u = \frac{x}{y} = \frac{c_1}{c_2} = 2{\cdot}305, \quad v = 0, \quad z = 0,$$

also $$x = 0{\cdot}698\,[p], \quad y = 0{\cdot}302\,[p],$$

mit welchen Werten sich aus 10) und 11)

$$\mu_2 = \frac{1{\cdot}203}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{1{\cdot}995}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36_1)$$

ergibt.

Wird jedoch die Gewichtsverteilung lediglich mit Rücksicht auf das Fehlerverhältnis der Seite s_3 getroffen, so wäre β nicht zu messen und es ist dann

$$y = 0 \text{ und } \frac{x}{z} = \frac{c_1}{c_3} = 1{\cdot}453$$

zu setzen, womit sich

$$x = 0{\cdot}592\,[p], \quad z = 0{\cdot}408\,[p]$$

[1]) Helmert, Ausgleichungsrechnung, Seite 569.

und aus 10) und 11)

$$\mu_2 = \frac{1{\cdot}664}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{1{\cdot}433}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37_1)$$

ergibt.

Das aus 36_1) gerechnete im Vergleiche zu 34_1), günstigere Fehlerverhältnis für die Seite s_2 wird doch wieder nur auf Kosten eines ungünstigeren der Seite s_3 erreicht, welcher Umstand sich umso mehr fühlbar macht, je ungleichseitiger das Dreieck ist.

Man entnimmt übrigens, daß bei günstigen Dreiecken die gleichmäßige Verteilung des gesamten Arbeitsaufwandes auf die drei Winkel besser ist, als nach 36_1) oder 37_1) die Messung von nur zwei Winkeln, indem (μ_3) kleiner ist als der aus 36_1) berechnete Wert μ_3 und (μ_2) kleiner ist als der aus 37_1) ermittelte Wert μ_2.

Die theoretisch günstigste Gewichtsverteilung ist die aus 34_1) erhaltene.

2. $\alpha = 40^0, \quad \beta = 80^0, \quad \gamma = 60^0.$

Die Anwendung der Formeln ergibt in diesem Falle

$$u = \frac{x}{y} = -19{\cdot}028, \quad v = \frac{z}{y} = -10{\cdot}555.$$

Der Winkel β ist demnach nicht zu messen, da für diesen ein negatives Gewicht folgen würde.

Behält man, da eine Ausgleichung wegen $y = 0$ nicht möglich ist, das Verhältnis $\frac{v}{u} = \frac{z}{x} = 0{\cdot}5547$ bei, so wird mit Rücksicht auf die gegebene Gewichtssumme

$$x + z = [p], \quad x = 0{\cdot}643\,[p], \quad z = 0{\cdot}357\,[p]$$

und damit

$$\mu_2 = \frac{1{\cdot}731}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{1{\cdot}766}{\sqrt{[p]}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34_2)$$

welche Werte keine strengen Minimalwerte geben und auch der Gleichung 14) nur näherungsweise genügen.

Soll hingegen dieser letzteren entsprochen werden, so erhält man wegen $y = 0$ aus 14) und 15)

$$x = 0{\cdot}600, \quad z = 0{\cdot}400 \quad \text{und schließlich}$$

$$\mu_2 = \mu_3 = \frac{1{\cdot}789}{\sqrt{[p]}}.$$

Die gleichmäßige Verteilung der Winkelgewichte gibt

$$(\mu_2) = \frac{2{\cdot}084}{\sqrt{[p]}}, \quad (\mu_3) = \frac{2{\cdot}190}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35_2)$$

Die Gewichtsverteilung im Sinne des Schreiber'schen Satzes zunächst mit $z = 0$ und $\frac{x}{y} = \frac{c_1}{c_2}$ liefert

$$x = 0{\cdot}871\,[p], \quad y = 0{\cdot}129\,[p], \quad \text{also}$$

$$\mu_2 = \frac{1{\cdot}368}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{2{\cdot}485}{\sqrt{[p]}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36_2)$$

während man mit $y = 0$ und $\frac{x}{z} = \frac{c_1}{c_3}$

$$x = 0{\cdot}674\,[p], \quad z = 0{\cdot}326\,[p] \quad \text{und}$$

$$\mu_2 = \frac{1{\cdot}700}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{1{\cdot}770}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37_2)$$

erhält.

Die letzten Werte stimmen in diesem Falle mit jenen aus 34_2) erhaltenen nahezu überein.

3. $\alpha = 30^0, \quad \beta = \gamma = 75^0.$

Es wird aus 30) und 31)

$$u = 11{\cdot}562, \quad v = 1 \quad \text{und damit}$$

$$x = 0{\cdot}852\,[p], \quad y = z = 0{\cdot}074\,[p]$$

$$\mu_2 = \mu_3 = \frac{2{\cdot}122}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34_3)$$

Die gleichmäßige Gewichtsverteilung gibt

$$(\mu_2) = (\mu_3) = \frac{2{\cdot}659}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35_3)$$

Werden nur in zwei Punkten des Dreieckes Winkelmessungen gemacht, so hätte man für das größte Gewicht der Seite s_2 nach dem früheren $\frac{x}{y} = \frac{c_1}{c_2} = 6{\cdot}464$ und $z = 0$ zu setzen, womit sich

$$x = 0{\cdot}866\,[p], \quad y = 0{\cdot}134\,[p]$$

ergibt. Die Fehlerverhältnisse in den beiden gleichen Seiten s_2 und s_3 werden dann aber ungleich, nämlich

$$\mu_2 = \frac{2{\cdot}000}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{2{\cdot}271}{\sqrt{[p]}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36_3)$$

für die Annahme $\frac{x}{z} = \frac{c_1}{c_3} = 6{\cdot}464, \quad y = 0$ wird

$$x = 0{\cdot}866\,[p], \quad z = 0{\cdot}134\,[p] \quad \text{und}$$

$$\mu_2 = \frac{2{\cdot}271}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{2{\cdot}000}{\sqrt{[p]}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 37_3)$$

so daß die nach 34_3) berechnete Gewichtsverteilung wieder die günstigste ist.

4. $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$

Aus 30^1) folgt

$$x = 0{\cdot}512\,[p], \quad y = z = 0{\cdot}244\,[p], \quad \text{also}$$

$$\mu_2 = \mu_3 = \frac{1{\cdot}366}{\sqrt{[p]}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34_4)$$

während die gleichmäßige Verteilung der Gewichte

$$(\mu_2) = (\mu_3) = \frac{1{\cdot}414}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35_4)$$

gibt.

Es ist also selbst bei dem gleichseitigen Dreiecke nicht, wie zu vermuten wäre, die gleichmäßige Verteilung der Messungsarbeit die theoretisch günstigste, obwohl der Unterschied belanglos ist.

5. $\alpha = 30^0, \quad \beta = 120^0, \quad \gamma = 30^0$

Das Dreieck sei also gleichschenkelig, jedoch $s_1 = s_3$, wo, wie immer s_1 diejenige Seite bezeichnet, aus welcher die beiden anderen s_2 und s_3 abzuleiten sind.

Wegen $c_1 = c_3 = \sqrt{3}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

erhalten die Koeffizienten von 24) für $r = 1$ einerlei Zeichen.

Der Forderung also, daß s_2 und s_3 mit demselben Fehlerverhältnis übertragen werden sollen, kann hier überhaupt nicht entsprochen werden.

Bei gleichmäßiger Verteilung der Gewichte wird

$$(\mu_2) = \frac{2{\cdot}160}{\sqrt{[p]}}, \quad (\mu_3) = \frac{4{\cdot}243}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35_5)$$

Die Seite s_3 geht also mit einem etwa doppelt so großen Fehlerverhältnis aus der Ableitung hervor wie s_2.

Es soll nun untersucht werden, ob nicht ein günstigeres relatives Fehlerverhältnis zwischen μ_2 und μ_3 bei gleichzeitiger Verringerung der Absolutwerte gegenüber 35_5) möglich ist. Wir schreiben die Bedingung $\mu_3 = 1{\cdot}8\,\mu_2$ bei kleinstem Fehlerverhältnis μ_2 vor, setzen also nach 14) $r = \frac{5}{9}$ wodurch sich aus 17)

$$a = -\tfrac{16}{27}, \quad b = -\tfrac{19}{27}, \quad c = \tfrac{11}{24}$$

ergibt.

Die Ausrechnung von 21) sowie die Auflösung von 23) und 24) gibt zwei Werte für u und somit auch für v, nämlich

$$u_1 = -2{\cdot}066, \quad v_1 = -1{\cdot}277 \text{ und } u_2 = -2{\cdot}859, \quad v_2 = -2{\cdot}432.$$

Die gestellten Bedingungen können daher in diesem Falle nicht strenge eingehalten werden, da sich für β ein negatives Gewicht ergeben würde.

Benützt man das positive Verhältnis

$$\frac{x}{z} = \frac{u_1}{v_1} = 1{\cdot}6171, \text{ so wird wegen } y = o,$$

$$x = 0{\cdot}617_9\,[p], \quad z = 0{\cdot}382_1\,[p] \text{ und}$$

$$\mu_2 = \frac{1{\cdot}741}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{3{\cdot}564}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34_5)$$

Setzt man hingegen

$$\frac{x}{z} = \frac{u_2}{v_2} = 1{\cdot}1759, \text{ so wird mit } y = 0$$

$$x = 0{\cdot}540_4\,[p], \quad z = 0{\cdot}459_6\,[p] \text{ und}$$

$$\mu_2 = \frac{1{\cdot}786}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{3{\cdot}475}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34_5)$$

Beide Werte geben praktisch dieselbe Genauigkeit, also wesentlich kleinere Fehlerverhältnisse als die durch 35_5) gegebenen.

Würde man nach dem Schreiber'schen Satze die Gewichtsverteilung lediglich für das größte Gewicht der abzuleitenden Seite s_2 vornehmen, so hätte man ebenfalls nur α und γ mit den Gewichtsverhältnissen

$$\frac{x}{z} = \frac{c_1 + c_2}{-c_2} = 2$$

zu messen, woraus

$$\mu_2 = \frac{1 \cdot 732}{\sqrt{[p]}}, \quad \mu_3 = \frac{3 \cdot 674}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 36_5)$$

folgt.

Über das Pentagonalprisma und seine Verwendung.

Von Prof. E. Doležal.

Einleitung. Prof. C. M. v. Bauernfeind hat bekanntlich die Glasprismen in ihrer Wirkungsweise und Theorie in der Mitte des verflossenen Jahrhunderts eingehend studiert und sie als praktische und handliche Instrumente zur Absteckung von rechten und anderen konstanten Winkeln (45°, 180°) in die praktische Geometrie eingeführt. In der Broschüre «Theorie und Gebrauch des Prismenkreuzes», München 1851, zeigte er als erster, daß das Glasprisma von rechtwinkelig gleichschenkeligem Kantenschnitte auch eine konstante Ablenkung von 90° liefert und das math.-mech. Institut von Ertl & Sohn in München brachte die mit Recht nach Bauernfeind benannten Winkelprismen in den Handel. In derselben Publikation findet sich die Theorie und der Gebrauch jener Kombination von zwei Prismen, die als das Bauernfeind'sche Prismenkreuz bekannt ist.

Im Jahre 1868 hat Bauernfeind in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie der Wissenschaften ein fünfseitiges Prisma angegeben, welches 45°, 90° und 180° auf dem Felde abzustecken gestattet; Prof. Dr. Ch. August Vogler gab diesem Prisma im Jahre 1876 noch eine günstigere Form, indem er den besten Querschnitt für dieses Prisma in der Absicht ermittelte, diesem netten Instrumentchen noch mehr Freunde zu gewinnen.

Im Jahre 1887 ist vom math.-mech. Institute Starke & Kammerer in Wien ein Prismenkreuz angegeben worden, beschrieben von Prof. Lorber in der «Zeitschrift für Instrumentenkunde» 1888, das sich in der Praxis als sehr vorteilhaft bewährt hat; es gestattet nicht nur im Alignement zweier Punkte einen Zwischenpunkt zu finden, sondern auch in diesem Punkte auf die Gerade Normale zu errichten.

Im Jahre 1890 brachte die «Zeitschrift für Vermessungswesen» das fünfseitige Prisma von Prandtl, eine äußerst einfache und zweckmäßige Konstruktion eines Prisma für 90°, die sich durch eine durchsichtige Theorie, sichere Wirkung und bequemen Gebrauch auszeichnet.

Das Prandtl'sche Prisma wurde zuerst von der optischen Werkstätte Carl Zeiss in Jena in tadelloser Weise mit gutem Schliff ausgeführt. In der zweiten Hälfte der 90er Jahre (1897) hat sich insbesondere das optische Institut von M. Hensoldt in Wetzlar mit der Herstellung dieser Prismen beschäftigt und sie wegen ihrer fünf Winkel als Pentagon, bezw. Pentagonalprisma bekannt gemacht.

Heute werden die Pentagon-Prismen von den meisten math.-mech. Instituten geführt.