Zur Gauß'schen sphäroidischen Trigonometrie

Johannes Frischauf [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (1), S. 1–12

1909


```
@ARTICLE{Frischauf_VGI_190901,
Title = {Zur Gau{\ss}'schen sph{\"a}roidischen Trigonometrie},
Author = {Frischauf, Johannes},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {1--12},
Number = {1},
Year = {1909},
Volume = {7}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer Max Reinisch.

Nr. 1. **Wien, am 1. Jänner 1909.** **VII. Jahrgang.**

Zur Gauß'schen sphäroidischen Trigonometrie.

Von Universitätsprofessor **Dr. Johannes Frischauf.**

1. In den «Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie» (erste Abhandlung) liefert Gauß eine sphäroidische Trigonometrie, die sich auf solche Dreiecke bezieht, wo zwei Seiten Meridianbögen, die dritte (dem Pole gegenüberliegende) klein ist. Die Dreiecke werden auf einer schmalen Zone zwischen zwei Parallelkreisen vorausgesetzt. Die Lösung der einzelnen Aufgaben wird durch die konforme Abbildung des Sphäroides auf die Kugel ausgeführt. Die Breite eines Punktes auf dem Sphäroid wird durch $P+p$, die seines Bildes auf der Kugel durch $Q+q$ bezeichnet, wo P und Q die Breiten des Mittelparallels auf dem Sphäroid und seines Bildes auf der Kugel bedeuten.

Gauß behandelt zwei Fälle dieser Abbildung. In der erwähnten Abhandlung wird die Abbildung unter der Voraussetzung vorgenommen, daß die Abweichung der Vergrößerungszahl von der Einheit von dritter Potenz nach p oder q ist; im Nachlaß (9. Bd. der Werke Gauß) wird der Fall behandelt, daß diese Abweichung eine Größe zweiter Potenz nach p oder q ist; in diesem Falle ist $P=Q$.

Die erste Abbildung erfordert ziemlich umständliche Rechnungen, die durch Tafeln abgekürzt werden können; sie ist daher nur dann mit Vorteil verwendbar, wenn viele Dreiecke zu berechnen sind, was namentlich bei einer Landesaufnahme der Fall ist. Sind nur wenige Dreiecke zu berechnen, so empfiehlt sich die zweite Abbildung, zumal die Reduktionsformeln beim Übergange eines Dreieckes auf dem Sphäroid zu jenem auf der Kugel (und umgekehrt) einfache Ausdrücke werden.

Es mag überdies noch bemerkt werden, daß der Artikel 12 der Gauß'schen Abhandlung, der die Grundlagen der Auflösung sphäroidischer Dreiecke liefert, nicht die Voraussetzung konformer Abbildung fordert. Diese wird erst im Art. 13 gemacht. Bei nicht konformer Abbildung muß aber berücksichtigt werden, daß die Vergrößerungszahl nicht nur eine Funktion des Punktortes ist, sondern auch von der Richtung des abzubildenden Elementes abhängt.

Der zur dritten (kleinen) Seite des sphäroidischen Dreiecks zugehörige größte Kreisbogen auf der Kugel wird durch FG bezeichnet, seine in Teilen des Halbmessers ausgedrückte Größe mit h. In den Schlußformeln macht Gauß die stillschweigende Voraussetzung, daß $h : q$ eine kleine Größe bedeutet. Wird aber diese Voraussetzung fallen gelassen,*) so sind die von Gauß gegebenen Näherungsausdrücke für die Azimut- und Längen-Reduktionen nicht mehr ausreichend.

2. Im folgenden soll eine Erweiterung der Reduktions-Ausdrücke der Größen auf dem Sphäroid in die bezüglichen auf der Kugel (und umgekehrt) unter der Voraussetzung gegeben werden, daß q und h Größen derselben (erster) Ordnung sind. Behufs dieser Erweiterung ist zunächst eine Untersuchung über den Grad der Genauigkeit der Formeln, d. i. der Ordnung der Fehler der zur Ermöglichung der Lösung von Gauß in Art. 12 gemachten Vereinfachungen nötig. Diese soll zunächst bezüglich der in den «Untersuchungen . . .» mitgeteilten Abbildung des Sphäroides auf die Kugel geliefert werden.

Die im Artikel 12 mitgeteilten Näherungsausdrücke können zur Bestimmung der Ordnung der in den Formeln dieses Artikels vernachlässigten Größen dienen.

1) Wird in der Gleichung

$$\frac{dn}{du} \cdot \frac{dx}{\cos\psi} = du \sin\psi$$

$\cos\psi = 1$ gesetzt, so wird, da ψ von der Ordnung $e^2 q^2 h$, $\frac{dn}{du}$ von der Ordnung $e^2 q^2$ ist, im Resultate ein Fehler von der Ordnung $e^6 q^6 h^3$ bewirkt. Von gleicher Ordnung ist der Fehler, wenn $\sin\psi = \psi = \tan\psi$ gesetzt wird.

2) $$n = \frac{\cos y}{m}, \quad \frac{dy}{du} = \cos y$$

$$\frac{dn}{du} = -\frac{\sin y}{m}\,\frac{dy}{du} + \cos y\,\frac{d\frac{1}{m}}{du}$$

$$dn = -\frac{\sin y \cos y}{m}\,du + \cos y \,.\, d\frac{1}{m}.$$

y ist von der Ordnung e^2. IV. Ordnung,

$y = u +$ Größe e^6. XII. Ordnung;

$$\sin y \cos y \; du = \sin y \cos y \; dy = \tfrac{1}{2} d \sin y^2,$$

das Integral von der Ordnung e^4. VIII; mit diesem Fehler kann

$$n = \frac{1}{m}$$

gesetzt werden.

3) In der Gleichung

$$\tan\psi = \frac{m \tan\psi^0}{m^0} - m \int \frac{l}{m}\,dx$$

---

*) Dazu ist auch Gauß in Art. 15 und 22 seiner «Untersuchungen . . .» genötigt.

ist das Integral längs der Linie der Punkte M zu erstrecken; dieses kann ersetzt werden durch das Integral längs der Linie der Punkte N. Denn l ist eine Größe der Ordnung $e^2\,q^2$; wird l nach Potenzen von y entwickelt, so ist

$$l = l_0 + \left(\frac{dl}{dy}\right)_0 y + \ldots$$

$$\frac{dl}{dy} = \frac{dl}{dq}\sin\chi;$$

wird daher l in der Linie der Punkte N genommen, d. h. durch l_0 ersetzt, so ist der Fehler von der Ordnung $e^2\,q\,y$, also der Fehler im obigen Integral von der Ordnung e^4. VI.

Die Werte von $\tan\psi^0$ und $\tan\psi'$

$$\tan\psi^0 = \tfrac{1}{2}\,l^0 h + \left(\tfrac{1}{6}\,\lambda - \tfrac{1}{12}\,l^0\mu\right) h^2 + \ldots$$

und für $\tan\psi'$ weichen von den genauen Werten nur um Größen e^4. VI. Ordnung nach q und h ab. Untersucht man aber die Ordnungszahl der Glieder dieser Reihen für $\tan\psi^0$ und $\tan\psi'$, so erhält man

$l^0 h$	ist von der Ordnung	$e^2.\,q^2 h$
λh^2	» » »	$e^2.\,q\,h^2$
$l^0\mu h^2$,	» » »	$e^4.\,q^4 h^2$
$\lambda\mu h^3$	» » »	$e^4.\,q^3 h^3$
$\lambda' h^3$	» » »	$e^2.\,h^3$ u. s. w.

Daraus folgt die Gleichung

$$\tan\psi = \frac{m\tan\psi^0}{m^0} - m\int\frac{l}{m}\,dx,$$

wobei das letzte Integral in der Linie der Punkte N zu nehmen ist. Diese Gleichung kann ohne Schädigung des Grades der Genauigkeit durch

$$\tan\psi = \tan\psi_0 - \int l\,dx$$

ersetzt werden. Dabei kann

$$l = l^0 + \lambda x + \lambda' x^2 + \ldots$$

soweit fortgesetzt werden, bis die oben angesetzte Fehlergrenze (e^4. VI. Ordnung) erreicht wird.

3. Wenn Gauß als Werte

$$\tan\psi^0 = \left(\tfrac{1}{3}\,l^0 + \tfrac{1}{6}\,l'\right) h,\quad \tan\psi' = -\left(\tfrac{1}{6}\,l^0 + \tfrac{1}{3}\,l'\right) h$$

ansetzt, d. i. Glieder der Ordnung $e^2 q^2 h$, so ist das erste Fehlerglied $\mp\tfrac{1}{12}\,\lambda' h^3$, d. h. es wird ein Glied der Ordnung $e^2 h^3$ vernachlässigt, welche Vernachlässigung nur dann gestattet ist, wenn h gegen q eine kleine Größe ist. Ist aber h mit q von derselben Ordnung, so muß das Glied $\mp\tfrac{1}{12}\,\lambda\,h^3$ noch dazu genommen werden, um ψ^0 und ψ' genau auf e^2. III. Ordnung zu erhalten.

In dem Beispiele, das Oskar Schreiber auf Seite 86 seiner «Theorie der Projektionsmethode der Hannover'schen Landesvermessung» gibt, ist h mehr als doppelt so groß als q und deshalb reichen die Gauß'schen Formeln nicht aus.

Aus der vorigen Gleichung für $\tan\psi$ folgt:

$$\psi^0 = \left(\frac{l^0}{1.2} + \frac{\lambda h}{2.3} + \frac{\lambda' h^2}{3.4} + \frac{\lambda'' h^3}{4.5} + \ldots\right) h$$

$$\psi' = -\left(\frac{l^0}{2} + \frac{\lambda h}{3} + \frac{\lambda' h^2}{4} + \frac{\lambda'' h^3}{5} + \ldots\right) h.$$

Für Werte q oder h von 5. Grade an ist e als kleine Größe erster Ordnung zu betrachten, es können daher diese Reihen bis einschließlich der Glieder mit h^7 fortgesetzt werden.

Wegen

$$\frac{l^0}{3} + \frac{l'}{6} = \frac{l^0}{2} + \frac{\lambda h}{6} + \frac{\lambda' h^2}{6} + \ldots$$

$$\frac{l^0}{6} + \frac{l'}{3} = \frac{l_0}{2} + \frac{\lambda h}{3} + \frac{\lambda' h^2}{3} + \ldots$$

wird

$$\psi^0 = \left(\frac{l^0}{3} + \frac{l'}{6}\right) h - \frac{\lambda' h^3}{12} - \frac{7\lambda'' h^4}{60} - \ldots$$

$$\psi' = -\left(\frac{l^0}{6} + \frac{l'}{3}\right) h + \frac{\lambda' h^3}{12} + \frac{2\lambda'' h^4}{15} + \ldots$$

Ist $l_{1/2}$ der Wert von l für die Mitte von FG,

$$l_{1/2} = l^0 + \frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda' h^2}{4} + \frac{\lambda'' h^3}{8} + \ldots,$$

so ist wegen

$$\frac{l^0}{6} + \frac{l_{1/2}}{3} = \frac{l^0}{2} + \frac{\lambda h}{6} + \frac{\lambda' h^2}{12} + \frac{\lambda'' h^3}{24} + \frac{\lambda''' h^4}{48} + \ldots$$

$$\frac{l_{1/2}}{3} + \frac{l'}{6} = \frac{l^0}{2} + \frac{\lambda h}{3} + \frac{\lambda' h^2}{4} + \frac{5\lambda'' h^3}{24} + \frac{3\lambda''' h^4}{16} + \ldots,$$

$$\psi^0 = \left(\frac{l^0}{6} + \frac{l_{1/2}}{3}\right) h + \frac{\lambda'' h^4}{120} + \frac{\lambda''' h^5}{80} + \ldots$$

$$\psi' = -\left(\frac{l_{1/2}}{3} + \frac{l'}{6}\right) h + \frac{\lambda'' h^4}{120} + \frac{\lambda''' h^5}{48} + \ldots$$

4. Für den Bogen s auf dem Sphäroide lautet der genaue Ausdruck:

$$s = A \int \frac{\cos y}{m \cos \psi}\, dx.$$

Wird $\cos y$ und $\cos \psi = 1$ gesetzt, so ist der Fehler e^4 mit einer Größe VIII. bezüglich VI. Ordnung; im Integral daher von der Ordnung e^4. VII. Mit solchem Fehler kann daher

$$s = A \int \frac{dx}{m}$$

gesetzt werden. Wird m statt in der Linie M in der Linie N genommen, so ist der Fehler von der Ordnung $e^2 y q^2$, also in s von der Ordnung e^4. VII.

Damit wird

$$s = \frac{Ah}{m^0} \left[1 - \tfrac{1}{2}\mu h - \tfrac{1}{3}(\mu' - \mu^2) h^2 - \tfrac{1}{4}(\mu'' - 2\mu\mu' + \mu^3) h^3 - \ldots\right].$$

Nun ist

$\mu h^2 =$ Ordnung $e^2 q^2 h^2$,

$\mu' h^3 =$ Ordnung $e^2 q h^3$, $\mu^2 h^3 =$ Ordnung $e^4 q^4 h^3$,

$\mu'' h^4 =$ Ordnung $e^2 h^4$, $\mu\mu' h^4 =$ Ordnung $e^4 q^3 h^4$, $\mu^3 h^4 =$ Ordnung $e^6 q^6 h^4$

u. s. w. Sollen daher die Glieder mit e^2. IV. Ordnung berücksichtigt werden, so muß

$$s = \frac{Ah}{m_0}\left(1 - \tfrac{1}{2}\mu h - \tfrac{1}{3}\mu' h^3 - \tfrac{1}{4}\mu'' h^3\right)$$

gesetzt werden; dieser Ausdruck kann aber so weit fortgesetzt werden, bis die Fehlergrenze e^4. VII. erreicht wird. In dem Gauß'schen Näherungsausdrucke

$$s = \frac{Ah}{\sqrt{m^0 m'}}$$

werden die Glieder mit $\mu' h^3$, $\mu'' h^4$, welche mit dem Gliede mit μh^2 von derselben Ordnung sind, vernachlässigt.

In den Gliedern von μh^2 an kann $m_0 = 1$ gesetzt werden, der Fehler ist von der Ordnung e^4. VII.

Für die Berechnung von s empfiehlt sich der Ausdruck

$$s = \frac{Ah}{(m)},$$

$$\frac{6}{(m)} = \frac{1}{m^0} + \frac{4}{m_{1/2}} + \frac{1}{m'}$$

wo $m_{1/2}$ die Vergrößerungszahl in der Mitte von FG bedeutet. Diese Formel berücksichtigt noch das Glied mit μ'', und das Hauptglied des Fehlers beträgt

$$+ \frac{A\mu''' h^5}{120}.$$

Mit einem Fehler der Ordnung $e^4 . q^6$ in (m) also e^4. VII in s kann

$$6(m) = m^0 + 4m_{1/2} + m'$$

gesetzt werden.

Ist s gegeben und wird h gesucht, so erhält man mit gleicher Fehlerordnung,

$$\sigma = \frac{m_0 s}{A}$$

gesetzt,

$$h = \sigma + \tfrac{1}{2}\mu\sigma^2 + \tfrac{1}{3}\mu'\sigma^3 + \tfrac{1}{4}\mu''\sigma^4 + \ldots$$

Werden nur die Glieder mit e^2. IV berücksichtigt, so wird

$$h = \frac{(m)s}{A}$$

gerechnet.

Da bei dieser Abbildung die Koeffizienten $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots, \mu, \mu', \mu'', \ldots$ ziemlich komplizierte Ausdrücke sind, so sind die Korrektionen ψ^0 und ψ' nach

$$\psi^0 = \left(\frac{l^0}{6} + \frac{l_{1/2}}{3}\right)h, \quad \psi' = -\left(\frac{l_{1/2}}{3} + \frac{l'}{6}\right)h$$

und s mittelst (m) zu rechnen, falls die erste Näherung genügt.

5. Sind nur wenige Dreiecke zu berechnen, so empfiehlt sich die Abbildung des Sphäroides auf eine Kugel, die das Sphäroid im Mittelparallel berührt, deren Mittelpunkt C_0 der Durchschnitt der Normalen des Mittelparallels mit der Axe und deren Halbmesser A die Länge N_0 der Normale eines Punktes des Mittelparalleles ist. Gauß bildet (Nachlaß »Das elliptische Sphäroid«, Bd. 9 der Werke)

das Sphäroid konform auf die Kugel ab. Die Abbildung kann auch zentral vorgenommen werden,*) welche Abbildung sehr anschaulich ist, deren Formeln sehr einfach entwickelt werden können und deren sphärische Breite von der konformen nur um eine Größe e^4. III. Ordnung abweicht Die Abweichung der zentralen Projektion von der konformen ist eine so geringe, daß sie nur bei sehr genauen Rechnungen berücksichtigt werden muß.

Da bei diesen Abbildungen l von der Ordnung e^2. I, λ, λ', .. von der Ordnung e^2. Null, μ von der Ordnung e^2. I, μ', μ'', .. von der Ordnung e^2. Null sind, so werden durch die Vereinfachungen des Artikels 2 bei ψ^0 und ψ' Größen der Ordnung e^4. IV, bei s Größen der Ordnung e^4. V vernachlässigt. Die in Artikel 3 gegebenen Reihen für ψ^0 nnd ψ' können bis einschließlich der Glieder mit h^5 fortgesetzt werden. Die Größe s muß mindestens

$$s = \frac{Ah}{m_0}(1 - \tfrac{1}{2}\mu h - \tfrac{1}{3}\mu' h^2)$$

gesetzt werden.

Wird mit Gauß (Nachlaß) die sphäroidische Breite mit φ, die sphärische mit ψ, die Mittelbreite mit P bezeichnet, so erhält man für die Vergrößerungszahl m einschließlich der Glieder mit e^4, $\sin\psi - \sin P = T$ gesetzt,

$$\log m = \frac{e^2}{2}(1 + e^2)\, T^2 - \frac{2e^4}{3}\sin P T^3 - \frac{5e^4}{12} T^4,$$

$$m = \frac{e^2}{2}(1 + e^2)\, T^2 - \frac{2e^4}{3}\sin P T^3 - \frac{7e^4}{24} T^4.$$

für konforme Abbildung;

$$\log m = \frac{e^2}{2}(1 + \alpha e^2)\, T^2 + \frac{e^4}{2}\sin P T^3 + \tfrac{1}{4} e^4 T^4,$$

$$m = \frac{e^2}{2}(1 + \alpha e^2)\, T^2 + \frac{e^4}{2}\sin P T^3 + \tfrac{3}{8} e^4 T^4$$

$$\alpha = \sin P^2 + \cos \psi^{0\,2} \sin F^2,$$

wo ψ^0 die Breite des Punktes F bedeutet, für zentrale Abbildung.

Zur Bestimmung der Koeffizienten λ, λ' .. μ, μ' möge eingeschaltet werden: Sind im sphärischen Dreiecke ABC Winkel A und Seite b konstant, so erhält man durch Differenziation der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

mit Zuziehung von

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

$$da = \cos B\, dc;$$

daraus durch Differentation von

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B,$$

$$dB = -\cot a \sin B\, dc.$$

Nun ist
$$l = \frac{d \log m}{d\psi}\sin\chi = \frac{d\log m}{dT}\cos\psi \sin\chi;$$

*) Frischauf, «Zur Abbildung des Erdsphäroids» in „Zeitschrift für Vermessungswesen", Jahrgang 1908.

$\cos\psi \sin\chi$ ist konstant $= \cos\psi^0 \sin F$, also

$$l = \cos\psi^0 \sin F \frac{d\log m}{dT}.$$

Von den Koeffizienten λ, λ', λ'' werden nur die späteren benötigt, für diese genügt es

$$\frac{d\log m}{dT} = e^2 T$$

zu setzen; d. h. die Größen λ, λ' . . . werden aus

$$l = \beta T, \quad \beta = e^2 \cos\psi^0 \sin F,$$

durch Differentiation nach x erhalten.

Aus dem sphärischen Dreiecke FN Pol, der Punkt N in FG vorausgesetzt, $FN = x$, erhält man

$$\frac{d\psi}{dx} = -\cos N, \quad \frac{dN}{dx} = -\tan\psi \sin N,$$

$$\frac{d\cos\psi\cos N}{dx} = \sin\psi, \quad \frac{d\sin\psi}{dx} = -\cos\psi\cos N;$$

damit wird, wegen $N = 180^0 - F$ für $x = 0$,

$$\lambda = \beta\cos\psi^0\cos F, \quad \lambda' = -\frac{\beta}{2}\sin\psi^0$$

$$\lambda'' = -\frac{\beta}{6}\cos\psi^0\cos F, \quad \lambda''' = \frac{\beta}{24}\sin\psi^0.$$

Für die späteren Koeffizienten μ, μ', μ'' genügt es

$$m = 1 + \frac{e^2}{2} T^2, \quad m_0 = 1$$

zu setzen.

$$\frac{dm}{dx} = \frac{dm}{dT}\frac{dT}{dx}, \quad \frac{dT}{dx} = -\cos\psi\cos N,$$

$$\frac{dm}{dx} = -e^2 T \cos\psi\cos N,$$

$$\frac{d^2m}{dx^2} = e^2(\cos\psi\cos N)^2 - e^2 T\sin\psi,$$

$$\frac{d^3m}{dx^3} = e^2(4\sin\psi - \sin P)\cos\psi\cos N,$$

$$\frac{d^4m}{dx^4} = e^2(4\sin\psi - \sin P)\sin\psi - 4(\cos\psi\cos N)^2, \text{ u. s. w.}$$

$$\mu = e^2 T^0 \cos\psi^0\cos F,$$

$$\mu' = \frac{e^2}{2}\left[(\cos\psi^0\cos F)^2 - T^0\sin\psi^0\right],$$

$$\mu'' = -\frac{e^2}{6}(4\sin\psi^0 - \sin P)\cos\psi^0\cos F,$$

$$\mu''' = \frac{e^2}{24}\left[(4\sin\psi^0 - \sin P)\sin\psi^0 - 4(\cos\psi^0\cos F)^2\right].$$

Bei Benützung des Wertes (m) zur Berechnung von $\log s$ kann das größte vernachlässigte Glied bei $h = 5^0$ zwei Einheiten der zehnten Dezimalstelle nicht überschreiten.

6. Um die Winkelkorrektionen mittelst der Größen ψ^0 und ψ' bezüglich des Vorzeichens richtig zu erhalten, dient folgende Betrachtung. Mit einem Fehler der Ordnung e^6. XII der Abbildung der «Untersuchungen..» und e^6. IX bei der zentralen Projektion ist $u = y$. Die Voraussetzung $\cos y = 1$ ersetzt den Bereich der Kugelfläche längs der Linie FG durch jenen eines berührenden Zylinders. Für diese abgewickelte Kurve $y = f(x)$ der Punkte M ist

$$y = \frac{x(h-x)}{2} X, \quad X = l^0 + \frac{\lambda}{3}(x+h) + \frac{\lambda'}{6}(x^2 + hx + h^2) + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\psi, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -l.$$

Bei der Abbildung der «Untersuchungen..» ist im ganzen Intervalle $x = 0$ bis $x = h$ das y negativ, $-l$ positiv, die Kurve der Punkte M konkav gegen die x-Axe; in diesem Intervalle hat y ein Minimum (absolut größter Wert). Daß y immer negativ ist, folgt aus

$$\frac{l + l'}{2} = l^0 + \frac{\lambda}{2}(x+h) + \frac{\lambda'}{2}(x^2 + h^2),$$

welche Größe immer negativ ist. Dieser Ausdruck bleibt auch, im Falle alle Koeffizienten $\lambda, \lambda', \ldots$ positiv sind, noch negativ, wenn dessen Glieder durch die des Ausdruckes für X ersetzt werden.

Bei der zentralen Abbildung des Sphäroides auf die Kugel mit Mittelpunkt C_0 und Halbmesser N_0 folgt: Wird durch zwei Punkte F_1, G_1 des Sphäroids und den Punkt C_0 eine Ebene gelegt, so schneidet selbe die erwähnte Kugel in einem größten Kreisbogen FG. Sind C und C' die zu den Punkten F_1 und G_1 zugehörigen Durchschnitte der Normalen mit der Axe, so liegen C und C' sehr nahe und können mit einem Punkte C_1 zusammenfallend vorausgesetzt werden, wenn F_1 und G_1 sehr nahe sind. Die Ebene $F_1 G_1 C_1$ ist ein Normalschnitt und schneidet das Sphäroid in einer Kürzesten K. Ist die Strecke CC' nicht verschwindend klein, so gehen die Normalebenen der Elemente der Kürzesten K auf dem Sphäroid durch die aufeinander folgenden Punkte von C bis C'.

Liegen C und C' auf der Axe unterhalb des Punktes C_0, so liegt die Kürzeste K oberhalb (d. h. näher dem Pole) der Schnittlinie der Ebene $F_1 G_1 C_0$ mit dem Sphäroide. Gleiches gilt auch von dem Bilde der Kürzesten bezüglich des größten Kreisbogens FG auf der Kugel. In diesem Falle ist φ (also auch ψ) $> P$. Das Umgekehrte findet statt für $\varphi < P$. Im ersten Falle liegt das Bild der Kürzesten innerhalb, im zweiten außerhalb des Dreieckes Pol FG.

Dasselbe Resultat gibt die Gleichung

$$y = \frac{x(h-x)}{2} X.$$

Liegt der Bogen FG nördlich vom Mittelparallel, so ist T positiv, also auch $\frac{1}{2}(l + l')$ und X; für die südliche Lage des Bogens FG ist X immer negativ.

Der Fall, daß der Bogen FG den Mittelparallel im Punkte $x = x_1$ schneidet, muß besonders behandelt werden. An dieser Stelle ist T also auch l gleich Null und die Kurve der Punkte M besitzt in x_1 einen Wendepunkt. Wegen

$l = l^0 + \lambda x_1 + \lambda' x_1^2 + \ldots = 0$, wird

$$X = \frac{\lambda}{3}(x + h - 3x_1) + \frac{\lambda'}{6}(x^2 + hx + h^2 - 6x_1^2) + \ldots$$

$$X_1 = \frac{\lambda}{3}(h - 2x_1) + \frac{\lambda'}{6}(h^2 + hx_1 - 5x_1^2) + \ldots$$

Die Untersuchung des Verlaufes der Kurve M mittelst der Gleichung $y = f(x)$ möge auf die beiden ersten Gliedern beschränkt werden. Für diese ist

$$\lambda = \beta \cos \psi^0 \cos F, \quad \lambda' = -\frac{\beta}{2} \sin \psi^0, \quad \beta \text{ positiv.}$$

Ist $\cos F$ positiv, so zieht der Bogen FG nach Nordosten; λ ist positiv, λ' negativ.

Ist $x_1 = \frac{h}{3} - z$ (z pos.), so wird das Anfangsglied von X gleich $\frac{\lambda}{3}(x + 3z)$, also positiv. X ist für alle Werte x positiv, wenn nicht z unter $-\frac{\lambda'}{6\lambda}h^2$ herabgemindert wird; die Kurve M ist von $x = 0$ bis x_1 konvex, von x_1 bis h konkav zu FG. Für $x_1 = \frac{h}{3}$ ist die Kurve M von $x = 0$ bis zu ihrem Durchschnitte mit FG in $x = x_2$, wo $x_2 = -\frac{\lambda'}{6\lambda}h^2 \ldots$, konkav mit negativen y, von x_2 bis h ist y positiv, von x_2 bis x_1 ist die Kurve M konvex, dann konkav. Verschiebt man x_1 über $\frac{h}{3}$ hinaus, $x_1 = \frac{h}{3} + z$, dann rückt der Punkt x_2 immer näher zu G. Der Teil der Kurve M von $x = 0$ bis x_2 hat negative y, der andere positive, der Teil von x_2 bis x_1 ist konvex gegen FG, gleichgiltig ob x_1 größer oder kleiner als x_2 ist, der übrige Teil ist konkav.

Ist $\cos F$ negativ, so zieht der Bogen FG nach Südosten; λ, λ' sind negativ. Soll X positiv werden, so muß in erster Instanz $x + h - 3x_1$ negativ werden. Ist $x_1 < \frac{h}{3}$, so ist X immer negativ; die Kurve M ist von $x = 0$ bis x_1 konvex, von $x = x_1$ bis h konkav gegen FG. Erst für $x_1 = \frac{h}{3} + z$, $x < 3z$ kann X also auch y positiv werden. Die Kurve M schneidet den Bogen FG in x_2, sie ist von $x = 0$ bis x_2 konkav mit positiven y, von x_2 bis h sind negative y; von x_2 bis x_1 gleichgiltig ob x_2 größer oder kleiner als x_1 ist, konvex gegen FG, sonst konkav.

Gleiches gilt auch für die konforme Abbildung auf dieser Kugel.

Gauß zählt in den «Untersuchungen . .» das Azimut im Sinne von Süden nach Westen, der Punkt G wird westlich von F vorausgesetzt. Die Gleichung für die Azimutkorrektion lautet: Sphäroidisches Azimut — sphärisches Azimut = ψ.

Der Gauß'sche Winkel χ zwischen positiver Meridianrichtung (nach Süden) und positiver x Richtung (nach Westen) im Punkte N des Bogens FG ist gleich dem Dreieckswinkel N des Dreiecks Pol FN.

Gegenwärtig wird die positive Meridianrichtung nach Norden gezählt, das Azimut von Norden über Osten. Der Punkt G wird dann östlich von F vorausgesetzt. Die Gleichung für die Azimutkorrektion lautet:

Sphäroidisches Azimut — sphärisches Azimut $= -\psi$.
Der Winkel γ ist bei dieser Zählung gleich $180^0 - N$.

Die Korrektionen sind bei beiden Zählungen dieselben, da bei der neuen bezüglich der Gauß'schen die Richtung von FG und die Nummer der Punkte F und G (erster und zweiter) vertauscht werden, wodurch die Vorzeichen ungeändert bleiben.

7. Für die Berechnung der Korrektionen des Azimutes und der Größe des Bogens s mit Zuziehung der Größen $l_{1/2}$ und $m_{1/2}$ sind Näherungswerte der Breite und des Azimutes der Mitte der Seite FG nötig. Diese Größen lassen sich mit genügender Genauigkeit auf die folgende Art bestimmen.

Im sphärischen Dreiecke ABC sei D die Mitte von AB, $CD = d$, in den Teildreiecken ACD und BCD sollen die Winkel bei C mit C_1 und C_2, die Winkel bei D mit D_1 und D_2, die sphärischen Exzesse mit E_1 und E_2 bezeichnet werden. Dabei werden $a - b$, c, C als kleine Größen erster Ordnung vorausgesetzt.

1) Bestimmt man im Dreiecke ACD $\cos b$, im Dreiecke BCD $\cos a$, so erhält man

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{c}{2} \cos d$$

$$\cos d = \cos \frac{a+b}{2} \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

Mit Fehler IV. Ordnung ist

$$\cos d = \cos \frac{a+b}{2} \left(1 + 2 \sin^2 \frac{c}{4} - 2 \sin^2 \frac{a-b}{4}\right)$$

$$= \cos \frac{a+b}{2} \left(1 + \tfrac{1}{8} \sin a \sin b \, C^2\right)$$

Mit Fehler II. Ordnung ist

$$\sin a \sin b = \sin^2 \frac{a+b}{2},$$

$$\cos d = \cos \frac{a+b}{2} + \tfrac{1}{8} \sin^2 \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} \, C^2;$$

$$d = \frac{a+b}{2} - z, \quad z = \tfrac{1}{16} \sin (a+b) \, C^2,$$

$$d = \frac{a+b}{2} - \tfrac{1}{16} \sin (a+b) \, C^2.$$

Ferner ist

$$2 \cos d = \cos a + \cos b + \tfrac{1}{4} \cos \frac{a+b}{2} \, c^2.$$

2) Aus

$$\sin C_1 \sin d = \sin A \sin \frac{c}{2}, \quad \sin C_2 \sin d = \sin B \sin \frac{c}{2},$$

$$\sin c \sin A = \sin C \sin a, \quad \sin c \sin B = \sin C \sin b$$

folgt

$$\sin\frac{C_1-C_2}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin d}\,\frac{\sin C}{\sin c}\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$

$$C_1-C_2=\tfrac{1}{2}\cot\frac{a+b}{2}(a-b)\,C.$$

3) Verlängert man AB und ist B' der Außenwinkel von B, so ist

$$D_2=A+C_1-E_1,\quad D_2=B'-C_2+E_2,$$

$$D=\frac{A+B'}{2}+\frac{C_1-C_2}{2}-\frac{E_1-E_2}{2}.$$

$$\tan\frac{E_1}{2}=\frac{\tan\frac{d}{2}\tan\frac{b}{2}\sin C_1}{1+\tan\frac{d}{2}\tan\frac{b}{2}\cos C_1}=\frac{\sin\frac{d}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C_1}{\cos\frac{d-b}{2}-2\sin\frac{d}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{C_1^2}{2}}$$

und ebenso für E_2.

Nun ist

$$d=\frac{a+b}{2}+z,\quad z=\text{II. Ordnung}$$

$$\cos\frac{d-b}{2}=\cos\frac{d-a}{2}+\text{III. Ordnung}.$$

Mit Fehler IV. Ordnung ist daher

$$\tan\frac{E_1-E_2}{2}=\sin\frac{d}{2}\left(\sin\frac{b}{2}\sin C_1-\sin\frac{a}{2}\sin C_2\right).$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sin\frac{a+b}{4}+\cos\frac{a+b}{4}\,\frac{a-b}{4}-\sin\frac{a+b}{4}\left(\frac{a-b}{4}\right)^2-\ldots$$

$$\sin\frac{b}{2}=\sin\frac{a+b}{4}-\cos\frac{a+b}{4}\,\frac{a-b}{4}-\sin\frac{a+b}{4}\left(\frac{a-b}{4}\right)^2+\ldots,$$

also mit Fehler IV. Ordnung

$$\tan\frac{E_1-E_2}{2}=\sin\frac{a+b^2}{4}(C_1-C_2)-\tfrac{1}{8}\sin\frac{a+b}{2}(a-b)\,C;$$

damit wird mit Fehler IV. Ordnung

$$D_2=\frac{A+B'}{2}+\frac{1+\cos\frac{a+b^2}{2}}{8\sin\frac{a+b}{2}}(a-b)\,C.$$

Bezeichnet man mit ψ^0 und ψ' die sphärischen Breiten von F und G, mit λ ihren Längenunterschied, mit $\psi_{1/2}$ die sphärische Breite der Mitte von FG, mit α das Azimut von FG in F, mit α' das Azimut von GF in G, so ist

$$\psi_{1/2}=\frac{\psi^0+\psi'}{2}+\tfrac{1}{16}\sin(\psi^0+\psi')\,\lambda^2;$$

die zu dieser Breite zugehörige Größe $T_{1/2}$

$$2\,T_{1/2}=T^0+T'+\tfrac{1}{4}\sin\frac{\psi^0+\psi'}{2}\lambda^2.$$

Die Größe $\chi_{1/2}$ der Mitte von FG

$$\chi_{1/2} = \frac{\alpha + \alpha'}{2} - 90^0 - \frac{1 + \sin\frac{\psi^0 + \psi'^2}{2}}{8\cos\frac{\psi^0 + \psi'}{2}} (\psi' - \psi^0)\,\lambda,$$

diese Größe wird nur bei der Abbildung der «Untersuchungen . .» benötigt.

Für die Berechnung dieser letzteren Korrektionen genügen dreistellige Logarithmen.

Zusatz. Damit erhält man die in Artikel 13 und 22 der «Untersuchungen . .» gelieferten Formeln der Azimut- und Längenkorrektionen. Ist $Q = \frac{\psi^0 + \psi'}{2}$, $\psi^0 - \psi' = \delta$, so ist die Breite in $F = Q + \frac{\delta}{2}$, in $G = Q - \frac{\delta}{2}$, in der Mitte von $FG = Q + \varepsilon$. Gauß gibt (Art. 9)

$$\log m = A_3 q^3 + A_4 q^4 + \ldots, \text{ also } l = (3 A_3 q^2 + 4 A_4 q^3 + \ldots) \sin\chi.$$

Daraus folgt: $m_{1/2} = 1 +$ VI. Ordnung, $m^0 + m' = 2 +$ IV. Ordnung, also

$$s = Ah + \text{V. Ordnung (Gleichung 8 des Art. 22)}$$

$$l_{1/2} = \text{IV. Ordnung;}$$

mit Fehlern V. Ordnung ist die Azimutkorrektion:

$$\text{in } F = \tfrac{1}{6} l^0 h \sin\chi^0 + \frac{\lambda'' h^4}{120}, \text{ in } G = -\tfrac{1}{6} l' h \sin\chi' + \frac{\lambda'' h^4}{120};$$

deren Unterschied

$$\frac{A_2}{4} \delta^2 h \sin\frac{\chi^0 + \chi'}{2} + \text{V. Ordnung,}$$

Summe = IV. Ordnung.

Damit ist auch erwiesen, daß in Art. 22 der Fehler der Gleichung 6) eine Größe der IV. Ordnung, der Fehler der Gleichung 7) eine Größe der V. Ordnung beträgt.

Nachtrag zur Geschichte der praktischen Geometrie in Polen.

Von Prof. Dr. **W. Láska** in Lemberg.

In den Sitzungsberichten der Krakauer Akademie der Wissenschaften (1907, S. 199) befindet sich ein Aufsatz des H. Merczyng über ein im Jahre 1630 in Rakow erschienenes Lehrbuch der Mathematik, welches für die Geschichte der praktischen Geometrie in Polen von großer Wichtigkeit ist. Der Titel des Werkes lautet: «IOACH. STEGMANI Institutionum MATHEMATICARUM Libri II. quibus initia I. ARITHMETICAE, II. GEOMETRIAE, pro incipientibus dilucide explicantur, & ad praxin varie accomodantur: Jussu Superiorum, In usum Scholae Racovianae conscripti.»

Typis Sebastiani Sternacii, CIↃ. IↃ. CXXX.

Das mir vorliegende Exemplar (Nr. 16.471 der Bibliothek des Ossolineum in Lemberg) ist unvollständig und besitzt 190 Seiten. Von dem Werke sind nur vier Exemplare bekannt.