Bemerkungen zu dem Fuchs'schen Näherungsverfahren in der Methode der kleinsten Quadrate

Alfons Cappilleri [1]

[1] *Reichenberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (3), S. 65–71

1909

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer Max Reinisch.

Nr. 3. **Wien, am 1. März 1909.** VII. Jahrgang.

Bemerkungen zu dem Fuchs'schen Näherungsverfahren in der Methode der kleinsten Quadrate.

Von Prof. **A. Cappilleri** in Reichenberg.

Im ersten und zweiten Hefte der «Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen», Jahrgang 1908, entwickelt Herr Prof. Fuchs in eigenartiger Weise ein Näherungsverfahren zur Auflösung überzähliger Gleichungen, dessen Grundlagen einer kritischen Untersuchung bedürfen.

Es werde zunächst das Verfahren unter Beschränkung auf zwei Unbekannte kurz wiederholt.

Aus n Gleichungen von der Form $ax + by = l$ sollen die besten Werte der Unbekannten bestimmt werden. Die gegebenen Gleichungen werden zunächst durch die bezügliche Koeffizientensumme dividiert, wodurch man das Gleichungssystem 2) erhält:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1 y = \mathfrak{l}_1 \\ \mathfrak{a}_2 x + \mathfrak{b}_2 y = \mathfrak{l}_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Die Koeffizienten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind nun den Bedingungen unterworfen, daß

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = 1 \\ \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2 = 1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Es werden Näherungswerte x_0, y_0 angenommen, in die Gleichungen 2) eingesetzt und die Widersprüche λ bestimmt:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \mathfrak{a}_1 x_0 - \mathfrak{b}_1 y_0 - \mathfrak{l}_1 \\ \lambda_2 = \mathfrak{a}_2 x_0 - \mathfrak{b}_2 y_0 - \mathfrak{l}_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 5)$$

Gute Verbesserungen ξ_0 und η_0 der Näherungswerte x_0 und y_0 sollen sich aus den Beziehungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= -\frac{[\mathfrak{a}\lambda]}{[\mathfrak{a}]} \\ \eta_0 &= -\frac{[\mathfrak{b}\lambda]}{[\mathfrak{b}]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Zu diesem Verfahren ist vor allem zu bemerken, daß durch die Division der Bedingungsgleichungen deren Gewichte geändert werden. Ob dieser Einwurf durch die auf Seite 12 vorgebrachten Erwägungen entkräftet wird oder nicht, erscheint hier ohne Belang, weil das «Pumpenproblem» auf einer nicht bewiesenen und sogar recht bezweifelbaren Behauptung beruht. Es soll daher im folgenden vorausgesetzt werden, daß die transformierten Gleichungen 2) die ursprünglichen Bedingungsgleichungen vom Gewichte Eins seien. Kehren wir also zu 6) zurück.

«Diese Verbesserungen sind also von Natur aus negativ», behauptet Herr Prof. Fuchs. Das ist zweifellos richtig, so lange alle $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und λ positiv sind. Es ist aber klar, daß einzelne Widersprüche negativ werden müssen, wenn die zufällig angenommenen oder errechneten Näherungswerte der Unbekannten den besten Werten nach Gauß sehr nahe kommen, weil in diesem Falle die Widersprüche λ mit den Gauß'schen Widersprüchen v beinahe zusammenfallen, für welche die Bedingungen bestehen

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{a}v] &= 0 \\ [\mathfrak{b}v] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}$$

Es scheint also gerade da, wo das Näherungsverfahren seinem Ende zustrebt, die grundlegende Behauptung über das Vorzeichen der Verbesserungen zweifelhaft. Würden die Verbesserungen positiv werden, so hieße das: Die Unbekannten haben sich in Verfolgung des Näherungsverfahrens von den besten Werten entfernt. Die Schützenkette hat sich zusammengezogen, aber das Wild ist durch die Lappen gegangen!

Um diesen Zweifel zu lösen, setzen wir in Gleichung 2) die Gauß'schen Werte x, y ein und bestimmen die Widersprüche v:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1 y - \mathfrak{l}_1 \\ v_2 &= \mathfrak{a}_2 x + \mathfrak{b}_2 y - \mathfrak{l}_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{II}$$

Subtrahiert man II von 5) und setzt $x_0 - x = \xi$, $y_0 - y = \eta$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 - v_1 &= \mathfrak{a}_1 \xi + \mathfrak{b}_1 \eta \\ \lambda_2 - v_2 &= \mathfrak{a}_2 \xi + \mathfrak{b}_2 \eta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= v_1 + \mathfrak{a}_1 \xi + \mathfrak{b}_1 \eta \\ \lambda_2 &= v_2 + \mathfrak{a}_2 \xi + \mathfrak{b}_2 \eta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots \mathrm{III}$$

Multipliziert man die Gleichungen III bezw. mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ... und addiert, so kommt

$$[\mathfrak{a}\lambda] = [\mathfrak{a}v] + [\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\xi + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\eta$$

oder — weil $[\mathfrak{a}v] = 0$ —

$$[\mathfrak{a}\lambda] = [\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\xi + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{IV}$$

Auf analoge Weise erhält man auch

$$[\mathfrak{b}\lambda] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\xi + [\mathfrak{b}\mathfrak{b}]\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{V}$$

Die Gleichungen 6) nehmen daher die Form an:

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= -\frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\,\xi + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\,\eta}{[\mathfrak{a}]}\\ \eta_0 &= -\frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\,\xi + [\mathfrak{b}\mathfrak{b}]\,\eta}{[\mathfrak{b}]}\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VI}$$

Man ersieht aus VI, daß die Verbesserungen wirklich negativ sind, wenn alle $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und auch die ξ und η positiv sind, d. h. so lange beide Näherungswerte größer sind als die besten Werte. Liegt der umgekehrte Fall vor, sind also ξ und η negativ, so werden die Verbesserungen ξ_0 und η_0 positiv. Gerade dadurch nähern sich aber die verbesserten Werte wieder dem besten Werte, und zwar von unten aus.

Es ist noch die Frage zu erledigen, ob man mit diesen Verbesserungen nicht über das Ziel schießen kann, d. h. ob durch eine z. B. negative Verbesserung von x_0 dieses nicht so weit erniedrigt werden kann, daß es nach der Verbesserung von dem besten Werte x weiter entfernt ist (u. zw. nach unten), als es vor der Verbesserung (nach oben) entfernt war. Es kommt also darauf an, ob $x - x_1$ größer werden könne als $x_0 - x$. Setzt man

$$x_1 = x_0 - \frac{[\mathfrak{a}\lambda]}{[\mathfrak{a}]} = x + \xi - \frac{[\mathfrak{a}\lambda]}{[\mathfrak{a}]},$$

so kommt

$$x - x_1 = \frac{[\mathfrak{a}\lambda]}{[\mathfrak{a}]} - \xi$$

Andererseits ist

$$x_0 - x = \xi$$

Es muß also die Möglichkeit der Ungleichung untersucht werden:

$$\frac{[\mathfrak{a}\lambda]}{[\mathfrak{a}]} - \xi - \xi > 0$$

Setzt man statt $[\mathfrak{a}\lambda]$ den aus IV folgenden Wert ein, so kommt

$$\frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]}{[\mathfrak{a}]}\,\xi - \frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]}{[\mathfrak{a}]}\,\eta - 2\xi > 0 \quad \text{oder}$$

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\,\xi - [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\,\eta - 2[\mathfrak{a}]\,\xi > 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VII}$$

Nun ist aber, wenn ξ und η positiv sind, ganz gewiß

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\,\xi + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\,\eta > 0$$

Addiert man diese Gleichung zu VII, so erhält man

$$2[\mathfrak{a}\mathfrak{a}]\,\xi - 2[\mathfrak{a}]\,\xi > 0 \quad \text{oder}$$

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] > [\mathfrak{a}]$$

Diese Ungleichung ist nicht möglich, weil alle $\mathfrak{a}$ bis auf einzelne Ausnahmen echte Brüche sind. Man ersieht daraus, daß ein «Ausbrechen» der Unbekannten nach der anderen Seite hin ausgeschlossen ist. Das Fuchs'sche Verfahren liefert also wirklich verbesserte Werte, wenn alle $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ positiv, die ξ und η gleichbezeichnet sind.

Ein Beispiel diene zur Erläuterung des Gesagten.

Die gegebenen Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} 0{\cdot}7x + 0{\cdot}3y &= 12 \\ 0{\cdot}6x + 0{\cdot}4y &= 13 \\ 0{\cdot}1x + 0{\cdot}9y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

Die angenommenen Näherungswerte $x_0 = 9$, $y_0 = 21$ geben

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0{\cdot}7 \,.\, 9 + 0{\cdot}3 \,.\, 21 - 12 = 0{\cdot}6, & \mathfrak{a}_1\lambda_1 &= 0{\cdot}42, & \mathfrak{b}_1\lambda_1 &= 0{\cdot}18 \\ \lambda_2 &= 0{\cdot}6 \;\; 9 + 0{\cdot}4 \,.\, 21 - 13 = 0{\cdot}8, & \mathfrak{a}_2\lambda_2 &= 0{\cdot}48, & \mathfrak{b}_2\lambda_2 &= 0\;32 \\ \lambda_3 &= 0{\cdot}1 \;\; 9 + 0{\cdot}9 \,.\, 21 - 19 = 0{\cdot}8, & \mathfrak{a}_3\lambda_3 &= 0{\cdot}08 & \mathfrak{b}_3\lambda_3 &= 0{\cdot}72 \\ & & [\mathfrak{a}\lambda] &= 0{\cdot}98, & [\mathfrak{b}\lambda] &= 1{\cdot}22 \end{aligned}$$

Nach Gleichung 6) ergeben sich die Verbesserungen

$$\xi_0 = -\frac{0{\cdot}98}{1{\cdot}4} = -0{\cdot}70$$

$$\eta_0 = -\frac{1{\cdot}22}{1{\cdot}6} = -0{\cdot}76$$

und somit die verbesserten Werte

$$\begin{aligned} x_1 &= 8{\cdot}30 \\ y_1 &= 20{\cdot}24. \end{aligned}$$

Das Gauß'sche Verfahren liefert die besten Werte

$$\begin{aligned} x &= 8{\cdot}387 \\ y &= 20{\cdot}161 \end{aligned}$$

Beide Näherungswerte wurden zu groß genommen, und zwar um $\xi = 0{\cdot}613$, bezw. $\eta = 0{\cdot}839$. (Setzt man zur Probe ξ und η in VI ein, so erhält man wie oben $\xi_0 = -0{\cdot}70$ und $\eta_0 = -0{\cdot}76$.) Man sieht an diesem Beispiel, daß die Näherungswerte durch das Fuchs'sche Verfahren wirklich verbessert wurden.

Was geschieht nun, wenn z. B. ξ positiv und η negativ ist, also x_0 zu groß und y_0 zu klein angenommen wurde?

Setzt man in VI $-\eta$ statt η, so erhält man die Verbesserungen

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{-[\mathfrak{aa}]\,\xi + [\mathfrak{ab}]\,\eta}{[\mathfrak{a}]} \\ \eta_0 &= \frac{-[\mathfrak{ab}]\,\xi + [\mathfrak{bb}]\,\eta}{[\mathfrak{b}]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{VIII}$$

Die Vorzeichen der Verbesserungen hängen offenbar nur von dem Verhältnisse $\xi : \eta$ ab. Es kann z. B. ξ_0 durch entsprechende Wahl von ξ und η positiv gemacht werden, so daß sich x_1 von dem besten Werte immer mehr entfernt, und zwar nach oben hin. Es kommt jetzt darauf an, ob sich zugleich y_1 von y entfernen kann, und zwar nach unten hin. In diesem Falle müßte η_0 negativ sein. Da die Vorzeichen von ξ_0 und η_0 mit denen der Zähler in VIII übereinstimmen, hat man also zu untersuchen, ob die folgenden Ungleichungen zusammen bestehen können:

$$\left.\begin{aligned} -[\mathfrak{aa}]\,\xi + [\mathfrak{ab}]\,\eta &> 0 \\ -[\mathfrak{ab}]\,\xi + [\mathfrak{bb}]\,\eta &< 0 \end{aligned}\right\}$$

Aus diesen Ungleichungen würde folgen

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\eta}{\xi} > \dfrac{[\mathfrak{aa}]}{[\mathfrak{ab}]} \\[2ex] \dfrac{\eta}{\xi} < \dfrac{[\mathfrak{ab}]}{[\mathfrak{bb}]}\end{array}\right\}$$

somit

$$\frac{[\mathfrak{ab}]}{[\mathfrak{bb}]} > \frac{[\mathfrak{aa}]}{[\mathfrak{ab}]},$$

$$[\mathfrak{ab}]^2 > [\mathfrak{aa}]\,[\mathfrak{bb}]$$

Diese Ungleichung ist unmöglich. Es ist daher nicht zu befürchten, daß sich beide verbesserte Werte zugleich von dem besten Werte entfernen. Wenn das ohnedies zu große x_0 wächst, so wächst auch das zu kleine y_0, so daß wenigstens eine Unbekannte dem besten Werte näher kommt.

Würde man in dem vorigen Beispiele $x_0 = 9$ (also um $\xi = 0{\cdot}613$ zu groß) und $y_0 = 19$ (also um $\eta = 1{\cdot}161$ zu klein) gewählt haben, so hätte das Fuchs'sche Verfahren (in Übereinstimmung mit VIII) geliefert:

$$\xi_0 = +0{\cdot}07,\ \eta_0 = +0{\cdot}56;\ \text{also}\ x_1 = 9{\cdot}07,\ y_1 = 19{\cdot}56.$$

Setzt man hingegen $x_0 = 9$ und $y_0 = 20$, so kommt

$$\xi_0 = -0{\cdot}31,\ \eta_0 = -0{\cdot}10;\ \text{also}\ x_1 = 8{\cdot}69,\ y_1 = 19{\cdot}90.$$

Die Unbekannten steigen oder fallen also gleichzeitig. Freilich, eine Frage bleibt offen: ob nicht y_1 über den besten Wert hinwegspringen kann. Dadurch könnte sich die «zweite Unbekannte» tatsächlich von dem besten Werte entfernen. In diesem Falle müßte $y_1 - y > 0$ sein. Subtrahiert man y_0 vom Minuend und Subtrahend, so erhält man — weil $y_1 - y_0 = \eta_0$ und $y - y_0 = \eta$ — die Ungleichung

$$\eta_0 - \eta > 0$$

die nun auf ihre Möglichkeit untersucht werden soll. Setzt man statt η_0 den entsprechenden Wert aus VIII, so kommt

$$\frac{-[\mathfrak{ab}]\xi + [\mathfrak{bb}]\eta}{[\mathfrak{b}]} - \eta > 0 \quad \text{oder}$$

$$-[\mathfrak{ab}]\xi + [\mathfrak{bb}]\eta - [\mathfrak{b}]\eta > 0$$

Da $\mathfrak{b} < 1$, so ist $[\mathfrak{bb}] < [\mathfrak{b}]$ und somit die linke Seite wesentlich negativ; die Ungleichung, von der wir ausgegangen, ist daher nicht möglich. Man ersieht daraus, daß y_1 unter y bleiben muß und nicht darüber hinwegspringen kann. Es handelt sich jetzt noch darum, zu konstatieren, ob die Entfernung zwischen den im gleichen Sinne sich bewegenden Unbekannten kleiner geworden ist, als sie vor der Verbesserung war, also ob

$$x_1 - y_1 < x_0 - y_0.$$

Durch die Substitutionen $x_1 = x_0 + \xi_0$ und $y_1 = y_0 + \eta_0$ nimmt diese Ungleichung die Form an:

$$\xi_0 - \eta_0 < 0$$

Ersetzt man ξ_0 und η_0 durch die bezüglichen Werte aus VIII, so kommt

$$\frac{-[\mathfrak{aa}]\xi + [\mathfrak{ab}]\eta}{[\mathfrak{a}]} - \frac{-[\mathfrak{ab}]\xi + [\mathfrak{bb}]\eta}{[\mathfrak{b}]} < 0$$

Wenn man vom Nenner befreit und transport, erhält man

$$\{[aa][b] - [ab][a]\}\,\xi > \{[ab][b] - [bb][a]\}\,\eta$$

und daraus durch Division mit ξ:

$$[aa][b] - [ab][a] > \{[ab][b] - [bb][a]\}\,.\,\frac{\eta}{\xi}\quad . \;.\;.\;.\;.\;.\; IX$$

Bedenkt man nun, daß nach unserer Annahme für den vorliegenden kritischen Fall ξ_0 positiv sein soll, so muß laut VIII

$$-[aa]\,\xi + [ab]\,\eta > 0, \text{ also}$$
$$[aa]\,\xi < [ab]\,\eta \text{ und}$$
$$\frac{[aa]}{[ab]} < \frac{\eta}{\xi} \textbf{ sein.}$$

Dividiert man IX durch diese Ungleichung, so kommt:

$$\{[aa][b] - [ab][a]\}\,\frac{[ab]}{[aa]} > [ab][b] - [bb][a].$$

Daraus ergibt sich

$$[aa][ab][b] - [ab]^2[a] > [aa][ab][b] - [aa][bb][a]$$

und endlich
$$[ab]^2 < [aa][bb]$$
eine offenbar richtige Relation.

Somit ist auch dieser Fall erledigt, und zwar im günstigsten Sinne: wenn auch die eine Unbekannte sich vom Ziele entfernt, so nähert sich dafür die andere ihrem Ziele so weit, daß ihre gegenseitige Entfernung kleiner geworden ist. Das Wild ist eingekreist und muß schließlich zur Strecke gebracht werden. Der letzte Fall, der noch unter Annahme positiver Koeffizienten zu betrachten wäre, bietet keine Schwierigkeit mehr: Wenn bei positivem ξ und negativem η die Verbesserung ξ_0 negativ und η_0 positiv wird, so nähern sich beide Unbekannten zugleich dem Ziele.

Die algebraische Untersuchung hat also gezeigt, daß das Fuchs'sche Verfahren bei zwei Unbekannten richtig ist, wenn die Koeffizienten a und b positiv sind. Die Ausdehnung der Untersuchung auf mehr als zwei Unbekannte würde zu weit führen und entbehrt auch des aktuellen Interesses.

*

In der vorstehenden Untersuchung wurde immer betont, daß alle Koeffizienten a und b positiv seien. Wie ist's nun, wenn einzelne Koeffizienten negativ sind? Herr Prof. Fuchs scheint diesen Fall (der praktisch sehr wichtig ist) gänzlich aus dem Auge gelassen zu haben, da er alle Pumpen positiv annimmt und die Verbindungsrohre durchwegs einseitig, nämlich oben anbringt. Diese Einseitigkeit war ein Hauptgrund, warum in vorstehender Untersuchung die Analogie mit einem dynamischen Problem ausgeschaltet wurde. Kehren wir also zur algebraischen Behandlung zurück.

Wir haben gefunden, daß die ersten Verbesserungen nach VI lauten:

$$\xi_0 = -\frac{[aa]\,\xi + [ab]\,\eta}{[a]}$$

$$\eta_0 = -\frac{[ab]\,\xi + [bb]\,\eta}{[b]}$$

Nachdem $\mathfrak{b} = 1 - \mathfrak{a}$, so ist $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}] - [\mathfrak{a}\mathfrak{a}]$, somit

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}].$$

Die Koeffizienten von ξ und η geben in Summe den Nenner, es ist daher $[\xi_0]$ ein Mittelwert zwischen ξ und η, kann daher zwischen ξ und η liegen, so lange alle $\mathfrak{a}$ positiv sind. Für η_0 gilt Analoges. Sind aber einzelne $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ negativ, so kann $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ negativ werden; dann muß $[\mathfrak{a}\mathfrak{a}] > [\mathfrak{a}]$, obwohl alle $\mathfrak{a}$ echte Brüche sind (bis auf die wenigen Ausnahmen, wo z. B. $\mathfrak{a} = 1$ und zugleich $\mathfrak{b} = 0$ ist.) Es ist jetzt recht gut denkbar, daß ξ_0 und auch η_0 numerisch größer werden als ξ und η und vielleicht überdies solche Vorzeichen besitzen, daß die verbesserten Werte x_1 und y_1 sich von den besten Werten x und y noch mehr entfernen. Die Tatsache, daß die Verbesserung ξ_0 geradezu unendlich groß wird, wenn $[\mathfrak{a}] = 0$, läßt für sich allein schon einen Zweifel über die Zulässigkeit des Fuchs'schen Näherungsverfahrens wohl berechtigt erscheinen.

Über diesen Punkt bietet die besprochene Abhandlung keinen Aufschluß. Es wäre darum sehr erwünscht, wenn Herr Prof. Fuchs sich darüber aussprechen, bezw. seine interessante Arbeit in dieser Richtung ergänzen würde.

Erwiderung des Prof. Fuchs zu den vorstehenden Bemerkungen des Prof. Cappilleri.

Herr Prof. Cappilleri sagt: Das Pumpenproblem beruht auf einer nicht bewiesenen und sogar recht bezweifelbaren Behauptung. Dazu bemerke ich:

Was ich vom Pumpsystem aussage, das ist nichts anderes, als das Prinzip der virtuellen Bewegungen: ein System bewegt sich unter positiver Arbeitsleistung der Kräfte so lange, als noch mit positiver Arbeitsleistung verbundene Verschiebungen möglich sind. Sind solche nicht mehr möglich, dann tritt Gleichgewicht ein. Mit anderen Worten heißt das: Gleichgewicht tritt ein, wenn die Kräfte ein Maximum der Arbeit geleistet haben. Behauptungen aber, die aus diesem Prinzip fließen, gelten in Mechanikerkreisen für bewiesen und nicht bezweifelbar.

Herr Cappilleri sagt ferner: Fuchs scheint den Fall teilweise negativer Koeffizienten gänzlich aus dem Auge gelassen zu haben, da er alle Pumpen positiv annimmt und die Verbindungsrohre durchwegs einseitig, nämlich oben anbringt. Dazu bemerke ich:

Um den verwickelten Gegenstand möglichst klar darstellen zu können, habe ich das Problem mit durchwegs positiven Pumpen durchgerechnet. Wer aber in ganz gleicher Weise das Problem auch für teilweise negative Pumpen durchrechnet, der findet nach einer Rechnung von wenig Zeilen, daß in den Brüchen, die man im Näherungsverfahren immer wieder zu bilden hat, die negativen Koeffizienten nur in den Zählern negativ erscheinen; in den Nennern sind sämtliche Koeffizienten positiv zu nehmen, so daß beispielsweise im Nenner die Relation $[\mathfrak{a}] = 0$ nur dann möglich ist, wenn alle $\mathfrak{a}$ gleich Null sind, was natürlich nicht vorkommt. Allerdings hätte ich das in meiner Studie gleich sagen sollen.