Paper-ID: VGI_190916

Die Genauigkeit der alten Pläne von Wien

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Oberingenieur des Wiener Stadtbauamtes*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (4), S. 104–110

1909

BibTEX:


```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_190916,
Title = {Die Genauigkeit der alten Pl{\"a}ne von Wien},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {104--110},
Number = {4},
Year = {1909},
Volume = {7}
}
```

Die Genauigkeit der alten Pläne von Wien.

Von **S. Wellisch.**

Die Liebe und Pietät, mit der jeder Österreicher, in erster Linie der Wiener, an der Metropole seines Vaterlandes hängt, hat in dem Verfasser bereits vor Jahren das Verlangen geweckt, seine Heimatstadt, deren tausendjähriger Bestand vom historischen und künstlerischen Standpunkte nicht minder, wie in archäologischer, topographischer und geologischer Hinsicht erschöpfend geschildert worden ist, vom geodätischen Gesichtspunkte zu betrachten. Aus diesem Beweggrunde hat er in einer Reihe von Abhandlungen*) die alten Pläne der Stadt Wien in topographischer und technischer Beziehung eingehend besprochen und ihre geometrische Genauigkeit einer Untersuchung zu unterziehen versucht.

Wien, die alte Römerstadt Vindobona, die wie keine zweite Stadt des Kontinents mit ihrem reichen Schatz an malerischen Ansichten dem Studium ihrer räumlichen Entwicklung die trefflichste Unterstützung bietet, wurde seit dem XV. Jahrhunderte auch wiederholt mit Hilfe geometrischer Vermessungen planlich dargestellt.**)

Als der älteste Plan von Wien wird gewöhnlich die aus der Zeit König Albrechts II. stammende Handzeichnung, der sogenannte «Albertinische Plan» (1438) betrachtet, obgleich dieses nach dem Schrittmaße aufgenommene Bild ein Plan im geometrischen Sinne nicht zu nennen ist. Abgesehen von diesem Stadtbilde sind die zur Zeit der ersten Türkenbelagerung auf Befehl Kaiser Ferdinands I. von dem Geometer Augustin Hirschvogel und dem Steinmetzmeister Bonifazius Wolmuet in demselben Jahre (1547), aber unabhängig von einander aufgenommenen, in Öl gemalten Grundrisse die ältesten geometrischen Pläne von Wien. Hieran reiht sich der zur Zeit der zweiten Türkenbelagerung im Auftrage des Kaisers Leopold I. in Federmanier angefertigte Plan des Artilleriehauptmannes Daniel Suttinger (1683). Nach vollzogener Anlage der Linienwälle verfaßte auf Anordnung Kaiser Joseph I. der Oberst Leander Anguissola im Vereine mit dem Hofmathematiker Jakob Marinoni (1706) den Plan der Stadt samt ihren Vorstädten, und einige Jahre später erschien der Stadtplan des Stadt-Unteringenieurs Werner Arnold v. Steinhausen (1710). Auf Befehl des Kaisers Joseph II. und der Kaiserin Maria Theresia verfertigte der Hofmathematiker Josef Nagel (1770—1773) seine Wiener Pläne und aus eigenem Antriebe hat der Stadtbauinspektor Anton Behsel (1818—1824) zur Zeit des Kaisers Franz I. das gesamte Stadtgebiet vermessen. Die von der Regierung durchgeführten Katastral-Aufnahmen der inneren Stadt fanden das erstemal im Jahre 1829, dann nochmals im Jahre 1846 statt. Die in jüngster Zeit auf Grund der neuen Instruktion

*) «Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver.» Jahrg. 1898, S. 537, 552, 562, 757. — Jahrg. 1899, S. 489, 563, 575. — Jahrg. 1900, S. 85, 715. — «Zeitschr. f. Verm.» Jahrg. 1899, S. 349, 369. — Jahrg. 1900, S. 180. — «Österr. Monatsschr. f. d. öff. Baudienst» Jahrg. 1899, S. 274. — «Österr. Zeitschr. f. Verm.» Jahrg. 1903, S. 49.

**) Siehe Prof. Dr. Oberhummer: «Der Stadtplan, seine Entwicklung und geographische Bedeutung». Berlin 1907. (Dietrich Reimer).

für Theodolitvermessungen angeordneten Neuaufnahmen erstrecken sich vorläufig nur auf einige wenige Bezirke des heutigen Wiens.

Betrachten wir die aus verschiedenen Epochen herrührenden Erzeugnisse der Meßkunst, so entrollt sich vor uns in kulturgeschichtlicher Beziehung die Entwicklung des Vermessungswesens, namentlich aber dann, wenn wir sie in Bezug auf ihre geometrische Genauigkeit vergleichen. Es sei daher gestattet, auf diesen Gegenstand hier nochmals näher einzugehen.

*

Bezeichnet man die wahren Längen einer beliebigen Anzahl von Strecken im natürlichen Maßverhältnisse mit

$$s_1 \quad s_2 \quad s_3 \; . \; . \; . \; s_n ,$$

die Längen derselben Strecken auf einem im Verjüngungsverhältnisse $1 : N_0$ dargestellten Plane mit

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \; . \; . \; \sigma_n$$

und die entsprechenden, einem Plane im Maßstabe $1 : N$ entnommenen Längen mit

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \; . \; . \; \lambda_n ,$$

so finden unter der Voraussetzung, daß alle planlich entnommenen Längen fehlerlos wären, die Beziehungen statt:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 N_0 = \lambda_1 N \\ s_2 &= \sigma_2 N_0 = \lambda_2 N \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= \sigma_n N_0 = \lambda_n N. \end{aligned}$$

Wenn man dem Plane $1 : N_0$ im Vergleiche zu dem Plane $1 : N$ absolute Genauigkeit zuschreiben darf, so kann man sämtliche σ als fehlerfrei betrachten, während die λ im allgemeinen mit Fehlern behaftet erscheinen werden. Bezeichnet man die den einzelnen Abmessungen λ zukommenden Verbesserungen der Reihe nach mit

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \; . \; . \; . \; v_n ,$$

so werden an Stelle der nicht mehr erfüllbaren Vermittlungsgleichungen die Fehlergleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 N_0 - (\lambda_1 + v_1) N &= 0 \\ \sigma_2 N_0 - (\lambda_2 + v_2) N &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \sigma_n N_0 - (\lambda_n + v_n) N &= 0 \end{aligned}$$

oder auch, da die Fehlergleichungen durch die einzige Unbekannte N dividiert werden dürfen, in der allgemeinen Form:

$$\frac{\sigma N_0}{N} - \lambda = v$$

Nach der Theorie der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich für die Unbekannte $1 : N$ der wahrscheinlichste Wert unter der Erfüllung der Bedingung, daß die Summe der Quadrate der absoluten Verbesserungen aller unmittelbar durch Messung gegebenen Werte ein Minimum werde, also für

$$[vv] = \min.$$

Man erhält so die Normalgleichung:

$$[\sigma\sigma]\frac{N_0}{N} - [\sigma\lambda] = 0$$

sohin ist:

$$N = N_0\frac{[\sigma\sigma]}{[\sigma\lambda]}.$$

Für den mittleren Fehler des Planes ergibt sich, da der obigen Voraussetzung zufolge sämtliche v nicht die scheinbaren, sondern die wahren Verbesserungen darstellen, der Ansatz:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n}}.$$

Diese Größe bedeutet im allgemeinen den mittleren Fehler der Gewichtseinheit. Was ist nun aber im vorliegenden Falle, wo doch alle in Betracht gezogenen Längen mit gleicher Genauigkeit dem Plane entnommen wurden und daher auch keine Gewichtsunterscheidungen zu treffen waren, unter der Gewichtseinheit oder deutlicher unter der «Messung vom Gewichte 1» zu verstehen? Es bedeutet m den mittleren Fehler einer einzelnen Strecke ohne Unterschied ihrer Länge. Nun ist es aber einleuchtend, daß man berechtigt ist, einer längeren Strecke unter sonst gleichen Umständen einen mit der Quadratwurzel ihrer Länge wachsenden mittleren Längenfehler anzuweisen. Nur in dem speziellen Falle, als sämtliche Strecken untereinander gleich wären, also für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, würde m den mittleren Fehler einer einzelnen Strecke von ganz bestimmter Länge angeben.

Sind aber die einzelnen Strecken, wie dies gewöhnlich der Fall sein wird, verschieden lang, so kann m mit λ ohne Streckengewichte nicht in Beziehung gebracht werden; es könnte dann nur mit gewisser Reserve die Behauptung aufgestellt werden, daß m annähernd der mittlere Fehler einer Strecke sei, deren Länge dem arithmetischen Mittel aller in Betracht gezogenen Streckenlängen gleichkommt, d. i. einer Strecke von der Länge $\lambda_0 = \frac{[\lambda]}{n}$.

Um hieraus den mittleren Fehler irgend einer Strecke von der beliebigen Länge λ_x zu ermitteln, könnte man nach der Theorie der Methode der kleinsten Quadrate so vorgehen, daß man mit Zuziehung der nun eine bestimmte Bedeutung erlangenden Streckengewichte $\frac{1}{\lambda_0}$ und $\frac{1}{\lambda_x}$ den mittleren Fehler m_x der Strecke λ_x auf Grund der Beziehung bestimmt, daß sich die Gewichte umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler verhalten, also entsprechend der Proportion:

$$m^2 : m_x^2 = \lambda_0 : \lambda_x,$$

woraus sich ergibt:

$$m_x = m\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_0}}.$$

Wünscht man aber den mittleren Fehler einer in der Natur 100 Meter messenden Strecke kennen zu lernen, so hätte man zu setzen:

$$m\%_0 = m\,N\sqrt{\frac{100}{\lambda_0 N}} = 10\sqrt{\frac{[vv]}{[\lambda]}\,N}.$$

Ein nach dieser Formel erhaltenes Resultat hat aber nur approximativen Wert, der mit um so größerer Annäherung Giltigkeit besitzt, je geringer die Gewichtsunterschiede sind.

Zieht man aber von vornherein die Streckengewichte in Rechnung, so erhält man die wahren Werte der mittleren Fehler der Gewichtseinheit, beziehungsweise der Messungen von bestimmten Längen. Man wird so unwillkürlich auf die Methode der kleinsten Produkte geführt, wonach die Unbekannte, die wir nunmehr mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen wollen, so zu bestimmen ist, daß die Summe aller auf die Längeneinheit bezogenen Quadrate der Verbesserungen v ein Minimum werde. Man hat also die Bedingung:

$$\left[\frac{vv}{\lambda}\right] = \min \quad \text{oder} \quad \left[\frac{vv}{\sigma}\right] = \min$$

und erhält damit

$$\mathfrak{N} = N_0\,\frac{[\sigma]}{[\lambda]}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{vv}{\lambda}\right]}{n}}$$

mit der Rechenprobe: $[v] = 0.$

Der mittlere Fehler μ der Gewichtseinheit kommt jetzt einer Strecke von der Längeneinheit $\lambda = 1$ zu. Somit ist der mittlere Fehler μ_x einer Strecke λ_x mit dem Streckengewichte $1:\lambda_x$ gegeben durch

$$\mu_x = \mu\sqrt{\lambda_x}$$

Für $\lambda_x = \frac{100}{\mathfrak{N}}$, d. i. für eine Strecke am Plane $1:\mathfrak{N}$, welche in der Natur 100 Meter mißt, ist

$$\mu_x = \mu\sqrt{\frac{100}{\mathfrak{N}}}$$

und es ist der mittlere Fehler einer in der Natur 100 Meter messenden Strecke:

$$\mu\%_0 = \mu\,\mathfrak{N}\sqrt{\frac{100}{\mathfrak{N}}} = 10\sqrt{\frac{\left[\frac{vv}{\lambda}\right]}{n}\,\mathfrak{N}}.$$

Da zur Zeit, als die erste Genauigkeitsbestimmung der Wiener Stadtpläne vorgenommen wurde, diese Ausgleichungsmethode noch nicht bekannt war, so ist jenen Untersuchungen ein Näherungsverfahren zu Grunde gelegt worden, mit dem der Verfasser heute selbstverständlich nicht mehr einverstanden sein kann. Es sei ihm daher gestattet, die Resultate der neuerdings angestellten Berechnungen hier mitzuteilen, vorher aber ein kleines Beispiel zu geben.

*

Zur Bestimmung des mittleren Maßstabes und des mittleren Fehlers des sogenannten Albertinischen Planes wurden die Längen der Seiten und Diagonalen eines ausgesuchten Viereckes auf dem zu untersuchenden Plane gemessen und diese

Maße den entsprechenden Längen des jüngsten, im Maße 1 : 720 hergestellten Katastralplanes vom Jahre 1846 gegenübergestellt, also Längen, die für die Zwecke der Genauigkeitsbestimmung älterer Pläne als die wahren Entfernungen der gewählten Punkte betrachtet werden können. Die Berechnungen nach beiden Methoden ergeben folgende Resultate, wobei hervorzuheben ist, daß bei der Lösung der Aufgabe, den mittleren Maßstab eines Planes zu bestimmen, die Rechenarbeit mit Zuziehung der Streckengewichte (Methode der kleinsten Produkte) eine bedeutend geringere ist, als bei Behandlung dieser Aufgabe nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Strecke	σ	λ	$\sigma\sigma$	$\sigma\lambda$
$a-b$	0·6495	0·1035	0·42185	0·06722
$a-c$	0·9540	0·1325	0·91012	0·12641
$a-d$	0·5314	0·0735	0·28239	0·03906
$b-c$	0·9510	0·1505	0·90440	0·14313
$b-d$	1·1343	0·1515	1·28664	0·17185
$c-d$	0·9882	0·0885	0·97654	0·08746
	5·2084	0·7000	4·78194	0·63513

$s=\sigma N_0$	$\frac{s}{N}$	$\frac{s}{\mathfrak{N}}$	$v=\frac{s}{N}-\lambda$	$v=\frac{s}{\mathfrak{N}}-\lambda$
467·64	0·0863	0·0873	— 0·0172	— 0·0162
686·88	0·1267	0·1282	— 0·0058	— 0·0043
382·61	0·0706	0·0714	— 0·0029	— 0·0021
684·72	0·1263	0·1278	— 0·0242	— 0·0227
816·70	0·1507	0·1525	— 0·0008	+ 0·0010
711·50	0·1313	0·1330	+ 0·0428	+ 0·0445
3750·05	0·6919	0·7002		+ 0·0002

Die Resultate lauten:

1. nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$N = 5420{\cdot}92 \qquad m\,\% = \pm\, 46{\cdot}20$$

2. nach der Methode der kleinsten Produkte:

$$\mathfrak{N} = 5357{\cdot}21 \qquad \mu\,\% = \pm\, 50{\cdot}48$$

Als Basis für die Genauigkeitsberechnung der Wiener Stadtpläne benützten wir ein über das Gebiet der inneren Stadt ausgedehntes Dreiecksnetz, welches durch die Punkte: A = Stephanskirche, B = Augustinerkirche, C = Schottenkirche, D = Hohe Brücke, E = Ruprechtskirche und F = Regensburgerhof gebildet ist. Näheres hierüber enthält die «Zeitschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver.», Jahrg. 1898, S. 540 und die «Zeitschr. f. Verm.», Jahrg. 1900, S. 181. Unter Hinweis auf die eingangs zitierten Abhandlungen seien hier nur die Originalmessungsdaten und die Endresultate mitgeteilt.

Abmessungen.

Strecke	λ entnommen dem Plane von								σ
	Wolmuet	Hirschvogel	Suttinger	Anguissola	Steinhausen	Nagel	Behsel	Kataster 1829	1846
$A-B$	0·5540	0·4050	0·2790	0·0898	0·5348	0·7355	0·3443	0·1602	0·6495
$A-C$	0·8610	0·6070	0·3740	0·1263	0·7795	1·0385	0·5047	0·2357	0·9540
$A-D$	0·6982	0·4700	0·2902	0·1021	0·6120	0·8084	0·3953	0·1842	0·7466
$A-E$	0·5005	0·3480	0·2125	0·0724	0·4340	0·5705	0·2814	0·1312	0·5314
$A-F$	0·2940	0·2270	0·1114	0·0376	0·2362	0·3163	0·1537	0·0712	0·2911
$B-C$	0·8380	0·6225	0·3768	0·1196	0·7705	1·0335	0·5032	0·2362	0·9510
$B-D$	0·8945	0·6570	0·4166	0·1343	0·8460	1·1322	0·5493	0·2563	1·0369
$B-E$	0·9930	0·7325	0·4700	0·1513	0·9308	1·2574	0·6007	0·2801	1·1343
$B-F$	0·8480	0·6320	0·3900	0·1267	0·7708	1·0515	0·4976	0·2313	0·9404
$C-D$	0·3360	0·2770	0·1668	0·0536	0·3525	0·4662	0·2276	0·1058	0·4308
$C-E$	0·8525	0·6505	0·3870	0.1263	0·8126	1·0905	0·5227	0·2436	0·9882
$C-F$	0·9940	0·7340	0·4230	0·1403	0·9000	1·2048	0·5814	0·2712	1·1003
$D-E$	0·5394	0·3920	0·2306	0·0772	0·4896	0·6606	0·3132	0·1459	0·5912
$D-F$	0·7412	0·5175	0·2988	0·1023	0·6468	0·8630	0·4164	0·1940	0·7871
$E-F$	0·3165	0·2055	0·1312	0·0444	0·2770	0·3610	0·1788	0·0838	0·3380
	10·2608	7·4675	4·5579	1·5042	9·3931	12·5899	6·0703	2·8307	11·4708

Resultate.

Plan von	aus dem Jahre	Beabsichtigter Maßstab	Mittlerer Maßstab nach der Methode d. kleinsten		Mittlerer Fehler nach der Methode d. kleinsten	
			Quadrate	Produkte	Quadrate	Produkte
Wolmuet	1547	1 : 792	807·67	804·91	9·02	10·61
Hirschvogel . .	1547	1 : 1080	1107·65	1105·99	7·34	8·94
Suttinger	1683	1 : 1800	1808·92	1812·01	8·12	7·74
Anguissola . . .	1706	1 : 5400	5497·94	5490·61	6·88	6·83
Steinhausen . .	1710	1 : 864	879·41	879·26	1·17	1·17
Nagel	1773	1 : 648	655·41	656·00	3·12	3·28
Behsel	1824	1 : 1350	1360·55	1360·55	0·23	0·23
Kataster	1829	1 : 2880	2917·02	2917·64	0·67	0·68
Kataster	1846	1 : 720	—	—	—	—

Um die Unabhängigkeit der aus demselben Jahre stammenden Planaufnahmen von Wolmuet und Hirschvogel geometrisch zu erweisen, kann man so vorgehen, daß man die Werte $\lambda\mathfrak{N}$ beider Pläne gegenüberhält und aus den Unterschieden w der einzelnen korrespondierenden Werte die mittlere Abweichung beider Pläne nach der Formel

$$W = \sqrt{\frac{[ww]}{n}}$$

berechnet. Es ergibt sich hiefür $W = \pm 21{\cdot}44$, womit die vollständige Unabhängigkeit hinreichend bewiesen ist.

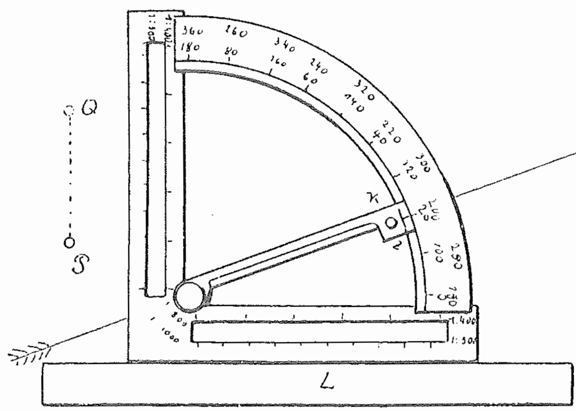
Auf einen Punkt sei hier noch besonders hingewiesen. Bekanntlich ist die Anwendung eines strengen Ausgleichungsverfahrens umso gleichgiltiger, je genauer die Beobachtungen oder Messungen erscheinen. Dies geht auch deutlich aus den beiden letzten Spalten für die mittleren Fehler hervor: Der Unterschied zwischen der nach beiden Ausgleichungsmethoden erhaltenen mittleren Fehlern ist umso geringer, je kleiner die absoluten Werte der mittleren Fehler selbst sind. So weisen die Pläne von Wolmuet und Hirschvogel noch sehr beträchtliche Differenzen auf, während z. B. für den Behsel'schen Plan nach beiden Methoden sowohl dieselben mittleren Fehler, als auch dieselben mittleren Maßstäbe resultieren.

Der Zulegequadrant.

Von **Johannes Scheiber**, stud. rer. mont. in Freiberg i. Sa.

Im Laufe des vergangenen Jahres wurden zwei neue Transporteure, der Wötzel'sche und der Schleicher'sche, in den Handel gebracht. Es geht daraus hervor, daß man noch mit Interesse an der Vervollkommnung des Transporteurs arbeitet. Vielleicht dürfte ich daher bei einem oder dem anderen Leser auf Interesse rechnen, wenn ich hier das Ergebnis einer Studienarbeit mitteile, die ich im November vorigen Jahres beim Markscheideapparat der Königl. Bergakademie zu Freiberg i. Sa. eingereicht habe.

Besteht bei einem Halbkreistransporteur die Mittelmarke in einem Strich auf dem Durchmesser, so entsteht beim Zulegen von Winkeln nahe bei 0° und nahe bei 180° eine Unzuträglichkeit insofern, als das Richtiglegen des Transporteurs dadurch erschwert ist, daß man zu gleicher Zeit auf zwei von einander entfernte Punkte (Mittelmarke und Teilstrich), von denen der eine (Mittelmarke) in diesem Falle ziemlich unsicher ist, sein Augenmerk richten soll. Diesem Übelstande sucht nachstehende Konstruktion zu begegnen. (Siehe Figur).



Auf einem Messingrahmen ist ein Viertelkreisbogen mit versilberter Gradteilung angebracht. Eine Alhidade, deren Zunge (z) mit einer Drittelgradteilung versehen ist, liegt auf der Gradteilung auf und kann durch Anziehen einer Klemmschraube (K) am Bogenstück festgestellt werden. Alhidade und Rahmen des Transporteurs sind mit länglichen, an den Kanten abgeschrägten Ausschnitten