Paper-ID: VGI_190943

Das Amphitheater in Pola

Abraham Broch [1]

[1] *k. k. Hofrat, emer. Direktor des Triangulierungs- und Kalkülbureaus in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (11), S. 325–335

1909

BibTeX:


```
@ARTICLE{Broch_VGI_190943,
Title = {Das Amphitheater in Pola},
Author = {Broch, Abraham},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {325--335},
Number = {11},
Year = {1909},
Volume = {7}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Obergeometer Max Reinisch.

Nr. 11. **Wien, am 1. November 1909.** **VII. Jahrgang.**

Das Amphitheater in Pola.

Eine archäologisch-geodätische Studie.

Von **A. Broch**, k. k. Hofrat,
emer. Direktor des Triangulierungs- und Kalkulbureaus in Wien.

I.

Eines der großartigsten Denkmäler römischer Baukunst ist das Amphitheater in Pola. Wohl steht es an Größe dem Kolosseum in Rom und der Arena in Verona nach, doch übertrifft es mit seinen zwei Etagen von je 72 im dorischen Stile gehaltenen Bögen diese beiden Bauten an Eleganz und Zierlichkeit der Form.

Mit Rücksicht auf die hohe archäologische Bedeutung dieses Bauwerkes wurde bei Gelegenheit der im letzten Dezennium des vorigen Jahrhunderts stattgefundenen Vermessung des Stadtgebietes von Pola nach der Polygonalmethode der Aufnahme des Amphitheaters eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt, um die Vermessungsdaten erforderlichenfalls auch für archäologische Zwecke benützen zu können. Und in der Tat ließ auf Grund dieser Vermessungsdaten das k. k. österreichische archäologische Institut in Wien im Jahre 1899 einen Plan des Amphitheaters im Maßverhältnisse 1 : 250 im k. k. Triangulierungs- und Kalkul-Bureau anfertigen.

Diesen Plan und teilweise auch die Messungsdaten, auf deren Grundlage der Plan konstruiert wurde, benützte ich zu einer Untersuchung über die geometrische Form des Amphitheaters, beziehungsweise zur Lösung der Frage, ob diese Form nur eine ellipsenähnliche sei oder vollkommen einer Ellipse entspreche.

Zu dieser Untersuchung konnte aber der äußere Umfang des Theaters einerseits wegen der großen Anzahl von Mauervorsprüngen, anderseits wegen der vielen Beschädigungen nicht gewählt werden, wohl aber eignete sich hiezu die noch recht gut erhaltene innere Abgrenzung der Umfassungsmauern.

In der folgenden Figur 1 ist der Plan des Amphitheaters nach der neuesten Katastralmappe im Maßverhältnisse 1 : 1250 dargestellt.

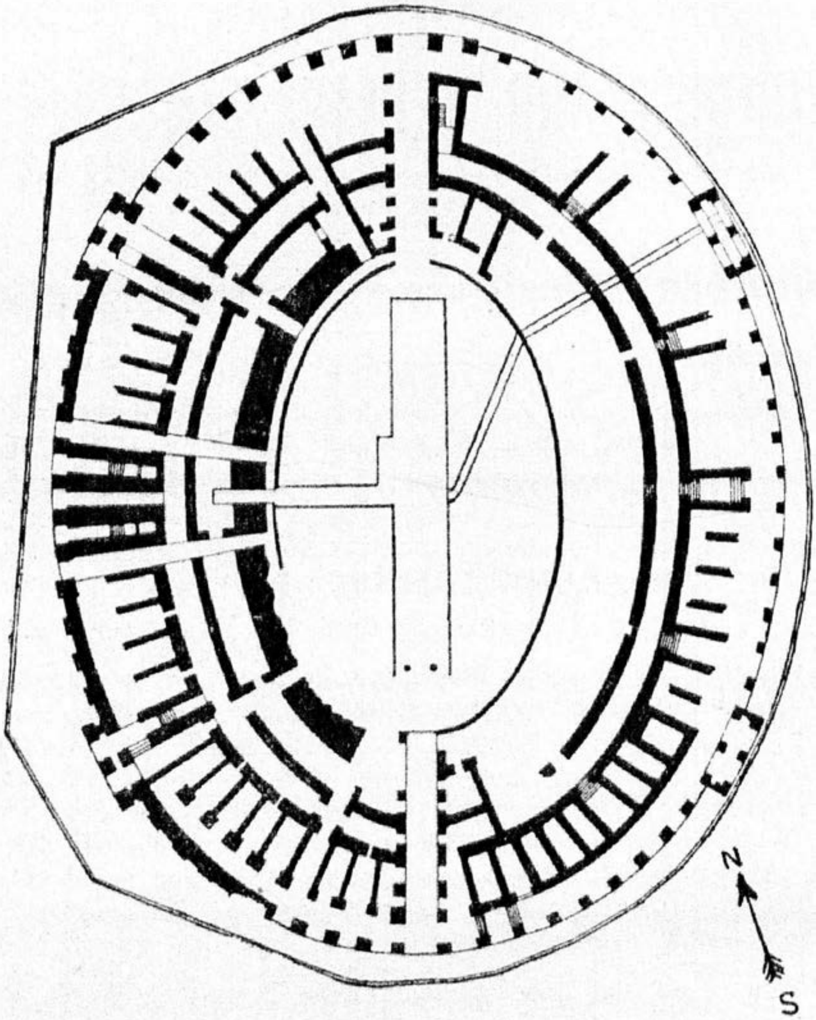


Fig. 1.

II.

Zur Bestimmung einer Kurve 2. Ordnung, mit welcher wir es im vorliegenden Falle zu tun haben, sind bekanntlich die Koordinaten x und y von fünf Punkten dieser Kurve, von welchen mindestens 3 nicht in einer Geraden liegen, erforderlich.

Die allgemeine Gleichung einer solchen Kurve ist bekanntlich:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

oder, wenn man, wie üblich, durch f dividiert und die Quotienten $\frac{a}{f}, \frac{b}{f}$ u. s. w. durch A, B u. s. w. ausdrückt:

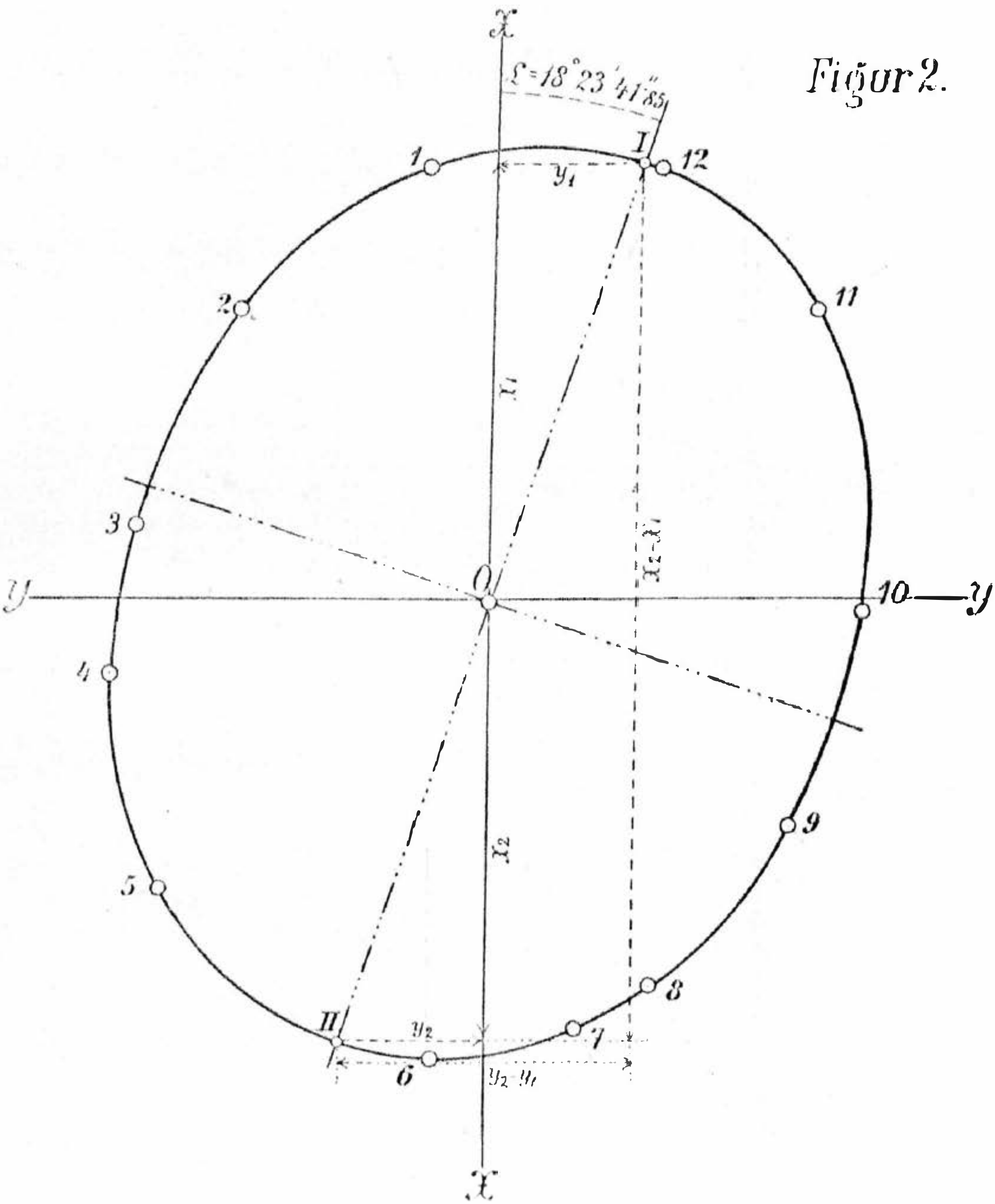
$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Zur Bestimmung der 5 Unbekannten A, B, C, D und E sind sohin 5 derartige Gleichungen, daher die Koordinaten x und y von fünf Punkten notwendig.

Um aber diese Unbekannten für jene Kurve zu bestimmen, welche sich der Form des Amphitheaters am meisten anschmiegt, wurden nicht nur 5, sondern 12 schicklich gelegene Punkte der inneren Umfangsmauer des Amphitheaters ausgewählt, so daß zur Berechnung der Unbekannten außer den unbedingt notwendigen 5, noch 7 überschüssige Gleichungen herangezogen werden konnten. Durch die Auflösung dieser 12 Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate wurden sodann die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten A, B, C u. s. w. erhalten.

In der nachstehenden Figur 2 sind die gewählten Punkte 1 bis 12 dargestellt.

Figur 2.



III.

1. Bildung von y^2, xy, x^2, y und x als Koeffizienten der Unbekannten A, B, C, D und E in der Bedingungsgleichung 2):

$$y^2 A + xy B + x^2 C + y D + x E + 1 = 0$$

Punkte der Kurve	Deren Koordinaten in Metern bezogen auf das Landes-Koordinatensystem, Anfangspunkt «Krimberg».		Um die approximativen Koordinaten des Mittelpunktes der Kurve 49.102 *m* | 117.080 *m* reduzierte		Reduzierte		
	Y	X	y	x	y^2	xy	x^2
1	49.111·65	117.020·00	+ 9·55	— 60·00	91·2025	— 573·00	3600·0000
2	49.137·50	117.040·00	+ 35·50	— 40·00	1260·2500	— 1420·00	1600·0000
3	49.152·00	117.070·00	+ 50·00	— 10·00	2500·0000	— 500·00	100·0000
4	49.155·05	117.090·00	+ 53·05	+ 10·00	2814·3025	+ 530·50	100·0000
5	49.147·75	117.120 00	+ 45·75	+ 40·00	2093·0625	+ 1830·00	1600·0000
6	49.110·00	117.144·00	+ 8·00	+ 64·00	64·0000	+ 512·00	4096·0000
7	49.090·00	117.140·00	— 12·00	+ 60·00	144·0000	— 720·00	3600·0000
8	49.080·00	117.134 35	— 22·00	+ 54·35	484·0000	— 1195·70	2953·9225
9	49.060·00	117.111·70	— 42·00	+ 31·70	1764·0000	— 1331·40	1004·8900
10	49.050·00	117.081·80	— 52·00	+ 1·80	2704·0000	— 93·60	3·2400
11	49.056 85	117.040·00	— 45·15	— 40·00	2038·5225	+ 1806·00	1600·0000
12	49.079·10	117.020·00	— 22·90	— 60·00	524·4100	+ 1374·00	3600·0000

2. Bedingungsgleichungen.

	$y^2 A$	+	$xy B$	+	$x^2 C$	+	$y D$	+	$x C$	+ 1 = 0
1	91·2025 A	—	573·00 B	+	3600·0000 C	+	9·55 D	—	60·00 E	+ 1 = 0
2	1260·2500 A	—	1420·00 B	+	1600·0000 C	+	35·50 D	—	40·00 E	+ 1 = 0
3	2500·0000 A	—	500·00 B	+	100·0000 C	+	50·00 D	—	10·00 E	+ 1 = 0
4	2814·3025 A	+	530·50 B	+	100·0000 C	+	53·05 D	+	10·00 E	+ 1 = 0
5	2093·0625 A	+	1830 00 B	+	1600·0000 C	+	45·75 D	+	40·00 E	+ 1 = 0
6	64·0000 A	+	512·00 B	+	4096·0000 C	+	8·00 D	+	64·00 E	+ 1 = 0
7	144 0000 A	—	720·00 B	+	3600·0000 C	—	12·00 D	+	60·00 E	+ 1 = 0
8	484·0000 A	—	1195·70 B	+	2953·9225 C	—	22·00 D	+	54·35 E	+ 1 = 0
9	1764·0000 A	—	1331·40 B	+	1004·8900 C	—	42·00 D	+	31·70 E	+ 1 = 0
10	2704·0000 A	—	93·60 B	+	3·2400 C	—	52·00 D	+	1·80 E	+ 1 = 0
11	2038·5225 A	+	1806·00 B	+	1600·0000 C	—	45·15 D	—	40·00 E	+ 1 = 0
12	524·4100 A	+	1374·00 B	+	3600·0000 C	—	22·90 D	—	60·00 E	+ 1 = 0

3. Normalgleichungen

a) Allgemein:

$$[y^2 y^2]\,A + [y^2\,xy]\,B + [y^2\,x^2]\,C + [y^2\,y]\,D + [y^2\,x]\,E + [y^2] = 0$$
$$[xy\,xy]\,B + [xy\,x^2]\,C + [xy\,y]\,D + [xy\,x]\,E + [xy] = 0$$
$$[x^2\,x^2]\,C + [x^2\,y]\,D + [x^2\,x]\,E + [x^2] = 0$$
$$[y^2]\,D + [yx]\,E + [y] = 0$$
$$[x^2]\,E + [x] = 0$$

b) Numerisch:

Normal-Gleichung	Koeffizienten von A	B	C	D	E	Absolute Glieder	
Nr. 1	35,260.737	+ 3,382.274	+15,366.201	+85.053	+ 17.805	+16.481·7500	= 0
» 2		+15,366.201	+ 1,067.183	+17.805	— 97.787·2	+ 218·8000	= 0
» 3			+73,092·689	—97.787	+174.550 5	+23.858·0525	= 0
» 4				+16.482	+ 218·8	+ 5·8000	= 0
» 5					+ 23.858·1	+ 51·8500	= 0

Aus der Auflösung dieser Normalgleichungen resultiert:

$$\left.\begin{aligned} A &= -0{\cdot}000\ 366\ 087\ \ldots \\ B &= +0{\cdot}000\ 085\ 719\ \ldots \\ C &= -0{\cdot}000\ 251\ 462\ \ldots \\ D &= -0{\cdot}000\ 051\ 029\ \ldots \\ E &= +0{\cdot}000\ 291\ 489\ \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Es lautet sohin die Gleichung der Kurve, welche sich der inneren Abgrenzungslinie des Amphitheaters am meisten anschließt:

$$-0{\cdot}000\ 366\ 087\,y^2 + 0{\cdot}000\ 085\ 719\,xy - 0{\cdot}000\ 251\ 462\,x^2 - 0{\cdot}000\ 051\ 029\,y + \\ + 0{\cdot}000\ 291\ 489\,x + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Bekanntlich entspricht eine Gleichung 2. Ordnung von dieser Form dann einer Ellipse, wenn

$$B^2 - 4AC < 0,$$

was im vorliegenden Falle, wie man sich auf den ersten Blick überzeugt, auch zutrifft.

IV.

Bevor wir auf die Berechnung der Dimensionen der Ellipse übergehen, erscheint es von Interesse, zu untersuchen, in welchem Grade sich die gefundene Ellipse an die innere Abgrenzungslinie des Amphitheaters anschließt. Ein Urteil hierüber erlangt man, wenn man die für A, B, C, D und E gefundenen Werte in die Bedingungsgleichungen (II 2) substituiert und auf Grund der hiernach sich ergebenden Widersprüche die wahrscheinlichsten Korrektionen ermittelt, welche die Koordinaten x und y (als beobachtete Größen) erhalten müßten, damit der Anschluß ein vollkommener werde.

Diese Substitution erscheint in der folgenden Tabelle durchgeführt.

Nummer d. Gleichung	Numerische Werte für					Absolutes Glied	Widersprüche
	Ay^2	Bxy	Cx^2	Dy	Ex		v
1	— 0·0334	— 0·0491	— 0·9053	— 0·0005	— 0·0175	+ 1	= — 0·0058
2	— 0·4614	— 0·1217	— 0·4023	— 0·0018	— 0·0117	+ 1	= + 0·0011
3	— 0·9152	— 0·0429	— 0·0251	— 0·0026	— 0·0029	+ 1	= + 0·0113
4	— 1·0303	+ 0·0455	— 0·0251	— 0·0027	+ 0·0029	+ 1	= — 0·0097
5	— 0·7662	+ 0·1569	— 0·4023	— 0·0023	+ 0·0117	+ 1	= — 0·0022
6	— 0·0234	+ 0·0439	— 1·0300	— 0·0004	+ 0·0187	+ 1	= + 0·0088
7	— 0·0527	— 0·0617	— 0·9053	+ 0·0006	+ 0·0175	+ 1	= — 0·0016
8	— 0·1772	— 0·1025	— 0·7428	+ 0·0011	+ 0·0158	+ 1	= — 0·0056
9	— 0·6458	— 0·1141	— 0·2527	+ 0·0021	+ 0·0092	+ 1	= — 0·0013
10	— 0·9899	— 0·0080	— 0·0008	+ 0·0027	+ 0·0005	+ 1	= + 0·0045
11	— 0·7463	+ 0·1548	— 0·4023	+ 0·0023	— 0·0117	+ 1	= — 0·0032
12	— 0·1920	+ 0·1178	— 0·9053	+ 0·0012	— 0·0175	+ 1	= + 0·0042

$[v] = +0{\cdot}0005$

Schon die äußerst geringwertigen Widersprüche v lassen erkennen, daß die gefundene Ellipse nur sehr wenig von der inneren Abgrenzungskurve des Amphitheaters abweicht. Besser aber wird der Grad der Übereinstimmung dieser beiden Kurven veranschaulicht, wenn, wie bereits bemerkt, die wahrscheinlichsten Verbesserungen ermittelt werden, welche an den Koordinaten y und x angebracht werden müßten, damit ein vollkommener Anschluß erzielt werde.

Die allgemeine Fehlergleichung ist:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = v$$

Sollen nun die Widersprüche v durch Verbesserung der y und x um dy, beziehungsweise dx verschwinden, so muß das Differenziale der linken Seite der Gleichung $= - v$ werden, d. i.

$$(2Ay + Bx + D)\,dy + (By + 2Cx + E)\,dx + v = 0$$

und wenn man der Kürze halber die Koeffizienten von dy und dx mit p bezw. q bezeichnet, so erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate als wahrscheinlichste Verbesserungen:

$$dy = -\frac{pv}{p^2+q^2} \text{ und } dx = -\frac{qv}{p^2+q^2}.$$

Die Durchführung der Rechnung ergibt sodann die nachstehenden Werte:

Nummer d. Gleichung	Verbesserungen dy	dx	dy^2	dx^2
	in Dezimetern			
1	− 0·6	+ 1·6	0·36	2·56
2	+ 0·2	− 0·2	0·04	0·04
3	+ 2·8	− 0·7	7·84	0·49
4	− 2·5	0·0	6·25	0·00
5	− 0·6	− 0·3	0·36	0·09
6	0·0	+ 2·7	0·00	7·29
7	+ 0·2	− 0·4	0·04	0·16
8	+ 0·9	− 1·2	0·81	1·44
9	+ 0·2	− 0·2	0·04	0·04
10	− 1·1	+ 0·1	1·21	0·01
11	+ 0·8	+ 0·5	0·64	0·25
12	− 0·5	− 1·3	0·25	1·69
			$[dy^2] = 17·84$	$[dx^2] = 14·06$

Die mittleren Koordinatenfehler sind sohin:

$$M_y = \sqrt{\frac{[dy^2]}{12}} = \sqrt{1·4867} = 1·2\,dm$$

$$M_x = \sqrt{\frac{[dx^2]}{12}} = \sqrt{1·1717} = 1·1\,dm$$

und der mittlere Punktfehler

$$M = \sqrt{\frac{[dy^2 + dx^2]}{12}} = \sqrt{2·6583} = 1·6\,dm$$

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, daß es nur sehr geringer Korrekturen von x und y, und zwar in 17 Fällen unter einem Dezimeter, in 4 Fällen zwischen 1 und 2 Dezimeter und nur in 3 Fällen zwischen 2 und 3 Dezimeter bedürfen würde, um die berechnete Ellipse mit der inneren Umfangskurve der Arena zur Deckung zu bringen. Wird noch erwogen, daß es bei dem verwitterten Zustande der den Arenaumfang bildenden Steine überhaupt nicht möglich war, die Umfangsgrenzen auf 2 bis 3 Dezimeter genau zu bestimmen, so ist wohl der Schluß berechtigt, daß die römischen Architekten eine genau konstruierte Ellipse als Grundriß für den Bau der Arena in Pola angenommen haben.

V.

Es sollen nun die Dimensionen der Ellipse aus ihrer Gleichung (III, 4)

$$- 0{\cdot}000\ 366\ 087 y^2 + 0{\cdot}000\ 085\ 719 xy - 0{\cdot}000\ 251\ 462 x^2 - 0{\cdot}000\ 051\ 029 y + \\ + 0{\cdot}000\ 291\ 489 x + 1 = 0$$

ermittelt werden.

Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt bekanntlich in der Weise, daß durch eine zweifache Koordinaten-Transformation, und zwar:

1) durch Drehung der Koordinatenachsen um den Nullpunkt des Systemes in eine mit den Achsen der Ellipse parallele Lage, wodurch das Glied mit xy eliminiert wird, und

2) durch Verlegung des Nullpunktes, unter Festhaltung der nach 1) erhaltenen Lage der Koordinatenachsen, in den Mittelpunkt der Ellipse, die Glieder mit y und x verschwinden und die Gleichung der Ellipse auf die Form der Achsengleichung

$$My^2 + Nx^2 - P = 0$$

gebracht wird, aus welcher sich sodann

$$\text{die große Halbachse } a = \sqrt{\frac{P}{N}}$$

$$\text{die kleine Halbachse } b = \sqrt{\frac{P}{M}}$$

berechnet.

Es möge im folgenden ein Verfahren zur direkten Bestimmung der Achsen der Ellipse aus ihrer allgemeinen Gleichung zur Anwendung gelangen.

Bezeichnet man die Koordinaten der Durchschnittspunkte I und II (Fig. 2) der großen Achse mit der Ellipse durch

$$x_1, y_1 \text{ und } x_2, y_2$$

und substituiert diese Werte in die allgemeine Gleichung der Ellipse, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} Ay_1^2 + Bx_1y_1 + Cx_1^2 + Dy_1 + Ex_1 + 1 = 0 \\ Ay_2^2 + Bx_2y_2 + Cx_2^2 + Dy_2 + Ex_2 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 5)$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen

$$A(y_1^2 + y_2^2) + B(x_1y_1 + x_2y_2) + C(x_1^2 + x_2^2) + D(y_1 + y_2) + E(x_1 + x_2) + 2 = 0 \ldots 6)$$

Erwägt man, daß

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= \tfrac{1}{2}[(y_2 - y_1)^2 + (y_2 + y_1)^2], \\ x_1y_1 + x_2y_2 &= \tfrac{1}{2}[(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_1)(x_2 + x_1)], \\ x_1^2 + x_2^2 &= \tfrac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (x_2 + x_1)^2] \end{aligned}$$

und wenn man die Koordinaten des Mittelpunktes der Ellipse mit Y und X und den Winkel, welchen die Abszissenachse mit der großen Achse der Ellipse ($2a$) einschließt, mit α bezeichnet, daß

$$\begin{aligned} (y_2 + y_1) &= 2\,Y, \\ (x_2 + x_1) &= 2\,X, \\ (y_2 - y_1) &= 2\,a \sin \alpha, \\ (x_2 - x_1) &= 2\,a \cos \alpha, \end{aligned}$$

so erhält Gleichung 6) die Form:

$$\frac{A}{2}(4a^2\sin^2\alpha + 4Y^2) + \frac{B}{2}(4a^2\sin\alpha\cos\alpha + 4XY) + \frac{C}{2}(4a^2\cos^2\alpha + 4X^2) +$$
$$+ 2DY + 2EX + 2 = 0.$$

Nach Zusammenziehung der Glieder mit a^2 und Kürzung durch 2 ergibt sich:

$$a^2(A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha) + AY^2 + BXY + CX^2 + DY + EX + 1 = 0$$

und hieraus

$$a^2 = \frac{-(AY^2 + BXY + CX^2 + DY + EX + 1)}{A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)} \quad \ldots\ldots 7)$$

Zur Bestimmung der kleinen Halbachse b braucht man nur zu beachten, daß der Winkel, welchen die Abszissenachse mit der kleinen Achse der Ellipse ($2b$) einschließt,

$$\alpha' = \alpha + 90$$

ist, so daß

$$b^2 = -\frac{(AY^2 + BXY + CX^2 + DY + EX + 1)}{A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots 8)$$

Bekanntlich erhält man die Koordinaten des Mittelpunktes der Ellipse aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \\ X &= \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

Substituiert*) man diese Werte in die Gleichungen 7) und 8), so nehmen diese folgende einfache Form an:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \frac{-(DY + EX + 2)}{2(A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)} \\ b^2 &= \frac{-(DY + EX + 2)}{2(A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 10)$$

Die Addition der Nenner der beiden Gleichungen 10) ergibt als Summe $2(A + C)$, was als Rechenprobe benützt werden kann.

---

*) Einfacher als durch die etwas komplizierte Substitution der Werte von Y und X in die Gleichungen 7) und 8) gelangt man zum Resultate der Gleichungen 10), wenn man anstatt der Werte von Y und X (Gleichung 9) die zu ihrer Bestimmung dienenden nachstehenden Formeln, in welchen $f(xy)$ die allgemeine Gleichung der Ellipse bedeutet, benützt, und zwar:

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial y} = 2AY + BX + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots a)$$

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial x} = BY + 2CX + E = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots b)$$

(Siehe hierüber unter anderen auch: «Doležal, *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, Ausgabe für Praktiker, Seite 200*»).

Multipliziert man nämlich die vorstehenden Gleichungen a) und b) mit Y beziehungsweise X, so ergibt die Addition dieser Produkte

$$2AY^2 + 2BXY + 2CX^2 + DY + EX = 0$$

oder

$$AY^2 + BXY + CX^2 = -\tfrac{1}{2}(DY + EX).$$

Es ist sohin der Zähler des Bruches in Gleichung 7):

$$AY^2 + BXY + CX^2 + DY + EX + 1 = \tfrac{1}{2}(DY + EX + 2).$$

Was noch den Winkel α anbelangt, so wird derselbe nach der bekannten Relation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{B}{A-C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

bestimmt.

Mit Berücksichtigung der numerischen Werte von A, B, C, D und E berechnet sich sodann:

$$Y = -0{\cdot}00188,$$
$$X = +0{\cdot}57927.$$
$$\log \operatorname{tg} 2\alpha = 9{\cdot}8737977,$$
$$2\alpha = 36^0\,37'\,23{\cdot}7'',$$
$$\alpha = 18^0\,23'\,41{\cdot}85'';$$
$$\lg \sin\alpha = 9{\cdot}4990896, \quad \lg\cos\alpha = 9{\cdot}9772222.$$

Werden diese Werte sowie jene für A, B, C, D und E (Gl. 3) gefundenen in die Gleichungen 10) substituiert, so erhält man bezüglich der inneren Ellipse:

$a^2 = 4216{\cdot}0524$, $b^2 = 2629{\cdot}4463$ und hieraus:

die große Halbachse $a = \sqrt{4216{\cdot}0524} = \mathbf{64{\cdot}933}\ m$

» kleine » $b = \sqrt{2629{\cdot}4463} = \mathbf{51{\cdot}280}\ m$ und schließlich:

als große Achse $2a = \mathbf{129{\cdot}866}\ m$

» kleine » $2b = \mathbf{102{\cdot}560}\ m$

» lineare Exzentrizität $E' = \sqrt{a^2 - b^2} = \mathbf{39{\cdot}83}\ m$

» numerische » $e' = \dfrac{E'}{a} = \mathbf{0{\cdot}613}$

» Umfang $u = \mathbf{366{\cdot}3}\ m$

» Flächeninhalt $F = \mathbf{1}\ ha\ \mathbf{04}\ a\ \mathbf{60}\ m^2$.

Die Stärke der Umfangsmauern des Amphitheaters beträgt im Durchschnitte $1{\cdot}75\ m$, woraus sich für die äußere Ellipse ergeben:

Die große Achse $= 129{\cdot}866 + 2 \times 1{\cdot}75 = \mathbf{133{\cdot}366}\ m$

» kleine » $= 102{\cdot}560 + 2 \times 1{\cdot}75 = \mathbf{106{\cdot}060}\ m$

» lineare Exzentrizität $E'' = \mathbf{40{\cdot}43}\ m$

» numerische » $e'' = \mathbf{0{\cdot}606}$

der Umfang $u' = \mathbf{377{\cdot}3}\ m$

» Flächeninhalt $F' = \mathbf{1}\ ha\ \mathbf{11}\ a\ \mathbf{09}\ m^2$

Um die Dimensionen des Amphitheaters einigermaßen zu veranschaulichen, sei bemerkt, daß dessen Innenraum längs der großen Achse nahezu ausreicht, um in denselben den $136{\cdot}7\ m$ hohen Turm der St. Stefanskirche in Wien umzulegen.

VI.

Vergleicht man die vorstehend berechneten Dimensionen der Arena mit den in verschiedenen Werken publizierten Daten, so erscheinen die letzteren gegenüber der Rechnung durchwegs größer ausgewiesen.

So werden beispielsweise in dem Werke: «Die österr.-ung. Monarchie in Wort und Bild» die Achsen der Ellipse mit $\dfrac{137}{110}\ m \left(+\dfrac{3{\cdot}6}{3{\cdot}9}\right)$, in Meyers Konversationslexikon mit $\frac{137{\cdot}4}{110{\cdot}5}\left(+\frac{4{\cdot}0}{4{\cdot}4}\right)$, in Dr. Kubitscheks und Dr. Frankfurters Führer durch Carnuntum mit $\frac{138}{113}\left(+\frac{4{\cdot}6}{6{\cdot}9}\right)$ angegeben.

Es scheint, daß die beiden erstgenannten, nahezu übereinstimmenden Daten dem im Jahre 1822 in Venedig erschienenen Werke des Canonicus Stankovich »Dello Anfiteatro di Pola« entnommen wurden.

Stankovich hat eine sehr genaue Arena-Vermessung, für welche er den Venetianischen Fuß als Längeneinheit zugrunde gelegt hat, ausgeführt.

In dem aus dieser Vermessung hervorgegangenen Plane, welcher in seinen Hauptdetails mit der neuesten Aufnahme recht gut übereinstimmt, sind als Dimensionen der äußeren Ellipse angegeben:

Große Achse = 381 venet. Fuß,
kleine » = 305·5 » »
Umfang = 1090 » »

Auf dem Plane sind aber auch die Achsendimensionen im Metermaße verzeichnet, und zwar:

Große Achse = 137·8 *m*,
kleine » = 110·5 *m*.

Diese in Meter ausgewiesenen Daten können offenbar nur aus einer Umwandlung der in venetianischen Fußen erhaltenen Vermessungsergebnisse in das metrische Maß hervorgegangen sein, und zwar mußte Stankovich als Relation

1 venet. Fuß = 0·3617 *m*

angenommen haben, weil

381 × 0·3617 = 137·8 *m*
305·5 × 0·3617 = 110·5 *m*.

Nach Littrows Handbuch der vorzüglichsten Maße und Gewichte etc. vom Jahre 1865 ist aber

1 venet. Fuß = 1·099 Wiener Fuß,
und da 1 Wiener Fuß = 0·31608 *m*,
so resultiert: 1 venet. Fuß = 0·34737 *m*

also kleiner als die Relation des Stankovich.

Wird Littrows Relation zur Umwandlung der Daten Stankovich benützt, so erhält man:

Große Achse	381 × 0·34737 = 132·35 *m*	und gegen die Rechnung	133·37 *m*	eine Differenz von	−1·02 *m*
kleine »	305·5 × 0·34737 = 106·12 *m*		106·06 *m*		+0·06 *m*
Umfang	1090 × 0·34737 = 378·63 *m*		377·3 *m*		+1·3 *m*

sohin eine immerhin gute Übereinstimmung.

Die römischen Architekten haben den Grundriß der Arena selbstverständlich nach römischen Maßen (Passus) ausgesteckt.

Nach Littrow ist 1 röm. Fuß = 0·943 Wiener Fuß
und weil 1 Wiener Fuß = 0·31608 *m*
so ist 1 röm. Fuß = 0·29806 *m*
und 1 Passus = 5 röm. Fuß = 1·49030 *m*.

Nach dieser Relation würde sich ergeben:

als große Achse der äußeren Ellipse 133·366 : 1·4903 = 89·49 Passus

» kleine » » » » 106·060 : 1·4903 = 71·17 »

Da es als wahrscheinlich anzunehmen ist, daß die römischen Architekten für die Ellipsen-Dimensionen runde Zahlen gewählt haben, so dürfte man nach der vorstehenden Berechnung nicht fehl gehen, die Achsen des Amphitheaters in Pola mit 90 und 70 Passus anzunehmen.

Unter dieser Annahme würde sich als Länge eines Passus ergeben:

Aus der großen Achse . . . 133·366 : 90 = 1·4818 *m*

aus der kleinen Achse . . . 106·060 : 70 = 1·5151 *m*

und im Mittel 1 Passus = **1·49845** *m* oder rund **1·5** *m*, d. i. die Länge eines militärischen Doppelschrittes.

VII.

Das für das Amphitheater in Pola mit 9 : 7 gefundene Achsenverhältnis oder ein von diesem wenig abweichendes Verhältnis scheint bei den von den römischen Architekten ausgeführten Arenabauten üblich gewesen zu sein, wie dies aus der nachstehenden Tabelle, in welcher die Achsendimensionen von 11 noch ziemlich gut erhaltenen Amphitheatern ausgewiesen sind, hervorgeht.

1	2	3		4	5		6
Nummer	Amphitheater in	Des Amphitheaters große	kleine	In Anlehnung an das Verhältnis 9 : 7 beträgt das Verhältnis der großen zur kleinen Achse	Bei Annahme des Verhältnisses 9 : 7 würden sich gegenüber den in Kol. 3 ausgewiesenen Daten als Dimensionen der großen	kleinen	Anmerkung
		Achse in Metern			Achse ergeben *m*		
1	Österreich Pola . . .	133·37	106·06	9 — 0·08 : 7 + 0·10	133·37 + 1·13	106·06 — 1·45	Die Korrektionen in den Kolonnen 3 und 5 wurden in der Weise berechnet, daß die Summe ihrer Quadrate bezüglich jeder einzelnen Post ein Minimum wird.
2	» Carnuntum	97·7	75·3	9 + 0·03 : 7 — 0·04	97·7 — 0·33	75·3 + 0·43	
3	Italien Rom (Colosseum)	188	156	9 — 0·23 : 7 + 0·28	188 + 4·74	156 — 6·09	
4	» Capua . . .	170	140	9 — 0·20 : 7 + 0·25	170 + 3·77	140 — 4·85	
5	» Verona . . .	152	123	9 — 0·14 : 7 + 0·17	152 + 2·31	123 — 2·98	
6	» Pompeji . . .	130	102	9 — 0·03 : 7 + 0·04	130 + 0·43	102 — 0·55	
7	» Puteoli . . .	147	117	9 — 0·08 : 7 + 0·10	147 + 1·29	117 — 1·66	
8	» Syrakus . .	100	75	9 + 0·12 : 7 — 0·16	100 — 1·35	75 + 1·73	
9	Frankreich Nimes . .	133	101	9 + 0·08 : 7 — 0·10	133 — 1·19	101 + 1·52	
10	» Arbes . .	140	103	9 + 0·18 : 7 — 0·25	140 — 2·85	103 + 3·67	
11	Tunis El Djem . . .	149	124	9 — 0·24 : 7 + 0·29	149 + 3·93	124 — 5·05	

In dieser Tabelle sind als Dimensionen des Amphitheaters in Pola die nach dieser Abhandlung gewonnenen Resultate für das Amphitheater in Carnuntum, die in Dr. Kubitscheks und Dr. Frankfurters Führer durch Carnuntum enthaltenen und auf einer neueren Messung beruhenden Daten eingesetzt worden, während die Daten bezüglich der restlichen 9 Amphitheater teils Meyers und Brockhaus' Konversationslexikon, teils Reisehandbüchern entnommen worden sind. Wenn auch den in diesen Werken enthaltenen Daten ein Anspruch auf absolute Genauigkeit nicht zukommt, so können sie immerhin dazu benützt werden, um einen allgemeinen Überblick über das Verhältnis der betreffenden Achsendimensionen zu gewinnen.