Entdeckungen auf dem Gebiete der Fehlermaße

Alfons Cappilleri [1]

[1] *Reichenberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **7** (11), S. 336–344

1909

BibTEX:

```
@ARTICLE{Cappilleri_VGI_190944,
Title = {Entdeckungen auf dem Gebiete der Fehlerma{\ss}e},
Author = {Cappilleri, Alfons},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {336--344},
Number = {11},
Year = {1909},
Volume = {7}
}
```

Entdeckungen auf dem Gebiete der Fehlermaße.

Von Prof. A. Cappilleri in Reichenberg.

Im 11. und 12. Heft der »Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens«, Jahrgang 1908, hat Herr Bauinspektor Siegmund Wellisch eine umfangreiche Studie über »die charakteristischen Fehlermaße der Ausgleichungsrechnung« veröffentlicht, in welcher er die Ergebnisse der bisherigen Forschung zusammenstellt und durch neue Entdeckungen bereichert, die von hervorragender Bedeutung sind. Mit einem Worte gesagt, es ist dem Verfasser gelungen, die Bevorzugung des mittleren Fehlers als des »zu befürchtenden« zu begründen und den wahrscheinlichen Fehler in den Begriff der durchschnittlichen Fehlerpotenzen einzureihen.

Die vielen merkwürdigen Eigenschaften, welche den mittleren Fehler vor anderen Fehlermaßen auszeichnen, z. B. daß er den Wendepunkten der Wahrscheinlichkeitskurve entspricht, daß er vom Vorzeichen unabhängig ist etc., lassen ihn vom praktischen Standpunkte als den zur Beurteilung der Genauigkeit geeignetsten erscheinen. Alles das kann aber nicht das Epitheton des »zu befürchtenden« rechtfertigen, das ihm von unserem Altmeister Gauß verliehen wurde. Wenn man eine Reihe von Beobachtungen mit einem Spiele vergleicht, bei dem nur verloren werden kann — wobei die absoluten Beträge der Fehler den jedesmaligen Verlust bedeuten — so ist die Gefährlichkeit dieses Spieles nur nach der mathematischen Erwartung des Verlustes zu beurteilen. Der Verfasser hat darum denjenigen Einzelfehler, welchem die größte mathematische Erwartung zukommt, als den zu befürchtenden festgestellt und berechnet. Wenn die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ zu begehen, mit $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$ angenommen wird, so handelt es sich nun darum, denjenigen Wert von ε zu finden, welcher die mathematische Erwartung, d. i. $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$, zu einem Maximum macht. Dieser Wert ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

Dies ist aber nichts anderes als der Ausdruck für den wohlbekannten »mittleren Fehler« μ, d. h. die Quadratwurzel aus dem Durchschnittswert der Fehlerquadrate. Wenn bei diesem wenig einträglichen Spiel eine Einheit des Fehlers (z. B. eine Sekunde) mit einem Heller bewertet wird, und wenn man konstatiert hat, daß der mittlere Fehler μ bisher z. B. 7″ betragen hat, so wird man bei der nächsten Beobachtung mit einem zu befürchtenden Verlust von 7 Hellern zu rechnen haben. Etwas ganz anderes wäre es, wenn man beim Eintreffen des vorhergesagten nächsten Fehlers straflos ausgehen, beim Nichteintreffen aber einen konstanten, von der Größe des Fehlers unabhängigen Betrag entrichten müßte. Dann müßte man auf den Fehler Null wetten, der die größte Wahrscheinlichkeit besitzt. Der Hoffnungswert des »Gewinnes« wäre dann Null, die Hoffnungswerte der Nieten aber negativ.

Die Tatsache, daß der mittlere Fehler wirklich der zu befürchtende ist, rechtfertigt die zweckmäßige Wahl dieses Fehlermittels aus inneren Gründen und verleiht auch allen theoretischen Anwendungen, welche davon gemacht werden (z. B. bei Bestimmung der Unsicherheit der Fehlermaße) ein bisher ungekanntes Gewicht.

Über die Vorzüge der üblichen Fehlermaße sagt der Verfasser folgendes: »Der durchschnittliche Fehler, das Genauigkeitsmaß des Empirikers, gewährt die größte Anschaulichkeit und die bequemste Rechnung. Der mittlere Fehler, das Genauigkeitsmaß des Praktikers, besitzt den größten Hoffnungswert und empfiehlt sich auch durch die geringste Unsicherheit. Der wahrscheinliche Fehler, das Genauigkeitsmaß des Theoretikers, berücksichtigt am meisten die innere Natur der zufälligen Beobachtungsfehler.« Der Verfasser hätte noch hinzufügen können, daß der Empiriker den durchschnittlichen Fehler bevorzugen wird, weil dieser auf dem — wie der Empiriker als Laie glaubt — durch Jahrhunderte der Erfahrung bewiesenen Satze von der Güte des arithmetischen Mittels beruht.

Der wahrscheinliche Fehler ist bisher am schlechtesten weggekommen, weil seine direkte Bestimmung aus allen einzelnen Fehlern nicht möglich war. Man mußte sich mit dem Umweg über den mittleren Fehler oder mit der Methode des »Abzählens« begnügen. Der Verfasser der »charakteristischen Fehlermaße« hat nun gezeigt, daß man den wahrscheinlichen Fehler direkt aus einer Fehlerpotenz ableiten könne, u. zw. auf folgendem Wege.

Wenn man die relative Häufigkeit des Fehlers ε mit $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ annimmt, so ergibt sich der Durchschnittswert S_m der m-ten Potenzen von ε zu

$$S_m = 2 \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^m e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^m \sqrt{\pi}} \int_0^\infty (h\varepsilon)^m e^{-(h\varepsilon)^2} d(h\varepsilon) =$$

$$= \frac{2}{h^m \sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^m \varepsilon^{-t^2} dt^{*})$$

Das bestimmte Integral $I_m = \int_0^\infty t^m e^{-t^2} dt$, das eine Funktion von m ist, wird nun für die Werte $m = 0, 1, 2, \ldots 7$ entwickelt und in einem Graphikon dargestellt, aus welchem sich für $m = \frac{1}{2}$ der Wert $I_{1/2} = 0{\cdot}61$ ergibt. Es wäre demnach $S_{1/2} = \frac{2}{h^{1/2}\sqrt{\pi}} 0{\cdot}61$, und das Fehlermittel $M_{1/2}$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ selbst das Quadrat von $S_{1/2}$, also

$$M_{1/2} = \frac{4}{h\pi} 0{\cdot}61^2 = \frac{0{\cdot}47}{h}$$

Man erhält also ungefähr — so genau als es die Zeichnung gestattet — für das Fehlermittel von der Ordnung $\frac{1}{2}$ denselben Ausdruck wie für den wahrscheinlichen Fehler $\varrho = \frac{0{\cdot}47694}{h}$.

---

*) Diese Formel ist in der Abhandlung entstellt, indem bei $h^m \sqrt{\pi}$ der Exponent m auf das Wurzelzeichen verschoben wurde.

Um zu einem genaueren Resultat zu gelangen, schlägt der Verfasser zwei Wege vor: 1. die Anwendung der Newton'schen Interpolationsformel $\mu_n = \mu_0 + \binom{n}{1}\Delta_1\mu_0 + \binom{n}{2}\Delta_2\mu_0 + \ldots$, 2. Die Entwicklung nach einer empirisch angenommenen Potenzreihe $I_m = k_0 + k_1 m + k_2 m^2 + k_3 m^3 + \ldots$

Diese Reihe liefert bei Heranziehung von 13 Gliedern den Wert $I_{1/2} = 0{\cdot}6133$, während derjenige Wert, welcher der Zahl $\varkappa$ in der bekannten Relation $\varrho = \frac{\varkappa}{h}$ entsprechen müßte, 0·6120 lauten soll. Die Frage, ob sich $I_{1/2}$ diesem gewünschten Werte wirklich unbedingt nähere, ist aber so wichtig, daß hier noch ein dritter Weg versucht werden soll, der den Vorteil gewährt, das Restglied der Entwicklung bestimmen und dadurch den Grad der Annäherung festlegen zu können.

Er besteht einfach darin, daß man in dem Integrale $I_{1/2} = \int\limits_0^\infty t^{1/2} e^{-t^2}\, dt$ die Exponentialfunktion e^{-t^2} in einer unendlichen Reihe entwickelt, mit $t^{1/2}dt$ multipliziert und die Integration ausführt, aber nicht zwischen o und ∞, sondern zwischen o und T. Es ergibt sich dabei offenbar ein Fehler, der aber umso kleiner sein wird, je größer man T annimmt.

Die Entwicklung des Integrales $I_{1/2}$ ergibt zunächst:

$$I_{1/2} = \int\limits_0^T t^{1/2} e^{-t^2}\, dt = \int\limits_0^T t^{1/2}\left(1 - t^2 + \tfrac{1}{2!}t^4 - \tfrac{1}{3!}t^6 + \tfrac{1}{4!}t^8 - \tfrac{1}{5!}t^{10} + \ldots\right) dt =$$

$$= \Big[\tfrac{2}{3}t^{3/2} - \tfrac{2}{7}t^{7/2} + \tfrac{1}{2!}\cdot\tfrac{2}{11}t^{11/2} - \tfrac{1}{3!}\cdot\tfrac{2}{15}t^{15/2} + \tfrac{1}{4!}\cdot\tfrac{2}{19}t^{19/2} - \tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{2}{23}t^{23/2}\ldots\Big]_0^T =$$

$$= 2\,T^{3/2}\left[\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7}T^2\right) + \left(\tfrac{1}{2!}\cdot\tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{3!}\cdot\tfrac{1}{15}T^2\right)T^4\,\tfrac{1}{4!}\,. + \left(\tfrac{1}{19} - \tfrac{1}{5!}\cdot\tfrac{1}{23}T^2\right)T^8\ldots\right] =$$

$$= 2\,T^{3/2}\left[A_0 + A_1 T^4 + A_2 T^8 + \ldots\right].$$

Setzt man $T = \sqrt{10}$, so kommt

$$A_0 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7}\,.\,10 = -\tfrac{23}{21}$$

$$A_1 T^4 = \left(\tfrac{1}{2}!\,.\,\tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{3}!\,.\,\tfrac{1}{15}\,10\right)100 = \frac{3.15 - 11.10}{3!\,.\,11.15}\,.\,100$$

$$A_2 T^8 = \left(\tfrac{1}{4}!\,.\,\tfrac{1}{19} - \tfrac{1}{5}!\,.\,\tfrac{1}{23}\,10\right)100^2 = \frac{5.23 - 19.10}{5!\;19.23}\,.\,100^2$$

. . . .

Das Bildungsgesetz der Glieder ist leicht zu erkennen. Die Ausrechnung ergibt, daß die Glieder in der eckigen Klammer von — 1·09 auf — 14·30 sinken, von da an bis auf + 11·73 steigen, um wieder herabzusinken, wobei sie sich der Nulle unbegrenzt nähern. Das 16. Glied lautet 0·000021, das 17. Glied 0·000002; die folgenden Glieder haben auf die 6. Dezimalstelle keinen Einfluß, da sie rascher abnehmen als bei einer geometrischen Reihe mit dem Quotient $\frac{2}{21} \cdot 0{\cdot}1$. Der Einfluß der Abrundungsfehler beträgt im ungünstigsten Falle $17\,.\,\frac{1}{2} = 8{\cdot}5$ Einheiten der 6. Dezimalstelle, wahrscheinlicherweise aber nur $\sqrt{17}\,.\,\frac{1}{4} \doteq 1$ E. d. 6. D.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer, der sich zu 0·054476 ergibt, ist noch mit $2\,T^{3/2} = 2\sqrt[4]{1000} = 11{\cdot}2468$ zu multiplizieren, wodurch man erhält

$$I_{1/2} = 0{\cdot}61268.$$

Die Unsicherheit dieses Wertes beträgt im ungünstigsten Falle 11·2 . . × 8·5 = 85 E. d. 6. Dez. = 1 E. d. 4. Dez., wahrscheinlicherweise aber nur einige Einheiten der 5. Dezimalstelle. (Zur Kontrolle wurde noch das Integral von 0 bis 2 entwickelt und der Rest nach erfolgter Transformation $\left(t = \frac{1}{x}\right)$ mittels der Simpson'schen Formel ausgewertet, wodurch sich ebenfalls $I_{1/2} = 0·61268$ ergab).

Es handelt sich jetzt noch um die Bestimmung des Fehlers, der durch die Annahme der oberen Grenze $T = \sqrt{10}$ statt $T = \infty$ entstanden sein kann. Um diesen Fehler in gewisse Grenzen einschließen zu können, betrachten wir außer der Kurve $y_{1/2} = t^{1/2}e^{-t^2}$ auch noch die Kurve $y_1 = te^{-t^2}$. Bei der Abszisse $t = 1$ wird $y_{1/2} = y_1 = e^{-1}$, d. h. beide Kurven schneiden sich in einem Punkte mit den Koordinaten $1, e^{-1}$. Von hier an gehen sie dauernd auseinander, und zwar muß stets die erste Kurve unterhalb der zweiten verlaufen, weil für $t > 1$ stets $y_{1/2} < y_1$ ist. Wenn man die Quadratur der Flächen bei irgend einer Abszisse $t > 1$ abbricht, so wird daher der Fehler $\triangle I_{1/2}$ der ersten Fläche stets kleiner sein als der Fehler $\triangle I_1$ der zweiten Fläche. Für $T = \sqrt{10}$ erhält man

$$\triangle I_1 = \int_{\sqrt{10}}^{\infty} te^{-t^2}dt = \tfrac{1}{2}e^{-10} = 0·000023.$$

Es ist folglich $\triangle I_{1/2} < 0·000023$ und zwar, wenn man das Verhältnis der Flächen nach dem Verhältnis der Anfangsordinaten $T^{1/2}e^{-T^2}$ bezw. Te^{-T^2} abschätzt, ungefähr die Hälfte (nämlich $T^{1/2} : T = \sqrt[4]{10} : \sqrt{10}$) davon, also 1. E. d. 5. Dez. Das Resultat $I_{1/2} = 0·6127$ ist daher bis auf ein Tausendstel seines Wertes richtig, und darum entfernt sich das aus den Quadratwurzeln der Fehler ε gefundene Mittel

$$M_{1/2} = \left(\frac{[\sqrt{|\varepsilon|}]}{n}\right)^2 = \frac{4}{h\pi} \cdot I^2_{1/2} = \frac{0·47798}{h}$$

von dem wahrscheinlichen Fehler $\varrho = \frac{0·47694}{h}$ bloß um $\frac{1}{500}$ seines Wertes. Die Übereinstimmung von $M_{1/2}$ und ϱ ist also keine identische, aber doch eine vorzügliche Annäherung: Der nach der Wellisch'schen Formel $\varrho = \left(\frac{[\sqrt{|\varepsilon|}]}{n}\right)^2$ gefundene Wert des wahrscheinlichen Fehlers ϱ ist um 2 ‰ zu groß. Diese Genauigkeitsangabe gilt natürlicher Weise nur für den idealen Fall, d. h. bei Anwesenheit von ∞ vielen Fehlern ε, die sich nach dem Gauß'schen Gesetz verteilen. In jedem praktischen Falle, d. i. bei endlicher Fehleranzahl, wird die Ungenauigkeit, welche der Annahme $\varrho = M_{1/2}$ zu Grunde liegt, weitaus von der Unsicherheit übertroffen, welche jeder Mittelbestimmung aus einer endlichen Anzahl von Fehlern naturgemäß anhaftet. Man erkennt dies recht deutlich, wenn man diejenige Anzahl n der Beobachtungen berechnet, welche notwendig wäre, um die Unsicherheit des Wellisch'schen Fehlerpotenzwertes ϱ auf die vorhin angegebene Ungenauigkeitsgrenze $\frac{1}{500}\varrho$ herabzudrücken. Die Unsicherheit beträgt nämlich — wie der Verfasser nach der bekannten Formel

$$\triangle m = \pm \sqrt{\frac{S_{2\,m} - S_{m}^{2}}{n}}$$

berechnet (die aber bisher auf den wahrscheinlichen Fehler nicht angewendet werden konnte):

$$\triangle \varrho = \pm \varrho \frac{0{\cdot}57\,699}{\sqrt{n}}.$$

Setzt man diesen Wert gleich $\frac{1}{500}$ ϱ, so ergibt sich $\sqrt{n} = 500 \times 0{\cdot}576.. = 288{\cdot}..$ und $n = 83000$. Es müßten also mehr als 83000 Beobachtungen vorliegen, dann erst würde die theoretische Ungenauigkeit der Wellisch'schen Formel zum Ausdruck kommen, indem sie die wahrscheinliche Sicherheit überwiegt. Und auch dieser »Fehler« ist verschwindend klein, da er ja — wie gesagt — nur $\frac{1}{500}$ des berechneten Wertes beträgt!

Sehr interessant ist die Zusammenstellung, die der Verfasser über die Unsicherheit des aus verschiedenen Fehlerpotenzen (einschließlich der Fehlerwurzel) abgeleiteten wahrscheinlichen Fehlers vernimmt. Es geben danach

146	Fehler	bei	Benützung	der	Fehlerwurzeln
114	»	»	»	»	1. Fehlerpotenzen
100	»	»	»	»	2. »
109	»	»	»	»	3. »
133	»	»	»	»	4. »
. . .					

Dieselbe Unsicherheit in der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers ϱ. Man ersieht daraus, daß die Berechnung von ϱ aus den Fehlerquadraten (bezw. aus dem mittleren Fehler μ) noch immer die sicherste ist, sogar sicherer als die direkte Berechnung aus den Fehlerwurzeln mittels der Formel $\varrho = \left(\frac{\sum\sqrt{|\varepsilon|}}{n}\right)^2$. Der Wert dieser Formel liegt aber darin, daß sie ein neues, sehr einfaches Mittel an die Hand gibt, um vorliegende Fehlerreihen auf ihre Güte zu prüfen, ganz abgesehen von dem theoretischen Interesse, das sie beanspruchen darf. Die bisher übliche Art der direkten Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch «Abzählen« bietet zwar auch eine Kontrolle, wenn man aus ihm das Genauigkeitsmaß h nach der Formel $h = \frac{0{\cdot}47694}{\varrho}$ berechnet und diesen Wert mit jenen vergleicht, welche aus dem mittleren, bezw. dem durchschnittlichen Fehler nach den Formeln $h = \frac{0{\cdot}70711}{\mu}$ bezw. $h = \frac{0{\cdot}56419}{\vartheta}$ erhalten werden. Die Unsicherheit des durch Abzählen gefundenen wahrscheinlichen Fehlers ϱ_a ist aber ziemlich beträchtlich, $\triangle \varrho_a = \pm \varrho_a \frac{0{\cdot}78672}{\sqrt{n}}$.

Wenn die Methode des Abzählens ein ebenso zuverlässiges Resultat für ϱ_a liefern soll wie die Berechnung aus den Fehlerquadraten, so muß man für erstere eine weitaus größere Anzahl von Beobachtungen zur Verfügung haben als für letztere. Der Verfasser berechnet das Verhältnis zu 272 : 100 und erweitert die vorhin angeführte Tabelle für gleichartige Fehleranzahlen:

$$\varrho_{\frac{1}{2}} : \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 : \varrho_4 : \varrho_5 : \varrho_6 : \varrho_a$$
$$146 : 114 : 100 : 109 : 133 : 178 : 251 : 272^{*})$$

(Die Indizes $\frac{1}{2}$, 1, 2, . . a bezeichnen die Berechnungsart von ϱ).

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers nach der Wellisch'schen Formel viel zuverlässiger ist als die durch Abzählen. Es ist dies auch ganz begreiflich, weil, wie der Verfasser bemerkt, bei jener alle Fehlerwerte herangezogen werden, bei dieser aber nur der mittelste bezw. die beiden mittelsten. Man könnte noch hinzufügen, daß das Einschalten zwischen die beiden mittelsten Fehler eine Willkürlichkeit enthält, deren man sich umso mehr bewußt wird, je größer die Lücke ist. Die Fehler sind eben nicht als Einzelwerte aufzufassen, sondern als Vertreter ihrer Bereiche.

Die eingehendste Prüfung einer Fehlerreihe besteht bekanntlich darin, daß man die Anzahl der Fehler, welche nach der Laplace'schen Funktion innerhalb gewisser Grenzen liegen sollen, mit der Anzahl der wirklich dazwischen liegenden Fehler vergleicht. Diese Probe verliert jedoch bei einer geringeren Anzahl von Fehlern an Sicherheit, weil die Aufstellung jener Grenzen abermals nach einer gewissen Willkür erfolgen muß.

Die angeführten Entwicklungen gelten für wahre Fehler, können aber bei umfangreichen Beobachtungsreihen ohne weiteres auf scheinbare Fehler übertragen werden. Bei geringerer Fehleranzahl wäre dies nicht mehr gestattet. Der Verfasser hat darum auch die Ermittlung der Fehlermaße aus den scheinbaren Fehlern in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen. Als Ausgangspunkt dient die Bestimmung des wahrscheinlichsten Genauigkeitsmaßes h aus den scheinbaren Fehlern v, und zwar in folgender Weise:

Die Wahrscheinlichkeit eines wahren Fehlers ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ ist $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$, daher die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller n Fehler

$$w = \left(\frac{h\,d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\varepsilon\varepsilon]}.$$

In diesem Ausdrucke müssen nun die wahren Fehler ε durch die scheinbaren Fehler v ausgedrückt werden. Nennt man den Unterschied zwischen dem wahren Werte der beobachteten Größe und dem arithmetischen Mittel der Beobachtungen ξ, so ist — wie sich leicht zeigen läßt —

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + n\,\xi^2.$$

Somit kommt

$$w = \left(\frac{h\,d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [vv] - n h^2 \xi^2} = \left(\frac{h\,d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [vv]} \cdot e^{-n h^2 \xi^2}.$$

Nachdem der wahre Wert unbekannt ist, kann man ξ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufend denken und für jeden solchen Wert ξ bis $\xi + d\xi$ die Wahrscheinlichkeit w bestimmen. Die Wahrscheinlichkeit W, daß einer von diesen Fällen eintrete, ist bekanntlich die Summe der Wahrscheinlichkeiten w der Einzelfälle, also

*) Diese Zahl wurde — wie der Verfasser bemerkt — von Gauß irrtümlich zu 247 angegeben.

$$W = \left(\frac{h\,d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[vv]}\, e^{-nh^2\xi_1^2}\, d\xi_1 + \left(\frac{h\,d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[vv]}\, e^{-nh^2\xi_2^2}\, d\xi_2 + \ldots =$$

$$= \left(\frac{h\,d\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[vv]} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-nh^2\xi^2}\, d\xi.$$

Setzt man

$$n\,h^2\,\xi^2 = t^2, \text{ also } d\,\xi = \frac{d\,t}{h\sqrt{n}},$$

so geht das Integral über in

$$\frac{1}{h\sqrt{n}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, d\,t = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{n}}$$

und somit erhält man

$$W = \left(\frac{d\,\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)^n \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, h^{n-1}\, e^{-h^2[vv]}.$$

Dieser Ausdruck ist eine Funktion von h. Bestimmt man h so, daß W, die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der Fehler, ein Maximum erreicht, so hat man damit den wahrscheinlichsten Wert des Genauigkeitsmaßes bestimmt. Durch Differenzieren von $h^{n-1}\, e^{-h[vv]}$ und Nullsetzen erhält man

$$h = \sqrt{\frac{n-1}{2\,[vv]}}.$$

Nun besteht aber zwischen dem wahrscheinlichsten Genauigkeitsmaß h und dem mittleren Fehler μ die Relation

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

folglich ist der durch die scheinbaren Fehler ausgedrückte »quadratische Mittelwert der w a h r e n Fehler«, oder — wie Wellisch ihn nennt — der »empirische mittlere Fehler«

$$\mu = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}.$$

Der Mittelwert der s c h e i n b a r e n Fehler wäre

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}$$

Das Verhältnis zwischen μ und m beträgt $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$. Dasselbe Verhältnis muß auch zwischen irgend einem Fehlermittel beliebiger Ordnung (z. B. ϑ, ϱ) und dem entsprechenden Fehlermittel der scheinbaren Fehler (t, r) bestehen. Man kann deshalb setzen:

$$\vartheta = t \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{[|v|]}{n} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \quad \text{(P e t e r s' Formel)},$$

$$\varrho = r \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{[\sqrt{|v|}]}{n}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{[\sqrt{|v|}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}}.$$

Letztere Formel gibt den wahrscheinlichen Fehler an, ausgedrückt durch die scheinbaren Fehler v.

Man kann die Formeln für ϑ und ϱ benützen, um den mittleren Fehler μ zu kontrollieren, indem man von den allgemeinen Beziehungen Gebrauch macht.

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta \text{ und } \mu = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}}\,\varrho.$$

Durch Einführung obiger Werte für ϑ und ϱ erhält man nachstehende Formeln, in welchen der Index des μ die Fehlerpotenz angibt, die zur Berechnung benützt wurde:

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$$\mu^{1/2} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \cdot \frac{[\sqrt{|v|}]^2}{n\sqrt{n(n-1)}} \qquad \mu_2 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$$

Die Ergebnisse dieser drei Formeln werden — namentlich bei einer kleinen Anzahl n von Fehlern — beträchtlich von einander abweichen. Bezüglich μ_1 und μ_2 war das schon bekannt, und F e c h n e r hatte bei μ_1 eine Korrektur vorgenommen, indem er $n - x$ statt $n - 1$ einführte und das x so bestimmte, daß im ungünstigsten Falle, d. i. bei $n = 2$, die beiden Werte μ_2 und μ_1 nahezu zusammenfallen. Diesen Gedanken hat der Verfasser auch auf die neue, dritte Bestimmungsart ausgedehnt. Wenn $n = 2$, so ist $|v_1| = |v_2| = v$ und somit

$$\mu_{1/2} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \cdot \frac{(2\sqrt{v})^2}{2\sqrt{2}(2-x)} = \frac{v}{\varkappa\sqrt{2-x}}, \text{ anderseits } \mu_2 = \sqrt{\frac{2v^2}{1}} = v\sqrt{2}.$$

Soll nun $\mu_{1/2} = \mu_2$ sein, so muß $\varkappa\sqrt{2}\,\sqrt{2-x} = 1$ und $x = 2 - \dfrac{1}{2\varkappa^2} \doteq -\frac{1}{5}$ sein. Dadurch erhält man den verbesserten Wert des aus den Fehlerwurzeln berechneten mittleren Fehlers

$$\mu_{1/2} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \cdot \frac{[\sqrt{|v|}]^2\sqrt{5}}{n\sqrt{n(5n+1)}}.$$

Man kann nun wieder auf den wahrscheinlichen Fehler ϱ zurückschließen, indem man $\varrho = \varkappa\sqrt{2}\,.\,\mu$ setzt, und bekommt so den verbesserten Wert des aus den Fehlerwurzeln berechneten wahrscheinlichen Fehlers

$$\varrho_{1/2} = \frac{[\sqrt{|v|}]^2\sqrt{5}}{n\sqrt{n(5n+1)}}.$$

Eine bedeutende Vereinfachung tritt ein, wenn man $x = o$ setzt (statt $-\frac{1}{5}$):

$$\varrho = \frac{[\sqrt{|v|}]^2}{n^2} = \left(\frac{[\sqrt{|v|}]}{n}\right)^2$$

Diese v e r b e s s e r t e F o r m e l f ü r d e n w a h r s c h e i n l i c h e n F e h l e r schlägt der Verfasser zum Gebrauch vor und zeigt an einem Beispiel, bei welchem $n = 5$, daß sie nahezu denselben Wert liefert, den man aus μ mittels der Relation $\varrho = \varkappa\sqrt{2}\,.\,\mu$ erhält. Für $n = 2$ würde die verbesserte W e l l i s c h'sche Formel $\varrho = v$ ergeben, also genau denselben Wert, den man durch »Abzählen«

erhält, womit auch der aus μ erhaltene Wert $\varrho = \varkappa \sqrt{2} \,.\, \mu = 2 \varkappa v = 0{\cdot}954\, v$ sehr gut übereinkommt.

Man könnte noch hinzufügen, daß die neue Formel, die auf kleinste Werte von n abgestimmt wurde, auch dann nicht an Güte verliert, wenn n eine große Zahl ist, weil es in diesem Falle offenbar sehr wenig ausmacht, ob man 1, 0 oder $-\frac{1}{6}$ von n subtrahiert. Für $n = \infty$ fällt sie sogar mit der ursprünglichen Formel vollkommen zusammen.

Das Wellisch'sche Verfahren, den wahrscheinlichen Fehler direkt aus den Fehlerwurzeln zu berechnen, ist daher nach jeder Richtung tadellos und stellt eine sehr wertvolle Bereicherung der Wissenschaft vor. Es ist gewissermaßen eine Ehrenrettung für den wahrscheinlichen Fehler, der — wie der Verfasser sagt — das natürlichste Fehlermaß bildet und dennoch bisher so arg vernachlässigt wurde.

Auch in anderer Beziehung vermag die Abhandlung, die sich wie alle Schriften des Verfassers durch Schärfe der Begriffsbestimmungen und Klarheit der Entwicklung auszeichnet, wertvolle Anregung zu geben. In dieser Hinsicht sei besonders auf die Einführung der »prozentuellen Fehlergrenzen« in die Ausgleichungsrechnung verwiesen, die eine Verallgemeinung des Begriffes des wahrscheinlichen Fehlers darstellen. Wie der wahrscheinliche Fehler als diejenige Grenze definiert wird, für deren Nichtüberschreiten die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (also »50% der Gewißheit«) besteht, so kann man auch die übrigen Fehlermaße $\vartheta = M_1$, $\mu = M_2$, M_3, M_4 .... durch die Wahrscheinlichkeit $\Theta\,(M h)$ in »Prozenten der Gewißheit« charakterisieren. Eine diesbezügliche Zusammenstellung, welche der Verfasser bringt:

$$\begin{array}{ccccccc} M_{1/2} = \varrho, & M_1 = \vartheta, & M_2 = \mu, & M_3, & M_4, & M_5, & M_6 \ldots \\ 50\,\%, & 58\,\%, & 68\,\%, & 76\,\%, & 81\,\%, & 85\,\%, & 88\,\% \ldots \end{array}$$

gibt über die Größe der Fehlermittel eine deutlichere Vorstellung als die direkte Beziehung auf h. Sie bietet auch ein sehr bequemes Mittel, um die Fehlerverteilung einer Beobachtungsweise auf ihre Gesetzmäßigkeit zu prüfen, was der Verfasser an einem Beispiel (Bessels 22 Dreiecksabschlüsse) zeigt. Die etwas mangelhafte Übereinstimmung der Werte für μ und ϑ, die einerseits durch Abzählen, anderseits durch direkte Berechnung gefunden wurden, bestätigt, daß diese Reihe (bei der sich $2 \dfrac{\mu^2}{\vartheta^2} = 2{\cdot}60$ statt π ergibt) dem Gauß'schen Fehlergesetz nicht gut gehorcht. Vielleicht ist der Grund hievon in dem Umstande zu suchen, daß die Längen der Visuren nicht berücksichtigt wurden, so daß die Fehler nicht direkt vergleichbar sind.

Anmerkung der Redaktion. Der vorstehende Aufsatz war bereits im März d. J. in den Händen der Redaktion, also lange Zeit vor Veröffentlichung von Betrachtungen über die Studie von Wellisch in anderen Zeitschriften.