Paper-ID: VGI_191016

# Die Formel zur Bestimmung der Erdgestalt

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Bauinspektor der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **8** (5), S. 139–144

1910

BibTeX:


```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_191016,
Title = {Die Formel zur Bestimmung der Erdgestalt},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {139--144},
Number = {5},
Year = {1910},
Volume = {8}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

# ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

**Redaktion:** Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 5. **Wien, am 1. Mai 1910.** VIII. Jahrgang.

## Die Formel zur Bestimmung der Erdgestalt.

Von **S. Wellisch**, Bauinspektor der Stadt Wien.

Mit Hinweis auf die in den «Mitteilungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte», 1906, S. 29, erschienene Abhandlung über «die Bestimmung der Erdgestalt nach der Methode der kleinsten Produkte», die ihren Ausgang von der Bessel'schen Formel für die Entfernung zweier Parallelkreise genommen hat, sei an dieser Stelle diese historisch bedeutungsvolle Formel in einer möglichst ausführlichen und doch einfachen Art abgeleitet.

Werden die Meridiane der Erde als Ellipsen betrachtet, und bedeuten in der allgemeinen Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a$, $b$ die beiden Halbachsen des elliptischen Erdmeridianes und $x$, $y$ die vom Mittelpunkte aus gezählten rechtwinkeligen Koordinaten eines Punktes desselben, so ist die Länge eines Ellipsenelementes gegeben durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und es ist die Länge eines Meridianbogenstückes $s$ bestimmt durch das Integral

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Ist $\varphi$ die Polhöhe eines Punktes der Meridianellipse, so besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x}$$

und durch Quadrierung

$$a^4 y^2 = b^4 x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Verbindet man diese durch $a^2$ dividierte Gleichung mit der Gleichung der Ellipse durch Subtraktion, so entsteht:

$$a^2 y^2 = \frac{b^4 x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{a^2}$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$a^2 b^2 - b^2 x^2 = \frac{b^4 x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{a^2}$$

und hieraus ist

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi}} .$$

Setzt man nach Bessel $\frac{a-b}{a+b} = n$ und daher $b = a\frac{1-n}{1+n}$, (neuere Ableitungen benützen statt $n$ die Exzentrizität $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ oder auch andere Funktionen von $a$ und $b$), so wird erhalten:

$$x = \frac{a(1+n)\cos\varphi}{\sqrt{(1+n)^2 - 4n\sin^2\varphi}}$$

und in analoger Weise

$$y = \frac{a(1-n)^2 \sin\varphi}{(1+n)\sqrt{(1+n)^2 - 4n\sin^2\varphi}}.$$

Die Differentiation von $x$ und $y$ nach $\varphi$ ergibt:

$$dx = -\frac{a(1+n)(1-n)^2 \sin\varphi \,.\, d\varphi}{[(1+n)^2 - 4n\sin^2\varphi]^{3/2}}$$

$$dy = \frac{a(1+n)(1-n)^2 \cos\varphi \,.\, d\varphi}{[(1+n)^2 - 4n\sin^2\varphi]^{3/2}},$$

womit das obige Integral für die Bestimmung von $s$ übergeht in:

$$s = \int d\varphi \sqrt{\frac{a^2(1+n)^2(1-n)^4}{[(1+n)^2 - 4n\sin^2\varphi]^3}}$$

oder wenn die konstanten Glieder herausgehoben werden:

$$s = a(1+n)(1-n)^2 \int [(1+n)^2 - 4n\sin^2\varphi]^{-3/2} . d\varphi$$

Diese Integration ist nur mit Reihenentwicklung möglich, die nach dem binomischen Lehrsatz erfolgen kann. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist von der Form

$$(p+q)^r$$

mit $p = (1+n)^2$, $q = -4n\sin^2\varphi$, $r = -\frac{3}{2}$.

Die Entwicklung dieses Binoms gibt:

$$(p+q)^r = p^r + r p^{r-1} x + \frac{r(r-1)}{1.2} p^{r-2} x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} p^{r-3} x^3 + \ldots,$$

sohin ist:

$$s = a(1+n)(1-n)^2 \int d\varphi \,[(1+n)^{-3} + 6n(1+n)^{-5}\sin^2\varphi + 30n^2(1+n)^{-7}\sin^4\varphi + $$
$$+ 140n^3(1+n)^{-9}\sin^6\varphi + \ldots].$$

Sind $\varphi$ und $\varphi'$ die Polhöhen der Endpunkte des Meridianbogens, so ist die Integration dieses Ausdruckes zwischen den Grenzen $\varphi$ und $\varphi'$ auszuführen. Bezeichnet man der besseren Übersichtlichkeit wegen mit

$$A = \int (1+n)^{-3}\, d\varphi$$

$$B = \int 6n(1+n)^{-5} \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$C = \int 30n^2(1+n)^{-7} \sin^4\varphi \, d\varphi$$

$$D = \int 140\, n^3 (1+n)^{-9} \sin^6 \varphi \, d\varphi$$

also
$$s = a(1+n)(1-n)^2 (A + B + C + D + \ldots),$$

so gibt die Integration von $A$ zwischen den erwähnten Grenzen:

$$A = (1+n)^{-3} (\varphi' - \varphi).$$

Zur Ausführung der übrigen Integrale benötigt man die nachstehenden Formeln:

$$\int \sin^2 x \,.\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

$$\int \cos^2 x \,.\, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

$$\int \sin^4 x \,.\, dx = \tfrac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \tfrac{1}{4} \int dx - \tfrac{1}{2} \int \cos 2x \,.\, dx + \tfrac{1}{4} \int \cos^2 2x \,.\, dx$$

$$\int \cos^2 2x \,.\, dx = \tfrac{1}{2} \int \cos^2 2x \,.\, d2x = \tfrac{1}{2} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} d2x = \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x + c.$$

Es ist daher

$$B = 6n(1+n)^{-5} \int_{\varphi}^{\varphi'} \sin^2 \varphi \,.\, d\varphi = 6n(1+n)^{-5} \left( \frac{\varphi' - \varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi}{4} \right)$$

$$C = 30n^2(1+n)^{-7} \int_{\varphi}^{\varphi'} \sin^4 \varphi \,.\, d\varphi = 30n^2(1+n)^{-7} \left\{ \frac{\varphi' - \varphi}{4} - \frac{\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi' - \varphi}{8} + \frac{\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi}{32} \right) =$$

$$= \tfrac{15}{4} n^2 (1+n)^{-7} \left\{ 3(\varphi' - \varphi) - 2(\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) + \tfrac{1}{4} (\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi) \right\}$$

$$D = \tfrac{35}{8} n^3 (1+n)^{-9} \left\{ 10(\varphi' - \varphi) - \tfrac{15}{2} (\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) + \tfrac{3}{2} (\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi) - \tfrac{1}{6} (\sin 6\varphi' - \sin 6\varphi) \right\}$$

Werden die gleichartigen Glieder zusammengefaßt, so erhält man:

$$s = a(1+n)(1-n)^2 \Big\{ (\varphi' - \varphi) \left[ (1+n)^{-3} + 3n(1+n)^{-5} + \tfrac{45}{4} n^2 (1+n)^{-7} + \tfrac{175}{4} n^3 (1+n)^{-9} + \ldots \right] -$$

$$- n(\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) \left[ \tfrac{3}{2} (1+n)^{-5} + \tfrac{15}{2} n(1+n)^{-7} + \tfrac{525}{16} n^2 (1+n)^{-9} + \ldots \right] +$$

$$+ \frac{n^2}{2} (\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi) \left[ \tfrac{15}{8} (1+n)^{-7} + \tfrac{105}{8} n(1+n)^{-9} + \ldots \right] -$$

$$- \frac{n^3}{3} (\sin 6\varphi' - \sin 6\varphi) \left[ \tfrac{35}{16} (1+n)^{-9} + \ldots \right] + \ldots \Big\}.$$

Nun kann man nach Potenzen von $(1+n)$ entwickeln und hierauf unter gegenseitigem Aufheben der ungeraden Potenzen von $n$ reduzieren, so daß man erhält:

$$s = a(1+n)(1-n)^2 \Big\{ (\varphi' - \varphi) \left[ 1 + (\tfrac{3}{2} n)^2 + (\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} n^2)^2 + \ldots \right] -$$

$$- n(\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) \left[ \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{4} (\tfrac{3}{2} n)^2 + \tfrac{7}{6} (\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} n^2)^2 + \ldots \right] +$$

$$+ \frac{n^2}{2} (\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi) \left[ \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} + \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{7}{6} (\tfrac{3}{2} n)^2 + \ldots \right] -$$

$$- \frac{n^3}{3} (\sin 6\varphi' - \sin 6\varphi) \left[ \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{7}{6} + \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{7}{6} \cdot \tfrac{9}{8} (\tfrac{3}{2} n)^2 + \ldots \right] + \ldots \Big\}$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$N = 1 + (\tfrac{3}{2}n)^2 + (\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{5}n^2)^2 + \ldots$$
$$N\alpha = \tfrac{3}{2}n + \tfrac{5}{4}n(\tfrac{3}{2}n)^2 + \tfrac{7}{6}n(\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}n^2)^2 + \ldots$$
$$N\alpha' = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}n^2 + \tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}n^2(\tfrac{3}{2}n)^2 + \ldots$$
$$N\alpha'' = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}n^3 + \tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}\cdot\tfrac{9}{8}n^3(\tfrac{3}{2}n)^2 + \ldots$$

u. s. w.,

wobei zu bemerken ist, daß $N\alpha''$ und die folgenden Glieder wegen der Kleinheit von $n$ jedenfalls zu vernachlässigen sind, denn es ist $n = 0{\cdot}001675$ und $n^3 = 0{\cdot}000\,000\,005$, so vereinfacht sich der obige Ausdruck wie folgt:

$$s = a(1+n)(1-n)^2 N\left\{(\varphi'-\varphi) - \alpha(\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) + \frac{\alpha'}{2}(\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi) - \ldots\right\}$$

Schreibt man ferner für:

$$\sin 2\varphi' - \sin 2\varphi = 2\sin(\varphi'-\varphi)\cos(\varphi'+\varphi) = 2\sin l\,.\cos 2L$$
$$\sin 4\varphi' - \sin 4\varphi = 2\sin 2(\varphi'-\varphi)\cos 2(\varphi'+\varphi) = 2\sin 2l\,.\cos 4L,$$

worin $l = \varphi' - \varphi$ die Länge des Bogens oder die Polhöhen-Amplitude und $L = \dfrac{\varphi'+\varphi}{2}$ die mittlere Breite desselben bedeutet, so wird:

$$s = a(1+n)(1-n)^2 N(l - 2\alpha\sin l\,.\cos 2L + \alpha'\sin 2l\,.\cos 4L - \ldots).$$

Führt man nun statt der halben großen Achse $a$ die mittlere Länge $g$ eines Meridiangrades ein, so erhält man, da für $l = \pi$ die Länge des Meridianbogens den Betrag $180\,.g = a(1+n)(1-n)^2 N\pi$ erreicht und sohin

$$a(1+n)(1-n)^2 N = \frac{180\,.g}{\pi}$$

ist, die Gleichung

$$s = \frac{180\,.g}{\pi}(l - 2\alpha\sin l\,.\cos 2L + \alpha'\sin 2l\,.\cos 4L - \ldots).$$

Drückt man noch die Amplitude $l$ in Sekunden aus, so ist

$$l'' = \frac{180\,.60\,.60}{\pi}\,l \quad \text{oder} \quad \frac{180}{\pi}\,l = \frac{l''}{3600}$$

und es resultiert:

$$s = \frac{gl''}{3600} - \frac{180\,.g}{\pi}(2\alpha\sin l\,.\cos 2L - \alpha'\sin 2l\,.\cos 4L + \ldots)$$

oder, wenn mit $\dfrac{3600}{g}$ multipliziert und die Zahl $\dfrac{180\,.3600}{\pi} = 206\,264{\cdot}8''$ mit $\varrho''$ bezeichnet wird:

$$\frac{3600\,s}{g} = l'' - 2\varrho''\alpha\sin l\,.\cos 2L + \varrho''\alpha'\sin 2l\,.\cos 4L - \ldots$$

In dieser Gleichung sind, wenn die Beobachtungsdaten einer Gradmessung, das sind die aus den geodätischen Entfernungen zweier Punkte abgeleiteten Abstände der Parallelen und die Polhöhen dieser Punkte, eingesetzt werden, nur zwei Größen, nämlich $g$ und $\alpha$ als unbekannt zu betrachten, denn für die dritte Unbekannte $\alpha'$ kann mit hinreichender Genauigkeit folgender durch $\alpha$ ausgedrückter Näherungswert eingeführt werden. Es ist

$$\alpha = \frac{N\alpha}{N} = \frac{\tfrac{3}{2}n(1 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}n^2)}{1 + (\tfrac{3}{2}n)^2} = \tfrac{3}{2}n(1 + \tfrac{15}{8}n^2)(1 - \tfrac{9}{4}n^2) = \tfrac{3}{2}n(1 - \tfrac{3}{8}n^2)$$

und $\frac{2}{3}\alpha = n - \frac{3}{8}n^3$. Wird hierin für $n^3 = (\frac{2}{3}\alpha)^3$ gesetzt, was genügend genau ist, so wird

$$n = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}\alpha^3$$

und da mit hinreichender Genauigkeit auch gesetzt werden kann:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{N\alpha'}{N\alpha} = \frac{5}{4}n,$$

so wird schließlich $\alpha' = \frac{5}{4}n\alpha = \frac{5}{6}\alpha^2 + \frac{5}{36}\alpha^4$
oder bei Vernachlässigung der vierten Potenz der sehr kleinen Zahl $\alpha$:

$$\alpha' = \frac{5}{6}\alpha^2.$$

Damit erhält man eine Gleichung mit nur zwei Unbekannten:

$$\frac{3600\,s}{g} = l'' - 2\varrho''\,\alpha \sin l \,.\, \cos 2L + \frac{5}{6}\varrho''\,\alpha^2 \sin 2l \,.\, \cos 4L.$$

Um die beiden Unbekannten $g$ und $\alpha$, welche die Größe und Gestalt der Erde bestimmen, zu ermitteln, sind daher mindestens zwei Gradmessungen notwendig. Liegen mehr als zwei Gradmessungen vor, so wird man durch Verbindung derselben mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung jene Werte von $g$ und $\alpha$ zu ermitteln trachten, welche allen hiezu verwendeten Gradmessungen am besten Genüge leisten und auf diese Weise jenes Rotationsellipsoid bestimmen, welches allen Krümmungen der unregelmäßigen Geoidfläche möglichst gut sich anschmiegt. Die gestellte Aufgabe fordert also, daß die beobachteten Polhöhen $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ den zwischen den Parallelen gemessenen Entfernungen so gut als möglich entsprechen, wobei angenommen wird, daß die Fehler in den gemessenen Entfernungen im Vergleiche zu den Polhöhen-Fehlern als verschwindend betrachtet werden können.

Sind nun $x, x'$ die Fehler, mit welchen die Polhöhen $\varphi$ und $\varphi'$ der Endpunkte einer Gradmessung behaftet gedacht erscheinen, so ist zunächst statt $l$ und $2L$ zu setzen: $\quad l + (x' - x)$ bezw. $2L + (x' + x)$,
dann wegen der Kleinheit der Fehlerbeträge:

$$\sin(l + x' - x)\cos(2L + x + x') = [\sin l + (x' - x)\cos l]\,[\cos 2L - (x + x')\sin 2L]$$

u. s. w., so daß man hat:

$$\frac{3600\,s}{g} = (l + x' - x)'' - \varrho''\Big\{2\alpha[\sin l + (x' - x)\cos l]\,[\cos 2L - (x + x')\sin 2L] - \\ - \frac{5}{6}\alpha^2[\sin 2l + 2(x' - x)\cos 2l]\,[\cos 4L - 2(x + x')\sin 4L] + \ldots\Big\}.$$

Multipliziert man aus und vernachlässigt hiebei die Glieder höherer Ordnung, so wird, indem man statt $\varrho''(x' - x)$ und $\varrho''(x + x')$ kürzer die identischen Ausdrücke $(x' - x)''$ und $(x + x')''$ setzt:

$$\frac{3600\,s}{g} = l'' + (x' - x)'' - \varrho''\,[2\alpha\sin l \,.\, \cos 2L - \frac{5}{6}\alpha^2 \sin 2l \,.\, \cos 4L + \ldots] - \\ - (x' - x)''\,[2\alpha\cos l \,.\, \cos 2L - \frac{5}{3}\alpha^2\cos 2l \,.\, \cos 4L + \ldots] + \\ + (x + x')''\,[2\alpha\sin l \,.\, \sin 2L - \frac{5}{3}\alpha^2 \sin 2l \,.\, \sin 4L + \ldots].$$

Wird das letzte Glied als das Produkt zweier sehr kleinen Größen unterdrückt, so erhält man für die zu suchende Differenz in Sekunden:

$$(x' - x)'' = \frac{\frac{3600\,s}{g} - l'' + \varrho''\,[2\alpha\sin l \,.\, \cos 2L - \frac{5}{6}\alpha^2 \sin 2l \,.\, \cos 4L]}{1 - 2\alpha\cos l \,.\, \cos 2L + \frac{5}{3}\alpha^2\cos 2l \,.\, \cos 4L}.$$

Um aus dieser Gleichung $g$ und $\alpha$ zu berechnen, führt man zur Vereinfachung der Rechnung Näherungswerte $g_0$ und $\alpha_0$ ein und setzt:

$$g = \frac{g_0}{1 + i}, \qquad \alpha = \alpha_0 (1 + k),$$

worin $i$ und $k$ die nunmehr zu suchenden Verbesserungen von $g_0$ und $\alpha_0$ bedeuten. Damit wird, wenn man noch den Nenner des Bruches der rechten Seite der Kürze wegen mit $\tau$ bezeichnet:

$$(x' - x)'' = \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{3600\, s\, (1 + i)}{g_0} - l'' + \varrho'' [2 \alpha_0 (1 + k) \sin l \,.\, \cos 2 L - \tfrac{5}{6} \alpha_0^2 (1 + k)^2 \sin 2 l \,.\, \cos 4 L] \right\},$$

wozu die Bemerkung zu machen ist, daß $\tau$ mit hinreichender Genauigkeit mit dem genäherten Werte $\alpha_0$ berechnet werden kann. Durch Ausmultiplizieren und Vernachlässigung des Quadrates von $k$ entsteht endlich die von Bessel aufgestellte Formel:

$$(x' - x)'' = \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{3600\, s}{g_0} - l'' + \varrho'' [2 \alpha_0 \sin l \,.\, \cos 2 L - \tfrac{5}{6} \alpha_0^2 \sin 2 l \,.\, \cos 4 L] \right\} +$$
$$+ \frac{3600\, s}{g_0\, \tau} \,.\, i + \frac{\varrho''}{\tau} [2 \alpha_0 \sin l \,.\, \cos 2 L - \tfrac{5}{3} \alpha_0^2 \sin 2 l \,.\, \cos 4 L]\, k.$$

Bezeichnet man nach Bessel den Koeffizienten von $i$ mit $a$, denjenigen von $k$ mit $b$ und das absolute Glied mit $m$, so hat man mit Hinweglassung der Bezeichnung für Sekunden, die Relation:

$$x' - x = a i + b k + m$$

als die Fehlerdifferenzgleichung für eine Gradmessung, bei welcher bloß zwei Polhöhenbestimmungen angestellt wurden. Sind bei einer Gradmessung auf mehreren Orten die Polhöhen beobachtet worden, so erhält man für die Verbindung des südlichsten Punktes der Gradmessung mit jedem nördlicheren Punkte eine analog gebildete Gleichung, so daß man für eine Gradmessung mit $(1 + r)$ Polhöhenbestimmungen $r$ derartige Fehlerdifferenzgleichungen zur Ausgleichung der Polhöhendifferenzen zur Verfügung hat.

*

Anmerkung. Bei dieser Gelegenheit seien einige Druckfehler in den Besselschen Originalabhandlungen der «Astronomischen Nachrichten» mitgeteilt.

14. Band (1837), S. 338: Der Nenner des Integrales ist zur dritten Potenz zu erheben.
» » » 339: In der Gleichung für $m$ soll es $\sin l \,.\, \cos 2 L$ statt $\sin l \,.\, \sin 2 L$ und in der Gleichung für $b$ soll es $\frac{5\,0}{8\,1}$ statt $\frac{5\,1}{8\,1}$ heißen.
19. Band (1842), S. 115: Das absolute Glied der 5. Bedingungsgleichung der französischen Gradmessung soll $+ 1{\cdot}191$ statt $7{\cdot}191$ lauten.
» » » » » Die Verbesserung der Polhöhe für den Punkt Hochland der russischen Gradmessung soll $0{\cdot}707$ statt $0{\cdot}607$ lauten.