Rückwärtseinschneiden im Raum

Hans Dock [1]

[1] *Lehrer an der höheren Forstlehranstalt zu Mährisch-Weißkirchen*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **8** (9), S. 291–305

1910


```
@ARTICLE{Dock_VGI_191038,
Title = {R{\"u}ckw{\"a}rtseinschneiden im Raum},
Author = {Dock, Hans},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {291--305},
Number = {9},
Year = {1910},
Volume = {8}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 9. **Wien, am 1. September 1910.** VIII. Jahrgang.

Rückwärtseinschneiden im Raum.

Von **Dr. Hans Dock**, Lehrer an der höheren Forstlehranstalt zu Mährisch-Weißkirchen.

I.

Eine Methode der Punktfestlegung aus zwei gegebenen Punkten mit Hilfe der Nadirdistanzen und des Horizontalwinkels im festzulegenden Punkte.

Problem: Gegeben ist die Strecke 12, das heißt, die Basis c in bezug auf Länge und Höhenlage der Basisendpunkte 1 und 2. Die Basis c sei zunächst horizontal und daher die später zu behandelnde Höhendifferenz $h = 0$. Vom Punkte A aus wurden die Winkel α, β, γ gemessen. Gesucht sind die Strecken a und b sowie die Höhendifferenz H.

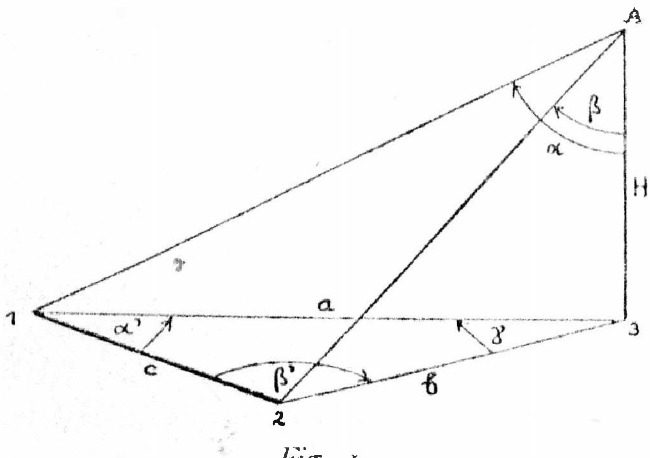

Fig. 1.

Bleibt der Horizontalwinkel γ konstant und ändern sich die Nadirdistanzen α und β, so wird sich damit die Höhe H ändern, die Seiten a und b bleiben sich gleich.

$$\frac{a}{H} = \operatorname{tg} \alpha \text{ oder } H = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} \qquad \text{1)}$$

$$\frac{b}{H} = \operatorname{tg} \beta \text{ oder } H = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta} \qquad \text{2)}$$

Durch Gleichsetzung folgt:

$$a \cdot \operatorname{tg}\beta = b \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

Diese Relation besteht immer, wie groß auch H sein mag.

In dem Basisdreieck ist folgende Beziehung zu erkennen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

aus Gleichung 3) folgt jedoch:

$$a = b\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \text{ und } b = a\,\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Setzt man diese Werte in Gleichung 4) ein, so ergeben sich folgende Gleichungen für a und b:

$$c^2 = a^2 + a^2\,\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha} - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \cos\gamma;$$

daraus folgt nach entsprechender Umformung

$$a^2 = \frac{c^2}{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta} \cdot \operatorname{tg}^2\alpha \quad \ldots \ldots \quad \mathrm{I})$$

anderseits ist:

$$c^2 = b^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta} + b^2 - 2\,b^2\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \cdot \cos\gamma;$$

woraus durch weitere Transformation folgt:

$$b^2 = \frac{c^2}{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta} \cdot \operatorname{tg}^2\beta \quad \ldots \ldots \quad \mathrm{II})$$

Wird in obigen Gleichungen I) und II) die Größe $c = 0$, das heißt, fallen die beiden Seitendreiecke $1\,A\,3$ und $2\,A\,3$ zusammen, so wird $\alpha = \beta$, weshalb die Ausdrücke für a^2 und b^2 unendlich vieldeutig werden. Diese Vieldeutigkeit geht anschaulich aus der Tatsache hervor, daß in dem neuentstandenen Dreiecke alle drei Winkel, jedoch keine Seiten gegeben sind.

Wird α, beziehungsweise $\beta = 0$, so rückt der Punkt A in eine und dieselbe Vertikalebene mit der Strecke c. Der Winkel γ wird $= 180^0$. Das Basisdreieck degeneriert somit zu einer Geraden, nämlich c. Da in diesem System nur c gegeben ist, so können a, b und H nicht bestimmt werden.

Wird α, beziehungsweise $\beta = 90^0$, so fällt A in eine horizontale Ebene, die zu jener Horizontalebene parallel ist, in der das Basisdreieck liegt. Daraus folgt, daß der Schnitt der Visuren von A aus mit den Basisseiten a und b erst in der Unendlichkeit eintritt, woraus die Unbestimmbarkeit des Systems resultiert.

Die angedeuteten drei Grenzfälle kommen für die praktische Verwendungsmöglichkeit der Methode nicht in Betracht.

Weiters können die beiden Winkel im Basisdreiecke α' und β' aus folgenden Relationen gefunden werden:

$$\sin\alpha' = \frac{a}{c}\sin\gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

$$\sin\beta' = \frac{b}{c}\sin\gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

Nach Einsetzung der Gleichungen I) und II) in die Gleichungen 5) und 6) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}}\cdot\operatorname{tg}\alpha \quad \ldots\ldots \quad \text{III)}$$

$$\sin\beta' = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}}\cdot\operatorname{tg}\beta \quad \ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

$\Sigma(\alpha' + \beta' + \gamma)$ muß natürlich gleich 180° sein.

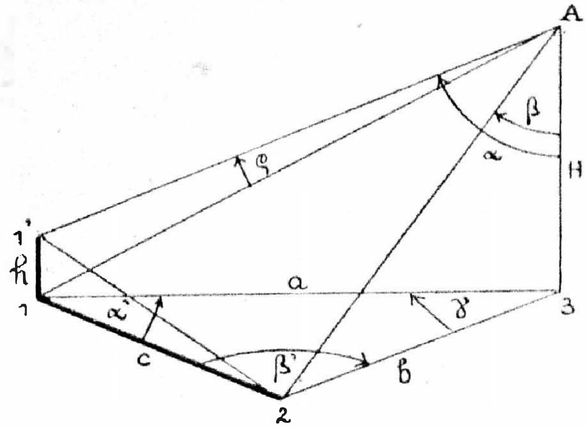

Fig. 2.

Schließt die Basis 1'2 gegen den Horizont einen Winkel ein und ist die Höhendifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Basis als h bekannt, so gelten folgende Relationen:

$$H - h = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

$$H = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

daraus folgt durch Gleichsetzung

$$a\operatorname{tg}\beta + h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = b\operatorname{tg}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Aus Gleichung 9) sind die Größen a und b in folgender Art darstellbar:

$$a = b\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} - h\operatorname{tg}\alpha$$

$$b = a\,\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} + h\operatorname{tg}\beta$$

Im Basisdreiecke liegt folgende Relation vor:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

nach entsprechender Einsetzung folgen als Werte für a und b die Ausdrücke:

$$a = -\frac{h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta - h\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma}{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{(h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta - h\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma)^2}{(\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta)^2} - \frac{h^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta - c^2\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}} \quad \text{V)}$$

$$b = -\frac{h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta\cos\gamma - h\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{(h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta\cos\gamma - h\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta)^2}{(\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta)^2} - \frac{h^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta - c^2\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}} \quad \text{VI)}$$

Für $h = 0$ geht Gleichung V) in I) und Gleichung VI) in II) über.

Die Bestimmung der Höhendifferenz des festzulegendes Punktes gegen einen oder beide Basisendpunkte erfolgt unter Benützung der Ausdrücke:

Für horizontale Basis: $H = a \operatorname{cotg} \alpha$ . . . . . VII)

$H = b \operatorname{cotg} \beta$ . . . . . VIII)

Für gegen den Horizont geneigte Basis: $H = a \operatorname{cotg} \alpha + h$ . . . IX)

$H = b \operatorname{cotg} \beta$ . . . . VIII)

Die Gleichung V) kann in eine für die Berechnung etwas zweckmäßigere Form übergeführt werden und nimmt sodann folgende Gestalt an:

$$a = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}\Big\{-h\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\cos\gamma) \pm$$
$$\pm\sqrt{c^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta) - h^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\sin^2\gamma}\Big\} \quad . . \quad \text{X)}$$

analog:

$$b = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}\Big\{-h\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta\cos\gamma - \operatorname{tg}\alpha) \pm$$
$$\pm\sqrt{c^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta) - h^2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\sin^2\gamma}\Big\} \quad . . \quad \text{XI)}$$

Da praktisch nur positive reelle Werte von Bedeutung sind, so sind folgende Bedingungen von Interesse:

1. Sollen a und b reelle Werte vorstellen, so muß:

$$\frac{c}{h} \geqq \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\sin\gamma}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}} \text{ sein} \quad . . . . \quad 10)$$

2. Soll a zugleich einen positiven Wert vorstellen, so muß neben der Bedingung 10) auch die Bedingung:

$$\frac{c}{h} \geqq \operatorname{tg}\beta \quad . . . . \quad 11)$$

erfüllt sein.

3. Soll b zugleich einen positiven Wert vorstellen, so muß neben der Bedingung 10) auch die Bedingung:

$$\frac{c}{h} \geqq \operatorname{tg}\alpha \quad . . . . \quad 12)$$

erfüllt sein.

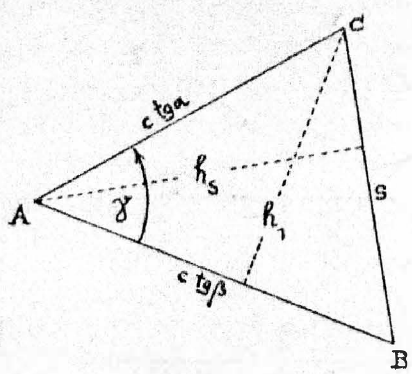

Fig. 3.

Hat in einem Dreiecke die eine Seite den Wert $c \operatorname{tg}\alpha$, die zweite Seite den Wert $c \operatorname{tg}\beta$ und wird von ihnen der Winkel γ eingeschlossen, so ist die 3. Seite:

$$s = \sqrt{c^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta)} \quad . . \quad 13)$$

welche als solche wesentlich positiv ist. Da man Gleichung 10) auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\frac{c^2}{h} \geqq \frac{c^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\sin\gamma}{\sqrt{c^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta)}} \quad . . \quad 14)$$

so kann man den Zähler in diesem Ausdruck:

$$c^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\sin\gamma = 2F \quad . . . . \quad 15)$$

setzen, wobei F die Fläche des oben genannten Dreieckes ABC bezeichnet.

Vor Berechnung der Werte von a und b ist es — wie bereits erwähnt — nötig, zuerst zu untersuchen, ob die notwendige Bedingung

$$\frac{c}{h} > \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \sin\gamma}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

erfüllt sei, da andernfalls eine reelle Lösung nicht möglich ist.

Bei praktischer Anwendung der geschilderten Methode im Hoch- oder Mittelgebirge bewegen sich die Winkel α und β etwa in dem Raum von 45° bis 70°, während der Winkel γ etwa die Werte von 20° bis 40° annehmen mag. Unter diesen für die Praxis wahrscheinlichen Fällen ist die Möglichkeit einer reellen Lösung fast außer Zweifel. Um sich jedoch hievon leicht vergewissern zu können, sind im nachfolgenden Tabellen gegeben, welche den zahlenmäßigen Wert des Ausdruckes:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \sin\gamma}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos\gamma + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

für verschiedene $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ und $\sin\gamma$, respektive $\cos\gamma$ enthalten. Die in den Tabellen auffindbare Zahl braucht nur mit dem Werte $\frac{c}{h}$ in oben angedeutetem Sinne verglichen zu werden, um die Gewißheit zum Ausdrucke zu bringen, ob eine reelle Lösung im jeweils vorliegenden Falle möglich sei oder nicht. — Es liegt ferner in der Natur der Sache, daß nur positive Werte von a und b in Betracht kommen.

$\cos\gamma = 0{\cdot}99$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·997	0·277	0·210	0·187	0·176	0·169
2	0·277	1·994	0·799	0·553	0·465	0·420
3	0·210	0·799	2·991	1·519	1·020	0·830
4	0·187	0·553	1·519	3·986	2·283	1·599
5	0·176	0·465	1·020	2·283	4·985	3·344
6	0·169	0·420	0·830	1·599	3·344	5·982

$\cos\gamma = 0{\cdot}98$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·995	0·383	0·294	0·263	0·247	0·238
2	0·383	1·990	1·072	0·766	0·649	0·588
3	0·294	1·072	2·985	1·963	1·392	0·603
4	0·263	0·766	1·963	3·980	2·967	2·145
5	0·247	0·649	1·392	2·967	4·975	4·025
6	0·238	0·588	0.603	2·145	4·025	5·970

$\cos\gamma = 0{\cdot}97$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·992	0·459	0·357	0·319	0·301	0·290
2	0·459	1·985	1·251	0·919	0·785	0·713
3	0·357	1·251	2·977	2·224	1·421	1·378
4	0·320	0·919	2·224	3·973	3·278	2·501
5	0·301	0·785	1·421	3·278	4·962	4·358
6	0·290	0·713	1·378	2·501	4·358	5·957

$\cos\gamma = 0{\cdot}96$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·990	0·520	0·408	0·367	0·356	0·333
2	0·520	1·979	1·381	1·040	0·923	0·816
3	0·408	1·381	2·970	2·400	1·115	1·560
4	0·367	1·040	2·400	3·959	3·473	2·762
5	0·356	0·923	1·115	3·473	4·950	4·555
6	0·333	0·816	1·560	2·762	4·555	5·940

$\cos\gamma = 0{\cdot}95$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·987	0·570	0·452	0·407	0·384	0·370
2	0·570	1·975	1·481	1·140	0·987	0·903
3	0·452	1·481	2·962	2·526	1·997	1·710
4	0·407	1·140	2·526	3·949	3·605	2·962
5	0·384	0·987	1·997	3·605	4·936	4·683
6	0·370	0·903	1·710	2·962	4·683	5·924

$\cos\gamma = 0{\cdot}94$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·985	0·613	0·490	0·443	0·419	0·404
2	0·613	1·970	1·560	1·226	1·068	0·980
3	0·490	1·560	2·955	2·621	2·125	1·838
4	0·443	1·226	2·621	3·939	3·701	3·122
5	0·419	1·068	2·125	3·701	4·925	4·773
6	0·404	0·980	1·838	3·122	4·773	5·910

$\cos\gamma = 0{\cdot}93$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·982	0·650	0·524	0·475	0·450	0·434
2	0·650	1·964	1·626	1·299	1·140	1·049
3	0·524	1·626	2·947	2·694	2·233	1·949
4	0·475	1·299	2·694	3·929	3·771	3·251
5	0·450	1·140	2·233	3·771	4·911	4·835
6	0·434	1·049	1·949	3·251	4·835	5·893

$\cos\gamma = 0{\cdot}92$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·980	0·682	0·555	0·505	0·478	0·462
2	0·682	1·960	1·680	1·364	1·204	1·111
3	0·555	1·680	2·939	2·752	2·323	2·047
4	0·505	1·364	2·752	3·919	3·825	3·359
5	0·478	1·204	2·323	3·825	4·899	4·882
6	0·462	1·111	2·047	3·359	4·882	5·879

$\cos\gamma = 0{\cdot}91$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·977	0·711	0·584	0·532	0·504	0·487
2	0·711	1·954	1·725	1·422	1·262	1·167
3	0·584	1·725	2·932	2·799	2·403	2·133
4	0·532	1·422	2·799	3·909	3·866	3·450
5	0·504	1·262	2·403	3·866	4·886	4·917
6	0·487	1·167	2·133	3·450	4·917	5·863

$\cos\gamma = 0{\cdot}90$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·975	0·737	0·610	0·557	0·529	0·511
2	0·737	1·949	1·763	1·474	1·314	1·219
3	0·610	1·763	2·924	2·837	2·471	2·210
4	0·557	1·474	2·837	3·899	3·899	3·653
5	0·529	1·314	2·471	3·899	4·874	4·943
6	0·511	1·219	2·210	3·653	4·943	5·848

$\cos\gamma = 0{\cdot}89$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·972	0·759	0·634	0·580	0·551	0·533
2	0·759	1·944	1·796	1·520	1·362	1·267
3	0·634	1·796	2·916	2·867	2·531	2·280
4	0·580	1·520	2·867	3·888	3·924	3·592
5	0·551	1·362	2·531	3·924	4·859	4·961
6	0·533	1·267	2·280	3·592	4·961	5·832

$\cos\gamma = 0{\cdot}88$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·969	0·781	0·656	0·602	0·573	0·554
2	0·781	1·939	1·824	1·561	1·407	1·312
3	0·656	1·824	2·908	2·893	2·584	2·397
4	0·602	1·561	2·893	3·878	3·944	3·648
5	0·573	1·407	2·584	3·944	4·847	4·975
6	0·554	1·312	2·397	3·648	4·975	5·817

$\cos\gamma = 0{\cdot}87$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·967	0·828	0·677	0·622	0·593	0·574
2	0·828	1·934	1·849	1·600	1·448	1·353
3	0·677	1·849	2·901	2·915	2·632	2·399
4	0·622	1·600	2·915	3·868	3·961	3·698
5	0·593	1·448	2·632	3·961	4·835	4·987
6	0·574	1·353	2·399	3·698	4·987	5·803

$\cos\gamma = 0{\cdot}86$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·964	0·817	0·696	0·642	0·612	0·593
2	0·817	1·929	1·870	1·634	1·486	1·392
3	0·696	1·870	2·893	2·933	2·673	2·451
4	0·642	1·634	2·933	3·858	3·973	3·741
5	0·612	1·486	2·673	3·973	4·822	4·993
6	0·593	1·392	2·451	3·741	4·993	5·786

$\cos\gamma = 0{\cdot}85$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·962	0·833	0·714	0·660	0·630	0·610
2	0·833	1·923	1·889	1·665	1·520	1·428
3	0·714	1·889	2·885	2·947	2·710	2·504
4	0·660	1·665	2·947	3·846	3·981	3·777
5	0·630	1·520	2·710	3·981	4·8[illegible]8	4·997
6	0·610	1·428	2·504	3·777	4·997	5·770

$\cos\gamma = 0{\cdot}84$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·959	0·847	0·731	0·677	0·647	0·627
2	0·847	1·918	1·905	1·695	1·553	1·462
3	0·731	1·905	2·878	2·960	2·744	2·542
4	0·677	1·695	2·960	3·837	3·989	3·810
5	0·647	1·553	2·744	3·990	4·796	5·060
6	0·627	1·462	2·542	3·810	5·000	5·755

$\cos\gamma = 0{\cdot}83$

tg α / tg β	1	2	3	4	5	6
1	0·957	0·861	0·747	0·693	0·663	0·644
2	0·861	1·913	1·920	1·721	1·584	1·494
3	0·747	1·920	2·870	2·970	2·774	2·582
4	0·693	1·721	2·970	3·827	3·994	3·839
5	0·663	1·584	2·774	3·994	4·783	5·000
6	0·644	1·494	2·582	3·839	5·000	5·739

$\cos\gamma = 0{\cdot}82$

$\operatorname{tg}\alpha$ / $\operatorname{tg}\beta$	1	2	3	4	5	6
1	0·954	0·873	0·762	0·709	0·678	0·659
2	0·873	1·908	1·932	1·746	1·613	1·524
3	0·762	1·932	2·862	2·978	2·800	2·619
4	0·709	1·746	2·978	3·816	3·998	3·864
5	0·678	1·613	2·800	3·998	4·770	4·999
6	0·659	1·524	2·619	3·864	4·999	5·724

$\cos\gamma = 0{\cdot}81$

$\operatorname{tg}\alpha$ / $\operatorname{tg}\beta$	1	2	3	4	5	6
1	0·951	0·884	0·776	0·723	0·693	0·674
2	0·884	1·903	1·943	1·768	1·639	1·552
3	0·776	1·943	2·854	2·984	2·824	2·652
4	0·723	1·768	2·984	3·805	3·999	3·885
5	0·693	1·639	2·824	3·999	4·756	4·996
6	0·674	1·552	2·652	3·885	4·996	5·708

$\cos\gamma = 0{\cdot}80$

$\operatorname{tg}\alpha$ / $\operatorname{tg}\beta$	1	2	3	4	5	6
1	0·949	0·894	0·789	0·737	0·707	0·688
2	0·894	1·897	1·952	1·789	1·664	1·579
3	0·789	1·952	2·847	2·990	2·846	2·683
4	0·737	1·789	2·990	3·795	4·000	3·905
5	0·707	1·664	2·846	4·000	4·743	4·992
6	0·688	1·579	2·683	3·905	4·992	5·692

$\cos\gamma = 0{\cdot}79$

$\operatorname{tg}\alpha$ / $\operatorname{tg}\beta$	1	2	3	4	5	6
1	0·946	0·904	0·802	0·750	0·721	0·701
2	0·904	1·892	1·961	1·808	1·688	1·604
3	0·802	1·961	2·838	2·994	2·866	2·712
4	0·750	1·808	2·994	3·784	3·999	3·921
5	0·721	1·688	2·866	3·999	4·730	4·987
6	0·701	1·604	2·712	3·921	4·987	5·676

$\cos\gamma = 0{\cdot}78$

$\operatorname{tg}\alpha$ / $\operatorname{tg}\beta$	1	2	3	4	5	6
1	0·943	0·913	0·814	0·763	0·733	0·714
2	0·913	1·887	1·968	1·826	1·709	1·628
3	0·814	1·968	2·831	2·997	2·883	2·738
4	0·763	1·826	2·997	3·774	3·998	3·936
5	0·733	1·709	2·883	3·998	4·717	4·982
6	0·714	1·628	2·738	3·936	4·982	5·661

$\cos\gamma = 0{\cdot}77$

$\operatorname{tg}\alpha$ / $\operatorname{tg}\beta$	1	2	3	4	5	6
1	0·941	0·921	0·825	0·775	0·746	0·727
2	0·921	1·881	1·974	1·842	1·730	1·650
3	0·825	1·974	2·822	2·999	2·899	2·763
4	0·775	1·842	2·999	3·763	3·995	3·948
5	0·746	1·730	2·899	3·995	4·703	4·975
6	0·727	1·650	2·763	3·948	4·975	5·644

$\cos\gamma = 0{\cdot}76$

$\operatorname{tg}\alpha$ / $\operatorname{tg}\beta$	1	2	3	4	5	6
1	0·938	0·928	0·836	0·787	0·758	0·739
2	0·928	1·876	1·980	1·857	1·749	1·672
3	0·836	1·980	2·814	3·000	2·913	2·785
4	0·787	1·857	3·000	3·752	3·992	3·959
5	0·758	1·749	2·913	3·992	4·690	4·968
6	0·739	1·672	2·785	3·959	4·968	5·628

II.

Anwendung der Methode. Näherungsverfahren.

In der Natur wird die Basis des Systems wohl in den seltensten Fällen genau horizontal liegen können, sondern die Basisendpunkte werden gewöhnlich eine Höhendifferenz gegen einander aufweisen. Namentlich im Hochgebirge, wo beispielsweise die Basis in einem tief eingeschnittenen Tale zu liegen kommt, das selbst gegen den Talschluß hin aufsteigt, wird sich eine entsprechende Höhendifferenz zwischen den beiden Basisendpunkten ergeben.

Sobald die Basis bekannt oder hinsichtlich ihrer Länge und der Höhendifferenz ihrer Endpunkte festgelegt ist, kann an die Winkelmessung im festzulegenden Punkte geschritten werden. Sodann bedient man sich zur Distanz- und Höhendifferenzbestimmung der bereits bekannten Formeln.

Vom Punkte A aus wurden — wie gesagt — der Winkel α, Winkel β und Winkel γ gemessen. Könnte man den $\sphericalangle$ $(\alpha-\varrho)$, das heißt, jenen Winkel ermitteln, der zustande käme, wenn man nicht auf den tatsächlichen Basisendpunkt $1'$, sondern auf dessen Horizontalprojektion 1 visieren würde, so könnte man sich zur Berechnung der einfacheren Formeln I und II bedienen.

In diesem Falle müßte in den Formeln I und II die Funktion von $\sphericalangle\alpha$ durch jene von $\sphericalangle$ $(\alpha-\varrho)$ ersetzt werden.

$$\frac{a}{H-h} = \operatorname{tg}\alpha; \qquad \frac{a}{H} = \operatorname{tg}(\alpha-\varrho)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\varrho) = \frac{H-h}{H} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \frac{h}{H}\operatorname{tg}\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; 16)$$

Das Näherungsverfahren, dessen Rechnungsgang im folgenden gezeigt wird, eignet sich natürlich speziell für jene Fälle, in denen die Höhendifferenz h einen relativ kleinen Wert vorstellt. Zunächst werden nach den Formeln I und II die Distanzen a und b und die Höhe H provisorisch bestimmt unter der Voraussetzung, daß $h = 0$ sei. Darauf setzt man die gewonnene Höhe H in die Hilfsformel 16 ein und rechnet den Winkel $(\alpha - \varepsilon)$ aus. Diesen Winkel $(\alpha - \varepsilon)$ setzt man in die Gleichung I und II an Stelle von $\sphericalangle \alpha$ ein, wodurch man einen der Wahrheit bereits näherstehenden Wert von a, b und H bestimmen kann. Dieses Verfahren kann einigemale durchgeführt werden. Für einen kleinen Wert von h genügt oft schon die zweite Näherung.

Beispiel für das Näherungsverfahren:

Durch eine Aufnahme in der Natur haben sich beispielsweise folgende Felddaten ergeben.

$$
\begin{aligned}
c &= 237{\cdot}53^{m} & \log c &= 2{\cdot}375\,7331 \\
h &= 12{\cdot}78^{m} & \log h &= 1{\cdot}106\,5309 \\
\alpha &= 52^{0}\,17'\,20'' & \log \operatorname{tg} \alpha &= 0{\cdot}111\,7095 \\
\beta &= 61^{0}\,01'\,10'' & \log \operatorname{tg} \beta &= 0{\cdot}526\,5957 \\
\gamma &= 29^{0}\,13'\,20'' & \log \cos \gamma &= 9{\cdot}940\,8813
\end{aligned}
$$

Erste Annahme: $h = 0$

$$a^2 = \frac{c^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \gamma + \operatorname{tg}^2 \beta} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$b^2 = \frac{c^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cos \gamma + \operatorname{tg}^2 \beta} \cdot \operatorname{tg}^2 \beta$$

Setzt man obige Werte in die Formeln ein, so folgt:

$a = 331{\cdot}94^{m}$ gegen die Wahrheit $a = 307{\cdot}62^{m}$
$b = 463{\cdot}38^{m}$ gegen die Wahrheit $b = 452{\cdot}51^{m}$
$H = 256{\cdot}65^{m}$ gegen die Wahrheit $H = 250{\cdot}63^{m}$

Erste Näherung:
$$\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{h}{H} \operatorname{tg} \alpha.$$

Nach Einsetzung der entsprechenden Werte von α, h und $H = 256{\cdot}65^{m}$ erhält man: $(\alpha - \varepsilon) = 50^{0}\,51'\,51''$.

Setzt man in Formel I und II den Wert $(\alpha - \varepsilon) = 50^{0}\,51'\,51''$ an Stelle von α ein, so folgt als Resultat:

$a = 308{\cdot}19^{m}$ gegen die Wahrheit $a = 307{\cdot}62^{m}$
$b = 452{\cdot}78^{m}$ gegen die Wahrheit $b = 452{\cdot}51^{m}$
$H = 250{\cdot}78^{m}$ gegen die Wahrheit $H = 250{\cdot}63^{m}$

Zweite Näherung:
$$\operatorname{tg}(\alpha - \varepsilon) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{h}{H} \operatorname{tg} \alpha;$$

Einsetzung der Werte: $\alpha = 52^{0}\,17'\,20''$ $h = 12{\cdot}78^{m}$ und $H = 250{\cdot}78^{m}$.

Daher folgt für: $(\alpha - \varepsilon) = 50^{0}\,49'\,47''$ und es ergeben sich nach Anwendung der Formeln I und II die Werte:

$a = 307{\cdot}65^{m}$ gegen die Wahrheit $307{\cdot}62^{m}$
$b = 452{\cdot}55^{m}$ gegen die Wahrheit $452{\cdot}51^{m}$
$H = 250{\cdot}65^{m}$ gegen die Wahrheit $250{\cdot}63^{m}$

Durch weitere Näherungsrechnung läßt sich die Genauigkeit der Uebereinstimmung noch weiter steigern.

III.

Kartierung der gerechneten Daten.

Die Verwendung der rechnungsmäßig gewonnenen Daten für a und b, sowie H kann direkt statthaben, indem man die Seiten a und b über der Basis c zum Schnitt bringt oder man bedient sich der Winkelwerte α' und β', um sodann diese beiden Winkel von den Basisendpunkten aus aufzutragen.

Man kann sich jedoch auch der berechneten und gegebenen Daten: $a, b, H, c, \alpha, \beta, \gamma, \alpha' \beta'$ bedienen, um bei gegebenen Koordinaten der Basisendpunkte die Koordinaten des festzulegenden Punktes aus denselben hervorgehen zu lassen.

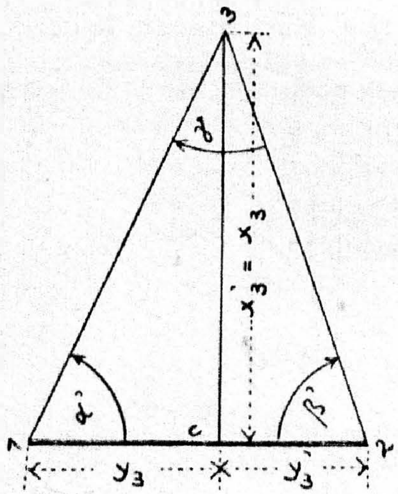

Fig. 4.

Aus dem Dreiecke 1 3 4 werden die auf den Punkt 1 als Anfangspunkt des relativen Koordinatensystemes bezogenen Größen x_3 und y_3 dargestellt:

$$x_3 = \frac{2}{c} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \quad \ldots\ldots \text{XII)}$$

$$y_3 = \sqrt{a^2 - \frac{4}{c^2} \cdot s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \quad \text{XIII)}$$

Aus dem Dreiecke 4 3 2 werden die auf den Punkt 2 als Anfangspunkt des relativen Koordinatensystems bezogenen Größen x'_3 und y'_2 dargestellt:

$$x'_3 = \frac{2}{c} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{XII)}$$

$$y'_3 = \sqrt{b^2 - \frac{4}{c} \cdot s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \quad \ldots\ldots \text{XIV)}$$

wobei $s = \frac{a+b+c}{2}$ bedeutet.

Will man die Koordinaten des Punktes 3 in bezug auf ein Hauptkoordinatensystem, durch dessen Koordinaten die Punkte 1 und 2 bestimmt sind, kennen lernen, so bedarf es bekanntlich einer additiven Transformation und einer Drehung des Systems.

Die bezüglichen allbekannten Formeln sind:

$$X'_3 = x_3 + X_1$$
$$Y'_3 = y_3 + Y_1$$

wobei X_1 und Y_1 die Koordinaten des Punktes 1 bedeuten.

Analog:

$$X'_3 = x'_3 + X_2$$
$$Y'_3 = y'_3 + Y_2$$

wobei X_2 und Y_2 die Koordinaten des Punktes 2 bedeuten.

Will man das in bezug auf die Hauptkoordinatenlängen reduzierte System in die richtige Lage drehen, so gelten folgende ebenfalls bekannte Formeln:

$$X_3 = (x_3 + X_1) \cos\mu - (y_3 - Y_1) \sin\mu$$
$$Y_3 = (y_3 + Y_1) \cos\mu - (x_3 + X_1) \sin\mu$$

Die absolute Höhe des Punktes A wird durch Berechnung von H und Addition dieser Größe zu der absoluten Höhe des Punktes 1, beziehungsweise 2 ermittelt.

IV.

Lösung des Problems auf konstruktivem Wege.

Unter Voraussetzung des einfacheren Falles, daß nämlich die Basis horizontal sei, denkt man sich in jedem der beiden Basisendpunkte die Mantelfläche eines Kegels mit lotrechter Rotationsaxe aufgerichtet, dessen Erzeugende gegen den Horizont im einen Falle den Winkel $(90^0-\alpha)$, im anderen Falle den Winkel $(90^0-\beta)$ einschließt. Diese beiden Kegelmantelflächen durchdringen sich. — Konstruiert man die Durchdringungskurve, so erhält man den geometrischen Ort jener Punkte, von denen aus die Nadirdistanzen gegen 1 und 2 gleich α, beziehungsweise β sind. Unter Benützung des Horizontalwinkels γ wird nun ein zweiter geometrischer Ort geschaffen, indem man sich eine, die Basisendpunkte enthaltende Zylindermantelfläche mit lotrechter Rotationsaxe errichtet denkt. Die Horizontalprojektion dieser Zylindermantelfläche ist ein Kreis, der auf folgende bekannte Art konstruiert wird.

Man zieht durch den einen Basisendpunkt eine Gerade, die mit der Basis den Winkel γ einschließt. In dem gleichen Basisendpunkte errichtet man auf die neue Gerade eine Normale, die eine zweite, im Halbierungspunkt der Basis errichtete Normale im Zentrum des zu konstruierenden Kreises schneidet.

Jener Punkt, in welchem die Kegelmanteldurchdringungskurve die Zylindermantelfläche durchstößt, ist derjenige, der allen geforderten Bedingungen entspricht.

Die praktische Durchführung erfolgt am einfachsten mit Hilfe der «kotierten Projektion». Man legt in bestimmten Koten Niveauebenen, welche die Kegelmantelflächen in Kreisen schneiden. Die Kreise schneiden sich in je zwei Punkten. Die Gesamtheit dieser Schnittpunkte bildet die Durchdringungskurve. Die Durchdringungskurve stößt an zwei Punkten durch die Zylindermantelfläche, welcher Vorgang sich in der Horizontalprojektion in Form von Schnitten zwischen Durchdringungskurve und Kreis darstellt. Diese scheinbare Zweideutigkeit der Lösung verschwindet jedoch vor der Ueberlegung, daß nur der eine Schnittpunkt gegen die Basisendpunkte den Winkel γ, der zweite aber den Winkel $180^0-\gamma$ aufweist — aus welchem Grunde die zweite Lösung nicht in Betracht kommt.

Der zweite, in der Rechnung bedeutend kompliziertere Fall, daß nämlich die Basispunkte gegeneinander einen Höhenunterschied aufweisen, ruft in der konstruktiven Lösung nur eine geringfügige Komplikation hervor. Man denkt sich wieder in den Basisendpunkten Kegelmantelflächen mit lotrechter Rotationsaxe errichtet. Die Spitzen der Kegel liegen aber in verschiedener Höhe und es handelt sich daher um die Konstruktion der Verschneidungslinie zweier ungleich hoch liegender Kegelmäntel mit lotrechten Rotationsaxen. Die Konstruktion erfolgt in ähnlich einfacher Weise wie im ersten Falle.

Der Vorgang bei der Konstruktion ist folgender: Man zeichnet die Basis c in einem bestimmten Verjüngungsmaßstabe und konstruiert den Kreis um das Zentrum o unter bekannter Zuhilfenahme des Winkels γ. Sodann versinnbildlicht man in einem Aufriß den Schnitt der Kegelmantelflächen durch die Niveauebenen, indem man über dem Horizonte $\mathfrak{J}\mathfrak{J}'$ zum Beispiel den $\sphericalangle(90^0 - \alpha)$ in der Höhe h und den $\sphericalangle(90^0 - \beta)$ in der Höhe $h = 0$ aufträgt. Die auf der senkrechten Axe $k\,k'$ aufgetragenen Koten schneiden die beiden winkelbildenden Halbstrahlen, wodurch in den verschiedenen Niveauebenen die Radien der Schnittkreise in wahrer Größe erscheinen. Diese Radien werden sodann zur Konstruktion der Kegelmantelverschneidungskurve verwendet. Diese Kurve schneidet den bereits konstruierten Kreis in zwei Punkten, von denen jener in Betracht kommt, von dem aus der Horizontalwinkel $= \gamma$ ist.

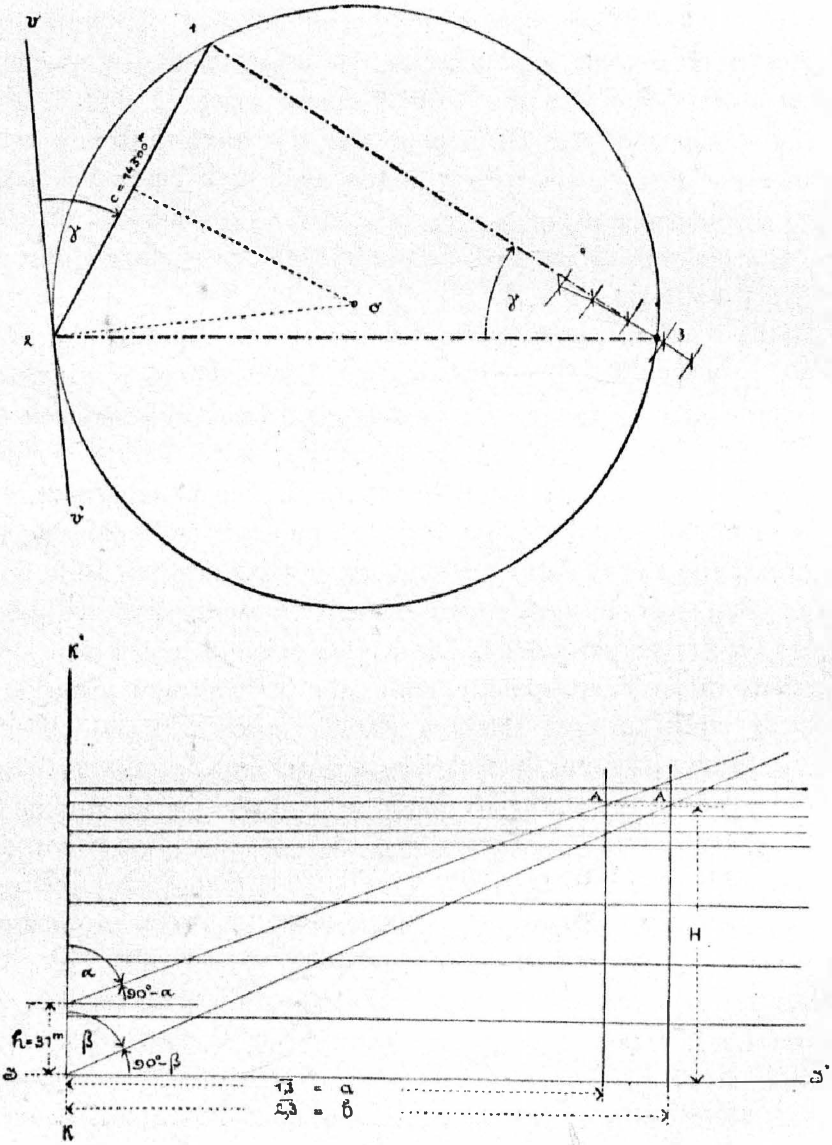

Fig. 5.

Die Abstände vom festgelegten Punkte 3 (d. i. die Horizontalprojektion von A) zu den beiden Basisendpunkten stellen die Distanzen a und b in jenem Verjüngungsmaßstabe dar, in welchem die Basis gezeichnet wurde. Ueberträgt man diese Distanzen in den Aufriß auf die Axe $\mathfrak{J}\mathfrak{J}'$ und errichtet man in den

Endpunkten Normale, welche die bewußten Halbstrahlen schneiden, so müssen die zum Vorschein kommenden Höhen H, beziehungsweise $H-h$ als solche oder nach Addition von h gleich sein.

Im Aufriß sind also die Distanzen a und b (einfach bestimmt) und die Höhe des Punktes A (doppelt bestimmt) in ihrer wahren Maßstabgröße ersichtlich.

Diese Konstruktion kann auch auf dem Meßtische in Anwendung gebracht werden, wenn man einen Zirkel mit hinreichend großer Oeffnung und einen genauen Winkeltransporteur zur Verfügung hat und soferne die Kippregel mit einem Höhenkreis oder Höhenbogen ausgestattet ist.

Über die Abteilung von Grundstücken auf Bauplätze.

Von **Johann Beran**, k. k. Obergeometer in Mödling bei Wien.

Durch die Aufhebung der Teilungsbeschränkungen*) ist die im § 16 des Gesetzes vom 6. Februar 1869, R.-G.-Bl. Nr. 18 über das Verfahren bei grundbücherlicher Zerteilung einer Liegenschaft vorgesehene politische Bewilligung zur Grundtrennung entfallen. Nur beim Gemeindebesitz ist die Genehmigung des Landesausschusses erforderlich, als eine Veräußerung geplant ist.

Ansonsten, mit Ausnahme der Aufteilung der Wälder (§ 21 Forstgesetz), unterliegt der Eigentümer keinen gesetzlichen Schranken, wenn er seinen Besitz zerteilen will.

Die Teilung eines Gutskörpers in zahllose kleine Grundbuchskörper (neue Grundbuchseinlagen) wird jedoch nur dann gestattet, wenn Änderungen in den Eigentumsverhältnissen, in der pfandrechtlichen Belastung eintreten, kurz gesagt, wenn es das wirtschaftliche Interesse des Eigentümers erfordert.

Für die Errichtung von Neubauten, besonders Wohngebäuden, werden durch die Bauordnungen Anforderungen an die Form und Größe der Baustellen gestellt, die bei dem Anwachsen der Städte und Ortschaften die Errichtung gesunder und angenehmer Wohnungen für alle Bevölkerungsklassen bezwecken.

Nach Maßgabe der in den einzelnen Ländern bestehenden Bauordnungen kann die Parzellierung oder Unterabteilung von Grundflächen auf Bauplätze im Grundbuche nur dann durchgeführt werden, wenn und insoweit die baubehördliche Bewilligung dazu vorliegt. Die genaue Beobachtung dieses Grundsatzes ist umsomehr geboten, als sonst nicht nur die öffentlichen Interessen gefährdet werden, sondern auch Parteien, die solche Trennstücke als Bauplätze kaufen, dann aber nicht die Baubewilligung erhalten, zu Schaden kommen könnten.

Die Gerichte in Niederösterreich wurden mit Erlaß des Oberlandesgerichtspräsidiums Wien vom 9. Juli 1890, Z. 4008, an die diesbezüglich maßgebenden Bestimmungen der §§ 1, 6, 11 B.-O. für Niederösterreich und §§ 3, 105 B.-O. für Wien erinnert; desgleichen wurden die k. k. Vermessungsbeamten mittelst Erlasses der k. k. n.-ö. Finanz-Landes-Direktion in Wien vom 19. August 1900, Z. 37.138,

*) Solche Beschränkungen bestehen nur mehr in Tirol und in der Bukowina (siehe Jahrgang 1909 der Zeitschrift, Seite 375).