Graphische Ausgleichung der vermittelnden, bedingten und anderen mehr komplizierten Beobachtungen

Kaspar Weigel [1]

[1] *Adjunkt an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **8** (10, 11), S. 328–337, 355–363

1910

Graphische Ausgleichung der vermittelnden, bedingten und anderen mehr komplizierten Beobachtungen.

Von Dr. **Kaspar Weigel**, Adjunkt an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg.

Einleitung.

Bis zum heutigen Tage ist noch allgemein die Meinung verbreitet, daß die strenge graphische Ausgleichung der rechnerisch durchgeführten weit nachstehe.*) Und wirklich, obgleich die Literatur der strengen graphischen Ausgleichung ziemlich bedeutend ist und vom theoretischen Standpunkte manche interessante Probleme aufweist, kann doch kein graphisches Ausgleichungsverfahren mit der «rechnenden Methode d. kl. Q.» konkurrieren.

Der hauptsächlichste Mangel aller graphischen Ausgleichungen besteht darin, daß sie bei Beobachtungen, die mit Hilfe von Normalgleichungen mit mehr als zwei Unbekannten ausgeglichen werden, im allgemeinen versagen. Zwar kann die Ausgleichung beim mehrfachen Rückwärts- und kombinierten Einschneiden doch auf graphischem Wege durchgeführt werden, bei der also Normalgleichungen mit drei Unbekannten vorkommen, es wird jedoch dadurch keine Zeitersparnis erlangt, da man die Ausgleichung zweimal vornehmen muß. Außerdem beziehen sich alle diese Ausgleichungsarten lediglich auf die trigonometrische Punktbestimmung durch Einschneiden.

Die vorliegende Abhandlung setzt uns in den Stand, alle Ausgleichungen, die auf Auflösungen von Normalgleichungen mit beliebig vielen Unbekannten basieren, graphisch zu behandeln.

Dazu sei bemerkt, daß die Genauigkeit der Bestimmung sowohl der Unbekannten, sowie ihrer Gewichte u. dgl. beliebig gesteigert werden kann.

Infolgedessen kann dieses graphische Verfahren mit der «rechnenden Methode der kleinsten Quadrate» nicht nur konkurrieren, sondern übertrifft auch dieselbe an Schnelligkeit der Ausführung und, was besonders hervorzuheben ist, auch an Genauigkeit der erhaltenden Resultate.

I. Der Gauss'sche Algorithmus in graphischer Darstellung.

Den Schwerpunkt der Ausgleichung vermittelnder, bedingter und anderer mehr komplizierter Beobachtungen bildet immer die Auflösung der auf Grund der Annahme $[p\delta\delta] = \min.$ aufgestellten Normalgleichungen. Meistens werden auch die Gewichte der die Normalgleichungen befriedigenden Unbekannten verlangt, wie es z. B. bei den vermittelnden Beobachtungen der Fall ist.

Um solche Beobachtungen auf graphischem Wege ausgleichen zu können, muß man Normalgleichungen von beliebiger Anzahl der Unbekannten oder irgend ein ihnen gleichwertiges und vollständig äquivalentes System von Gleichungen graphisch darstellen.

Der Einfachheit halber werde ich die Koeffizienten der Normalgleichungen in der Form: $[aa]$, $[ab]$, ... schreiben, wobei zu bemerken ist, daß bei Be-

*) Vergleich: Handbuch d. Vermessungskunde von Dr. W. Jordan, Stuttgart 1904, 2. Bd., S. 378.

obachtungen mit ungleichen Gewichten dieselben zu berücksichtigen sind und zwar bei vermittelnden Beobachtungen in der Form: $[paa]$, $[pab]$ . . . ., bei bedingten Beobachtungen in der Form: $\left[\frac{aa}{p}\right]$, $\left[\frac{ab}{p}\right]$ . . . .

Nehmen wir also in Betracht r Normalgleichungen mit r Unbekannten beispielsweise in der Form, wie sie bei vermittelnden Beobachtungen vorkommen:

$$\begin{aligned}
&[aa]x+[ab]y+[ac]z+\ldots\ldots+[al]=0\\
&[ab]x+[bb]y+[bc]z+\ldots\ldots+[bl]=0\\
&[ac]x+[bc]y+[cc]z+\ldots\ldots+[cl]=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[ar]x+[br]y+[cr]z+\ldots\ldots+[rl]=0
\end{aligned}$$

und überlegen, wie man dieses Gleichungssystem graphisch darstellen könnte.

Drei Gleichungen von ebensolcher Form nur mit drei Unbekannten bestimmen uns die Lage des Punktes im Raume. Stellen wir uns aber einen Raum von r Dimensionen vor, d. h. einen Raum, in dem man imstande wäre, in einem Punkte r zu einander gegenseitig Senkrechte zu konstruieren, so bestimmen uns in einem solchen Raume r Normalgleichungen auch die Lage des Punktes von den Koordinaten: x, y, z usw. Nach der Elimination der ersten Unbekannten verfügen wir über $r-1$ lineare Gleichungen, die uns wieder die Lage desselben Punktes, aber im Raume von $r-1$ Dimensionen bestimmen.

Durch die Elimination einer Unbekannten haben wir im Sinne der analytischen Geometrie die Projektion eines Punktes im Raume von r Dimensionen auf einen Raum von $r-1$ Dimensionen ausgeführt.

Schließlich befinden wir uns nach Elimination von $r-1$ Unbekannten in einem Raume von nur einer Dimension und erhalten die letzte Koordinate desselben Punktes in Form von einer Strecke.

Wir können jedoch jedes System von r Normalgleichungen durch r Gleichungen von der Form der Fehlergleichungen, aber mit $\delta=0$, ersetzen und so ein Gleichungssystem wird als der gegebenen Beobachtungsreihe und deren Normalgleichungssysteme vollständig äquivalent bezeichnet.*)

Ein obiger Definition unterliegendes System bildet demgemäß auch das System der reduzierten Normalgleichungen, welches für die Auflösung der Normalgleichungen von großer Wichtigkeit ist.

So ein System, der Einfachheit halber nur für drei Unbekannte, lautet:

$$\begin{aligned}
x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z+\frac{[al]}{[aa]}&=0 \text{ m. Gewicht } [aa]\\
y+\frac{[bc.1]}{[bb.1]}z+\frac{[bl.1]}{[bb.1]}&=0 \text{ m. Gewicht } [bb.1]\\
z+\frac{[cl.2]}{[cc.2]}&=0 \text{ m. Gewicht } [cc.2],
\end{aligned}$$

wobei man die Glieder $-\frac{[al]}{[aa]}, -\frac{[bl.1]}{[bb.1]}, -\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$ als unabhängige fingierte Beobachtungswerte mit den Gewichten: $[aa]$, $[bb.1]$, $[cc.2]$ ansehen kann.

*) Ausgleichungsrechnung n. d. M. d. kl. Q. v. F. R. Helmert, Leipzig u. Berlin. Verlag v. Teubner 1907. S. 213.

Da beim Gauss'schen Algorithmus reduzierte Normalgleichungen die Hauptrolle spielen, sah ich mich bestimmt, nicht gerade Normalgleichungen, sondern eben reduzierte Normalgleichungen graphisch darzustellen.

Jede reduzierte Normalgleichung stellt im Raume von so viel Dimensionen, wie viel Unbekannte sie besitzt, ein der Ebene im Raume von drei Dimensionen entsprechendes Gebilde vor, bis schließlich bei der letzten reduzierten Normalgleichung die Ebene des Raumes zu einem Punkte zusammenschrumpft.

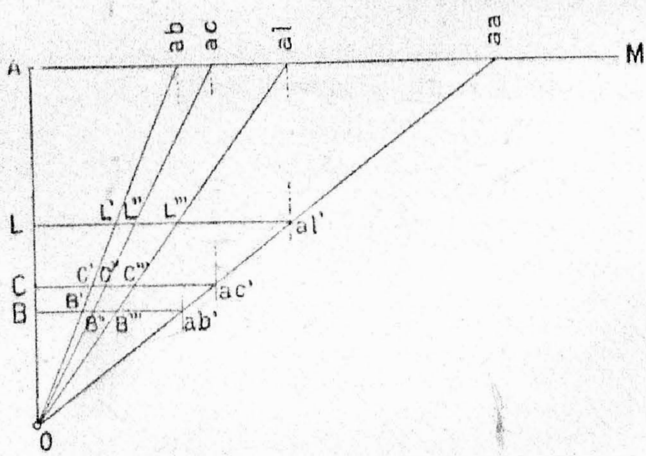
Da wir nun alle Unbekannten rückgänglich bestimmen können, mag uns erlaubt sein, reduzierte Normalgleichungen als Gleichungen von nur einer Unbekannten, nämlich der freistehenden zu betrachten. Jede so aufgefaßte reduzierte Normalgleichung stellt uns einzelne Strecken vor, welche als Zahlen betrachtet und mit gewissen einstweilen noch unbekannten Größen multipliziert, nach vollbrachter Addition uns den numerischen Wert der freistehenden Unbekannten mit negativem Vorzeichen liefern. Diese Darstellung der reduzierten Normalgleichungen eben, ergänzt noch durch eine Hilfskonstruktion, werden wir in vorliegender Arbeit anwenden.

Die einfachste und zugleich am meisten übersichtliche graphische Darstellung reduzierter Normalgleichungen, z. B. mit drei Unbekannten, wäre folgendermaßen:

Auf einer Geraden AM, vom Punkte A an, werden die den Koeffizienten $[ab]$, $[ac]$, $[al]$ und $[aa]$ entsprechenden Strecken im passenden Maßstabe aufgetragen*) und zugleich die Endpunkte der Strecken mit entsprechenden Koeffizienten bezeichnet, wobei die Vorzeichen derselben berücksichtigt werden müssen (vide Fig. 1).

Fig 1.

a.



*) Anmerkung: Da wir in den Normalgleichungen nur mit absoluten Zahlen zu tun haben, kann von einem Maßstabe eigentlich keine Rede sein; um jedoch bei unseren Konstruktionen ein vergleichendes Maß zu haben, habe ich angenommen, daß dann eine Zahl als Strecke im Maßstabe 1 : 1 aufgetragen wurde, wenn ihren Einern Zentimeter auf der Strecke entsprechen.

Hierauf wählen wir einen beliebigen Punkt O auf der im Punkte A errichteten Normalen, senken von den Punkten $[ab]$, $[ac]$ und $[al]$ Normalen bis zu den Durchschnittspunkten mit der Geraden $\overline{O[aa]}$, projizieren die so erhaltenen Punkte $[ab]'$ $[ac]'$ und $[al]'$ parallel zur Richtung $\overline{AM}$ auf die Strecke $\overline{OA}$ und erhalten auf diese Weise die Punkte B, C und L.

Da die Strecke $\overline{OA}$ als eine Zahl von der Größe 1 angesehen werden kann, so stellen uns die Strecken $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ und $\overline{OL}$ in dem für die Strecke $\overline{OA}$ benutzten Maßstabe auch Zahlen vor, die den Koeffizienten der ersten reduzierten Normalgleichung entsprechen, was leicht aus der Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke bewiesen werden kann.

Diese erste Konstruktion benennen wir mit dem Buchstaben «a», weil bei ihr die Hauptrolle der Koeffizient $[aa]$ spielt.

Um auch alle zur Bildung der Koeffizienten der übrigen reduzierten Normalgleichungen nötigen Ausdrücke in Form von Strecken zu erhalten, verbinden wir die Punkte $[ab]$, $[ac]$ und $[al]$ mit dem Punkte O und ermitteln die Durchschnittspunkte $B'\,B''\,B'''$, $C'\,C''\,C'''$, $L'\,L''\,L'''$ dieser Geraden mit den Geraden $B\,[ab]'$, $C\,[ac]'$ und $L\,[al]'$.

Alle für die Bildung der Koeffizienten der übrigen reduzierten Normalgleichungen nötigen Ausdrücke erscheinen dann in Form von Strecken: $\overline{BB'}$ $\overline{BB''}$ $\overline{BB'''}$, $\overline{CC'}$ $\overline{CC''}$ $\overline{CC'''}$, $\overline{LL'}$ $\overline{LL''}$ $\overline{LL'''}$ und zwar, wie man sieht, mit Ausnahme der quadratischen Ausdrücke mit Kontrolle.

So wird z. B. der Ausdruck $\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$ auf zweifache Weise dargestellt, nämlich durch die Strecke $\overline{BB''}$ oder $\overline{CC'}$, wie man leicht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$\triangle\, AO[ac] \backsim \triangle\, BOB''$$

und

$$\triangle\, AO[ab] \backsim \triangle\, COC'$$

bei Berücksichtigung, daß $\overline{OA} = 1$, ersieht. Die so erhaltenen Strecken werden in dem für die Koeffizienten $[aa]$, $[ab]$ benutzten Maßstabe abgelesen.

Hierauf wird auf ganz analoge Weise die zweite reduzierte Normalgleichung dargestellt.

Auf einer Geraden $A_1\,M_1$ werden die Koeffizienten der zweiten Normalgleichung mit Ausnahme der ersten von A_1 aus aufgetragen, hierauf wird der Punkt O_1 auf der im Punkte A_1 errichteten Normalen in der Entfernung $A_1\,O_1 = A\,O = 1$ gewählt. Um schließlich die graphische Darstellung der zweiten reduzierten Normalgleichung

$$y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\,z + \frac{[cl.1]}{[bb.1]} = 0$$

zu erhalten, bilden wir Strecken, die den Koeffizienten:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$$

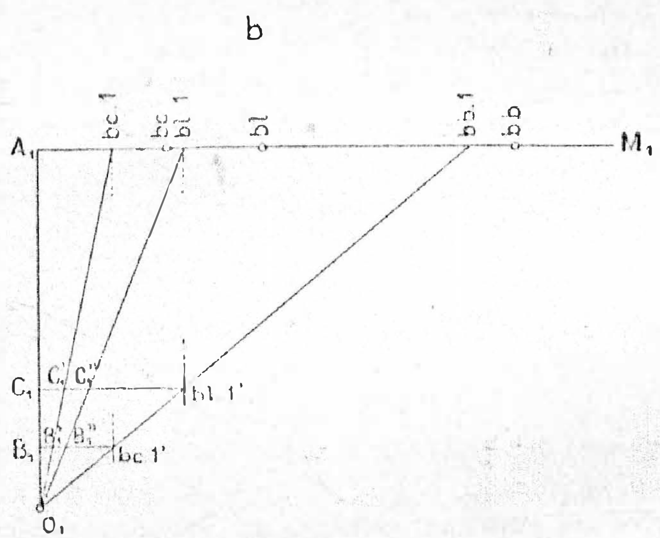
$$[bc.1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]} \qquad \text{entsprechen.}$$

Aus der Konstruktion «*a*» werden die Strecken $\overline{BB'}$, $\overline{BB''}$, $\overline{BB'''}$ mit einem Zirkel entnommen und von den entsprechenden Strecken der Konstruktion «*b*» mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen subtrahiert. Auf diese Weise entstehen Strecken, die den Koeffizienten der zweiten reduzierten Normalgleichung entsprechen und deren Endpunkte mit den Symbolen $[bc.1]$, $[bl.1]$ und $[bb.1]$ (natürlich mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen) bezeichnet werden.

Hierauf wird analog wie bei der Konstruktion «*a*» verfahren und als Ergebnis erscheinen auf der Strecke $\overline{O_1 A_1}$ die Koeffizienten der zweiten reduzierten Normalgleichung in Form von Strecken $\overline{O_1 C_1}$, $\overline{O_1 B_1}$ und auf den zur Geraden $A_1 M_1$ parallelen Strecken $\overline{B_1 [bc.1]'}$ $\overline{C_1 [bl.1]'}$, die zur Bildung der Koeffizienten der nachfolgenden reduzierten Normalgleichungen nötigen Ausdrücke auch in Form von Strecken: $C_1 C_1'$, $C_1 C_1''$ usw., was in der Fig. 2 ersichtlich gemacht wurde.

Fig 2



Schließlich übergehen wir zur graphischen Darstellung der letzten reduzierten Normalgleichung.

Auf einer Geraden $A_2 M_2$ werden die entsprechenden Koeffizienten der letzten Normalgleichung, d. h. alle, mit Ausnahme der zwei ersten, in demselben Maßstabe wie in der Konstruktion «*a*» aufgetragen.

Um die uns nötigen Strecken $[cc.2]$ und $[cl.2]$ zu erhalten, müssen wir doppelte Reduktion der Strecken $[cc]$ und $[cl]$ vornehmen und zwar, da:

$$[cc.2] = [cc.1] - \frac{[bc.1][bc.1]}{[bb.1]}$$

$$[cl.2] = [cl.1] - \frac{[bc.1][bl.1]}{[bb.1]}$$

und

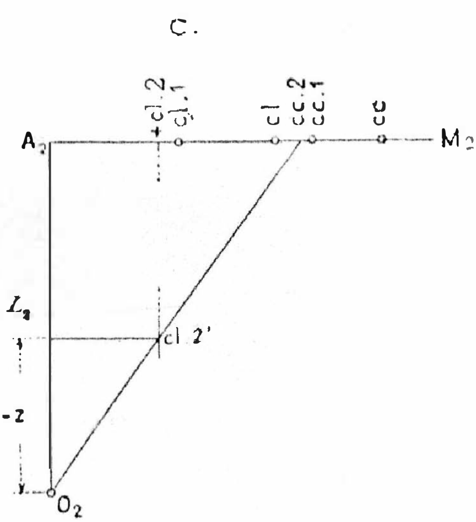
$$[cc.1] = [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} \qquad [cl.1] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]}$$

müssen wir diese Reduktion rückgänglich ausführen.

Die Ausdrücke $\frac{[ac][ac]}{[aa]}$ und $\frac{[ac][al]}{[aa]}$ sind aus der Konstruktion «a» in Form von Strecken $\overline{CC''}$ und $\overline{CC'''}$ zu entnehmen und als Subtrahende den Strecken $[cc]$ und $[cl]$ beizubringen. Auf diese Weise erhalten wir die Strecken $[cc.1]$ und $[cl.1]$. Die weitere Reduktion wird mittels der Konstruktion «b» ausgeführt und zwar werden dazu die Strecken $\overline{B_1 B_1'}$ und $\overline{B_1 B_1''}$ benutzt.

Die so erhaltenen Punkte werden mit $[cc.2]$ und $[cl.2]$ bezeichnet (wobei ihre Vorzeichen zu berücksichtigen sind). Hierauf wird der Punkt $[cc.2]$ mit dem Punkte O_2 verbunden (wobei $O_2 A_2 \perp A_2 M_2$ und $O_2 A_2 = 1$ ist), vom Punkte $[cl.2]$ eine Senkrechte bis zum Durchschnittspunkte $[cl.2]'$ mit der Strecke $O_2 [cc.2]$ errichtet und schließlich vom Punkte $[cl.2]'$ eine Parallele zur Geraden $A_2 M_2$ gezogen (vide Fig. 3).

Fig 3



Auf diese Weise erhalten wir den Punkt L_2 und die Strecke $O_2 L_2$ stellt uns laut der letzten reduzierten Normalgleichung:

$$z = -\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$$

die letzte Unbekannte mit negativem Vorzeichen vor.

Diese letzte Konstruktion wird entsprechend, da bei ihr $[cc]$ als Divisor vorkommt, mit dem Buchstaben «c» bezeichnet.

Bezeichnen wir den Maßstab, in welchem die Koeffizienten aufgetragen wurden mit k, den für die Strecken $OA = O_1 A_1 = O_2 A_2$ mit o, so werden alle Unbekannten im letzteren Maßstabe abgelesen.

Es sei noch bemerkt, daß bei der Bildung der Koeffizienten der zweiten reduzierten Normalgleichung alle hiezu nötigen Strecken der Strecke $\overline{B[ab]'}$ in der Konstruktion «a», dagegen bei der Bildung der Konstruktion «c» den Parallelen $\overline{C[ac]'}$ (in der Konstruktion «a») die zur ersten Reduktion, der Strecke $\overline{B_1 [bc.1]'}$ (in der Konstruktion «b») die zur zweiten Reduktion nötigen Strecken entnommen wurden. Wäre noch eine vierte Normalgleichung in reduzierter Form graphisch darzustellen, so müßten wir ihre Reduktion mit Hilfe der Strecken $\overline{D[ad]'}$, $\overline{D_1[bd.1]'}$, $\overline{D_2[cd.2]'}$ ausführen, wobei die nötigen Strecken in den Konstruktionen «a», «b» und «c» auszusuchen wären. (Beachte dabei die Bedeutung der entsprechenden Konstruktionen.)

Man findet leicht, daß bei der Reduktion der Normalgleichungen außer den quadratischen Koeffizienten folgende die wichtigste Rolle spielen:

bei d. R. d. 2ten Ngl. . . . . . $[ab]$
bei d. R. d. 3ten Ngl. . . . . . $[ac]$, $[bc.1]$
bei d. R. d. 4ten Ngl. . . . . . $[ad]\,[bd.1]\,[cd.2]$
. . . .
bei d. R. d. rten Ngl. . . . . $[ar]\,[br.1]\,[cr.2]$ . . . . $[pr.0]$.

Da mit ihrer Hilfe die Koeffizienten der reduzierten Normalgleichungen auf eine bequeme und wenig zeitraubende Weise erhalten werden, habe ich sie Hilfskoeffizienten der entsprechenden reduzierten Normalgleichungen benannt.

Es ist z. B. die vierte reduzierte Normalgleichung, also vorletzte zu bilden. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind: $[dd.3]$, $[de.3]$ und $[dl.3]$. Diese Koeffizienten können in folgender Form dargestellt werden:

$$[dd.3] = [dd] - \frac{[ad][ad]}{[aa]} - \frac{[bd.1][bd.1]}{[bb.1]} - \frac{[cd.2][cd.2]}{[cc.2]}$$

$$[de.3] = [de] - \frac{[ad][ae]}{[aa]} - \frac{[bd.1][be.1]}{[bb.1]} - \frac{[cd.2][ce.2]}{[cc.2]}$$

$$[dl.3] = [dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]} - \frac{[bd.1][bl.1]}{[bb.1]} - \frac{[cd.2][cl.2]}{[cc.2]}$$

Die drei Subtrahende, um die die Koeffizienten $[dd]$, $[de]$ und $[dl]$ zu vermindern sind, werden der Reihe nach den Konstruktionen «a», «b» und «c» mit einem Zirkel entnommen und schließlich werden die auf diese Weise entstandenen Strecken von den den Koeffizienten $[dd]$ usw. entsprechenden Strecken mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen subtrahiert.

Dabei ist noch ein Umstand von Wichtigkeit. Ist nämlich einer der Hilfskoeffizienten einer reduzierten Normalgleichung gleich Null, so ist die ihm entsprechende Konstruktion zur Bildung der betreffenden reduzierten Normalgleichung unnötig.

Dieser Umstand erleichtert uns sehr die graphische Bildung der Koeffizienten der reduzierten Normalgleichung.

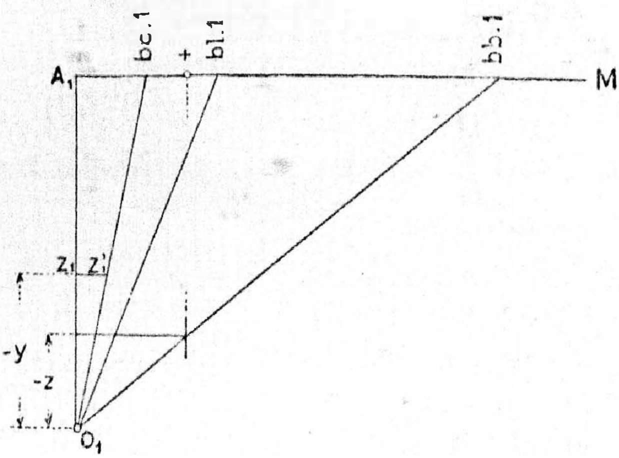
Beschränken wir uns nun wieder auf nur drei Unbekannte. In der Konstruktion «c» haben wir die letzte Unbekannte z in Form einer Strecke $\overline{O_2L_2}$ erhalten. Tragen wir sie in der Konstruktion «b» von O_1 gegen A_1 auf und ziehen eine zur Geraden A_1M_1 Parallele, so können wir laut der zweiten reduzierten Normalgleichung:

$$y = -\frac{[bl.1] + [bc.1]z}{[bb.1]}$$

die zweite Unbekannte y bestimmen.

Fig. 4.

b.



Bringen wir die oben erwähnte Parallele zum Durchschnitte mit der Strecke $\overline{O_1 [bc.1]}$, so entsteht dadurch die in der Fig. 4 mit $\overline{z_1 z_1'}$ bezeichnete Strecke, welche dem Ausdrucke $[bc.1]z$ entspricht. Diese Strecke addieren wir mit Rücksicht auf das Vorzeichen zur Strecke $A_1 [bl.1]$, fällen dann von dem so erhaltenen Punkte eine Senkrechte (zu $A_1 M_1$) bis zum Durchschnittspunkte mit der Strecke $O_1 [bb.1]$, den wir schließlich auf die Strecke $O_1 A_1$ projizieren. Die Entfernung zwischen O_1 und dem auf diese Weise erhaltenen Punkte gibt uns die Unbekannte y mit negativem Vorzeichen an. Ganz analog wird in der Konstruktion «*a*» die Unbekannte x mit Hilfe der schon bekannten Größen y und z auf Grund der ersten reduzierten Normalgleichung:

$$x = -\left\{ \frac{[ab]}{[aa]} y + \frac{[ac]}{[aa]} z + \frac{[al]}{[aa]} \right\}$$

bestimmt.

Die Genauigkeit der graphischen Bestimmung der Unbekannten wird ausführlich im Kapitel II behandelt, deshalb übergehen wir sie einstweilen und wenden uns zur Bestimmung der Gewichte der Unbekannten und ihrer Funktionen.

Den mittleren Fehler und das Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Werte x, y, z können wir graphisch auf zweifache Weise bestimmen.

1. Nach den Formeln:

$$E_F^2 = \left\{ \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[f_3.2]^2}{[cc.2]} \right\} \varepsilon_0^2$$

$$\frac{1}{P_F} = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[f_3.2]^2}{[cc.2]},$$

wobei

$$[f_2.1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1, \ [f_3.2] = [f_3.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [f_2.1], \ [f_3.1] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1,$$

2. nach den Formeln:

$$E_F^2 = \left\{ \begin{array}{r} [\alpha\alpha] f_1^2 + 2[\alpha\beta] f_1 f_2 + 2[\alpha\gamma] f_1 f_3 \\ [\beta\beta] \ f_2^2 + 2[\beta\gamma] f_2 f_3 \\ [\gamma\gamma] \ f_3^2 \end{array} \right\} \varepsilon_0^2$$

$$\frac{1}{P_F} = \begin{array}{r} [\alpha\alpha] f_1^2 + 2[\alpha\beta] f_1 f_2 + 2[\alpha\gamma] f_1 f_3 \\ [\beta\beta] \ f_2^2 + 2[\beta\gamma] f_2 f_3 \\ [\gamma\gamma] \ f_3^2 \end{array} *)$$

Nach 1. werden E_F^2 und $\frac{1}{P_F}$ bestimmt, wenn es sich nicht so sehr um die Genauigkeit ihrer Bestimmung handelt.

Man braucht nur die einzelnen f in gewissem Maßstabe als Strecken in den betreffenden Konstruktionen darzustellen, sie entsprechend zu reduzieren und graphisch zn addieren. Was den Maßstab von $\frac{1}{P_F}$ anbelangt, wird auf die betreffende Tabelle im Kapitel II verwiesen.

Handelt es sich jedoch nicht nur um E_F und $\frac{1}{P_F}$, sondern auch um die Bestimmung von $\frac{1}{P_x} = [\alpha\alpha]$, $\frac{1}{P_y} = [\beta\beta]$ und $\frac{1}{P_z} = [\gamma\gamma]$ der Gewichte der Unbekannten, so wird ein dem Hausenschen**) analoges graphisches Verfahren benutzt, welches uns gestattet, alle in der Formel 2. eingeklammerten Ausdrücke graphisch zu bestimmen.

Für drei Unbekannte lauten die bezüglichen sogenannten Gewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned}
[aa][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ac][\alpha\gamma] &= 1 \\
[ab][\alpha\alpha] + [bb][\alpha\beta] + [bc][\alpha\gamma] &= 0 \\
[ac][\alpha\alpha] + [bc][\alpha\beta] + [cc][\alpha\gamma] &= 0 \\[4pt]
[aa][\alpha\beta] + [ab][\beta\beta] + [ac][\beta\gamma] &= 0 \\
[ab][\alpha\beta] + [bb][\beta\beta] + [bc][\beta\gamma] &= 1 \\
[ac][\alpha\beta] + [bc][\beta\beta] + [cc][\beta\gamma] &= 0 \\[4pt]
[aa][\alpha\gamma] + [ab][\beta\gamma] + [ac][\gamma\gamma] &= 0 \\
[ab][\alpha\gamma] + [bb][\beta\gamma] + [bc][\gamma\gamma] &= 0 \\
[ac][\alpha\gamma] + [bc][\beta\gamma] + [cc][\gamma\gamma] &= 1
\end{aligned}$$

Die letzten drei Gleichungen, in reduzierter Form geschrieben, lauten aber:

---

*) Die Bedeutung der obigen Symbole wird durch folgende Überlegung klargemacht: Da $F = f(x, y, z)$ eine Funktion der Unbekannten x, y, z ist, welche wieder Funktionen der Beobachtungswerte l sind, so wird eine Änderung der Funktion F nach l_1 dargestellt durch

$$\frac{dF}{dl_1} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l_1} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l_1} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l_1}$$

oder in abgekürzter Schreibweise $\frac{dF}{dl_1} = f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1$.

**) Astronomische Nachrichten, Bd. 8, Nr. 192.

$$[\alpha\gamma] + \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [\beta\gamma] + \frac{[ac]}{[aa]} [\gamma\gamma] = 0$$

$$[\beta\gamma] + \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [\gamma\gamma] = 0$$

$$[\gamma\gamma] = \frac{1}{[cc.2]}$$

Indem wir also in der 3ten Konstruktion auf der Geraden 1 (oder der Genauigkeit wegen 10) auftragen und ganz analog wie bei der Bestimmung der Unbekannten r verfahren, sind wir imstande, den Gewichtskoeffizienten $[\gamma\gamma]$ (oder $10\,[\gamma\gamma]$) auf der Strecke $O_3 A_3$ zu ermitteln.

Auf ganz dieselbe Weise, wie früher die Unbekannten, werden jetzt alle übrigen in diesen 3 Gewichtsgleichungen vorkommenden Gewichtskoeffizienten graphisch bestimmt.

Hierauf wenden wir uns zu der nächststehenden Gruppe der Gewichtsgleichungen, deren Reduktion im allgemeinen nur bis auf die Gleichung, in der das rechtsstehende Glied die Einheit ist, vorgenommen werden muß.

In unserem Falle werden also nur folgende zwei Gleichungen vonnöten sein:

$$[\alpha\beta] + \frac{[ab]}{[aa]} [\beta\beta] + \frac{[ac]}{[aa]} [\beta\gamma] = 0$$

$$[\beta\beta] = \frac{1 - [bc.1]\,[\beta\gamma]}{[bb.1]}$$

Da die Strecke, die dem Koeffizienten $[\beta\gamma]$ entspricht, bekannt ist, sind wir wieder in der Lage, auf Grund des Vorhergehenden alle übrigen in diesen 2 Gleichungen vorhandenen Koeffizienten graphisch zu bestimmen.

Schließlich wird auch der Gewichtskoeffizient $[\alpha\alpha]$ auf Grund der Gleichung:

$$[\alpha\alpha] = \frac{1 - [ab]\,[\alpha\beta] - [ac]\,[\alpha\gamma]}{[aa]}$$

graphisch bekannt.

Diese Bestimmung der Gewichtskoeffizienten hat vor der früher besprochenen den Vorzug, daß alle Gewichtskoeffizienten ähnlich wie die Unbekannten auf das genaueste graphisch bestimmt werden können, was im nachstehenden Kap. II ausführlich erörtert werden soll.

(Schluß folgt.)

Beitrag zum rechnerischen Verfahren des Rückwärtseinschneidens.

Mitgeteilt vom Ing. Jos. Ryšavý.

In der österr. Zeitschrift für Vermessungswesen (III. Jahrgang, S. 83) wurde ein Verfahren für das Vorgehen bei der numerischen Berechnung der obgenannten Aufgabe vom Herrn K. Beredick mitgeteilt, die auf der von Cassini angegebenen graphischen Lösung basiert. In den folgenden Zeilen soll eine Lösung derselben Aufgabe angegeben werden, welche vom theoretischen Standpunkte interessieren dürfte. Die Praktiker bevorzugen bei der numerischen Berechnung

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 11. **Wien, am 1. November 1910.** **VIII. Jahrgang.**

Graphische Ausgleichung der vermittelnden, bedingten und anderen mehr komplizierten Beobachtungen.

Von Dr. **Kaspar Weigel**, Adjunkt an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg.

(Schluß.)

II. Über die Genauigkeit der graphischen Bestimmung der Unbekannten, der Gewichtskoeffizienten und der übrigen mit Hilfe dieses Verfahrens bestimmbaren Grössen.

Zwar können wir infolge der Anwendung eines großen Maßstabes für die Strecken $OA = O_1 A_1 = \ldots = 1$ die Unbekannten, deren Gewichte etc. auch in ziemlich großem Maßstabe erhalten, es könnten jedoch Fälle eintreten, daß entweder die Genauigkeit ihrer Bestimmung doch für unsere Zwecke nicht ausreichend wäre oder unsere Konstruktionen eine all zu lange und breite Form erhalten müßten; ja, sie könnten manchmal deswegen ganz unausführbar sein.

Dieser zweite Fall wird dann eintreten, wenn die Unbekannten, was ihre Größe anbelangt, die Einheit bei weitem überschreiten.

Sind uns jedoch, wie gewöhnlich, Näherungswerte der Unbekannten bekannt, so reduzieren sich die Verbesserungen der Unbekannten (mögen sie z. B. ζ, η, ξ heißen) auf Zahlen, die meistens zwischen 0 und 1 sich befinden oder wenigstens nicht viel über 1 hinauskommen. Wären keine Näherungswerte der Unbekannten vorhanden (was doch selten vorkommen sollte), so werden nur so viele Beobachtungen in die Rechnung gezogen, wie viel die Unbekannten eindeutig bestimmen, d. h., uns deren Näherungswerte ergeben.

Diese Ermittlung der Näherungswerte kann natürlich auch graphisch durchgeführt werden.

Bei drei Unbekannten werden wir uns dreier Fehlergleichungen, jedoch mit dem rechtsstehenden Gliede $\delta_i = 0$ bedienen.

Zuerst müssen jedoch die Koeffizienten der betreffenden Gleichungen in der Weise geändert werden, daß keiner von ihnen etwa $\frac{1}{10}$ eines beliebigen anderen beträgt.

Als erste Gleichung wird diejenige umgeänderte Fehlergleichung genommen, bei der gerade der bei x stehende Koeffizient am größten ist. Dieselbe Regel gilt bei der Auswahl der zweiten, dritten, eventuell der anderen geänderten Fehlergleichungen. Das Absolutglied l kommt einstweilen nicht in Betracht, da es, wie wir bei der Auflösung der Normalgleichungen sehen werden, ohne Schaden für das Resultat in anderem ihm entsprechenden Maßstabe aufgetragen werden kann.

Für die Bestimmung der Näherungswerte dreier Unbekannten seien z. B. folgende 3 Gleichungen die passendsten:

$$a_p x + b_p y + c_p z + l_p = 0$$
$$a_r x + b_r y + c_r z + l_r = 0$$
$$a_q x + b_q y + c_q z + l_q = 0$$

oder in reduzierter Form geschrieben:

$$x + \frac{b_p}{a_p} y + \frac{c_p}{a_p} z + \frac{l_p}{a_p} = 0$$
$$y + \frac{(c_r \,.\, 1)}{(b_r \,.\, 1)} z + \frac{(l_r \,.\, 1)}{(b_r \,.\, 1)} = 0$$
$$z + \frac{(l_q \,.\, 2)}{(c_q \,.\, 2)} = 0$$

wobei d e einzelnen Symbole folgende Bedeutungen haben:

$$(b_r \,.\, 1) = b_r - \frac{a_r b_p}{a_p}$$
$$(c_r \,.\, 1) = c_r - \frac{a_r c_p}{a_p}$$
$$(l_r \,.\, 1) = l_r - \frac{a_r l_p}{a_p}$$
$$(c_q \,.\, 2) = (c_q \,.\, 1) - \frac{(b_q \,.\, 1)\,(c_r \,.\, 1)}{(b_r \,.\, 1)}$$
$$(l_q \,.\, 2) = (l_q \,.\, 1) - \frac{(b_q \,.\, 1)\,(l_r \,.\, 1)}{(b_r \,.\, 1)}$$
$$(c_q \,.\, 1) = c_q - \frac{a_q c_p}{a_p}$$
$$(l_q \,.\, 1) = l_q - \frac{a_q l_p}{a_p}$$
$$(b_q \,.\, 1) = b_q - \frac{a_q b_p}{a_p}$$
$$(l_r \,.\, 1) = l_r - \frac{a_r l_p}{a_p}$$

Den so reduzierten Gleichungen entsprechen auch analog wie den reduzierten Normalgleichungen gewisse Konstruktionen «a» «b» und «c», mit deren Hilfe die Näherungswerte nach dem früher Besprochenen leicht gefunden werden.

Die Bestimmung der Näherungswerte wird jedoch meistens unnötig, denn wir sind imstande, auch Normalgleichungen, die von sehr ungeschickt aufgestellten

Fehlergleichungen herrühren, graphisch aufzulösen, wenn wir nur vorerst folgende Maßregeln treffen:

1. Die Koeffizienten der Fehlergleichungen werden so umgeändert, daß sie alle mit Ausnahme der Absolutglieder l einander beinahe gleich sind.*)

Sind z. B. in den Fehlergleichungen von der Form

$$a_1 \zeta + b_1 \eta + c_1 \xi + l_1 = \delta_1$$

die Werte der $a \doteq 10 b \doteq 100 c$, so werden die Koeffizienten b mit 10, die Koeffizienten c mit 100 multipliziert und wir erhalten die Fehlergleichungen in der Form:

$$a_1 \zeta + 10 b_1 \frac{\eta}{10} + 100 c_1 \frac{\xi}{100} + l_1 = \delta_1$$

oder:

$$a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + l_1 = \delta_1$$

Hierauf werden diese Koeffizienten zur Bildung der Normalgleichungen benutzt.

2. Nach ihrer Berechnung werden sie mit Ausnahme der Absolutglieder $[al]$ $[bl]$ usw. auf den Geraden AM, $A_1 M_1$ . . . aufgetragen, und zwar wird dazu so ein Maßstab «k» gewählt, daß die größten, d. h. quadratischen Koeffizienten nicht all zu breite Konstruktionen bedingen.

3. Für die Auftragung der Absolutglieder wird nach Bedürfnis ein anderer Maßstab «l» benutzt, damit sie, wenn sie sich ihrer Größe nach von den übrigen Koeffizienten unterscheiden, doch in unseren Konstruktionen aufgetragen werden könnten. Da man nach Jacobi in erster Näherung setzten kann:

$$x = \frac{[al]}{[aa]} \ldots, \quad y = \frac{[bl]}{[bb]} \ldots, \quad z = \frac{[cl]}{[cc]} \ldots,$$

so wird ein solcher Maßstab für die Absolutglieder gewählt, daß die Streckenverhältnisse:

$$\frac{[al]}{[aa]}, \frac{[bl]}{[bb]}, \frac{[cl]}{[cc]}$$

kleiner als 1 werden,**) dann werden auch die ausgeglichenen Werte der Unbekannten, als Strecken, meistens kleiner wie die Strecke OA oder wenigstens dieselbe nicht viel überschreiten.

4. Wäre trotz der Umänderung der Koeffizienten der Fehlergleichungen doch in einer Normalgleichung der quadratische Koeffizient kleiner wie die anderen Koeffizienten, so ist es ratsam, diese Normalgleichung zur ersten Normalgleichung zu machen. In diesem Falle wird ihre Konstruktion höher wie die der anderen ausfallen, sie wird jedoch so genau wie die übrigen sein. Wäre sie da-

---

*) Manchmal wird jedoch, namentlich bei Ausgleichung bedingter Beobachtungen, wenn Winkel- und Seitenbedingungsgleichungen sehr verschiedene Koeffizienten besitzen, diese Umänderung unmöglich, was zwar für die graphische Lösung ungünstig ist, sie jedoch nur ein wenig verzögert.

**) Sollte trotzdem der Wert einer Unbekannten 1 bei weitem überschreiten, zum Beispiel: $z = \frac{[cl.2]}{[cc.2]} \doteq 10$, so wird die Strecke $[cl.2]$ in zehn Teile geteilt und als Resultat bekommt man $\frac{z}{10} = \frac{[cl.2]}{10[cc.2]}$.

gegen als irgend eine spätere reduzierte Normalgleichung graphisch darzustellen, so müßte man eine Gerade durch den Endpunkt einer graphisch reduzierten Strecke verlängern, was doch für die Genauigkeit der betreffenden Konstruktion nicht vorteilhaft wäre.

Der Maßstab «o» für die Strecke OA wird gewöhnlich 10:1 angenommen, d. h. $OA = O_1 A_1 = \ldots = 1 = 10$ cm.

Auch wird das quadrierte Millimeter-Papier für unsere Konstruktionen empfohlen.

Überlegen wir uns noch die Konsequenzen der Verschiedenheit der in unseren Konstruktionen angewandten Maßstäbe.

Es ist leicht aus der Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke nachzuweisen, daß die Ausdrücke, wie $\frac{[ab]}{[aa]}, \frac{[ac]}{[aa]}$ in dem Maßstabe «o», dagegen die Ausdrücke, wie $\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}, \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$ in dem Maßstabe «k», d. h., in welchem die Koeffizienten aufgetragen wurden, erhalten werden.

Die Ausdrücke, wie $\frac{[al]}{[aa]}$, werden in einem kombinierten Maßstabe erhalten und zwar $\frac{ol}{k}$. Dies ist auch die Ursache, daß der Maßstab, in dem die Unbekannten abgelesen werden, auch $\frac{ol}{k}$ ist. Denn, da $z = \frac{[cl.2]}{[cc.2]}$ und der Maßstab für $\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$ derselbe ist wie der des Ausdruckes $\frac{[al]}{[aa]}$, muß er auch für z, y und x gelten. Benennen wir das Verhältnis der Maßstäbe $\frac{o}{k}$ mit p, $\frac{l}{k}$ mit q, so ist $\frac{ol}{k} = p.q.k$; es werden also die Unbekannten in einen $p.q$ größeren Masstabe wie die Koeffizienten erhalten.

Sind keine Näherungswerte vorhanden, so wird in der Regel das Verhältnis der Absolutglieder zu den übrigen Koeffizienten bedeutend größer wie 1 ausfallen.

In diesem Falle müssen wir also, gemäß dem Vorhergehenden, einen viel kleineren Maßstab für die Absolutglieder als für die übrigen Koeffizienten wählen.

Es wird also $p \gtrless 1$, dagegen $q < 1$, was für unsere Zwecke nachteilig ist.

Dennoch werden die Unbekannten unter diesen Umständen graphisch bestimmt und ihre so erhaltenen Werte in die Normalgleichungen eingesetzt. Wegen der kleinen Genauigkeit ihrer Bestimmung werden sie die Normalgleichungen nicht erfüllen, sondern linksseitig kleine Abweichungen von Null liefern.

Die bereits für die Unbekannten erhaltenen Werte wollen wir zum Unterschiede von den die Normalgleichung erfüllenden x, y, z mit x', y', z' bezeichnen. Sie sind aber nichts anderes, als mit Hilfe unserer Konstruktionen beobachtete Werte von x, y, z; deshalb werden sie die Normalgleichungen nicht erfüllen können.

Da die Normalgleichungen in diesem Falle Bedingungsgleichungen sind, sind x' y' z' bedingte Beobachtungen.

Da aber in unserem Falle die Anzahl der Bedingungsgleichungen der Anzahl der beobachteten Größen gleich ist, haben wir mit keiner Ausgleichungsaufgabe mehr, sondern mit einer bestimmten Aufgabe aus n Gleichungen n Unbekannte zu finden, zu tun. Auch werden die Verbesserungen der Unbekannten den Charakter wahrer und nicht bloß scheinbarer Fehler haben.

Für drei Unbekannte lauten die Bedingungsgleichungen (alte Normalgleichungen):

$$
\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= 0 \\
[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] &= 0 \\
[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] &= 0
\end{aligned}
$$

Setzt man statt der wahren (in bezug auf die Normalgleichungen) die beobachteten Werte der Unbekannten ein, so sind die Bedingungsgleichungen nicht mehr befriedigt und liefern zu ihrer rechten Seite Widersprüche ω_1, ω_2, ω_3:

$$
\begin{aligned}
[aa]x' + [ab]y' + [ac]z' + [al] &= \omega_1 \\
[ab]x' + [bb]y' + [bc]z' + [bl] &= \omega_2 \\
[ac]x' + [bc]y' + [cc]z' + [cl] &= \omega_3
\end{aligned}
$$

Damit also die Bedingungsgleichungen streng erfüllt werden, müssen an den beobachteten Werten folgende Verbesserungen angebracht werden:

$$
\begin{aligned}
[aa](x' + \delta x) + [ab](y' + \delta y) + [ac](z' + \delta z) + [al] &= 0 \\
[ab](x' + \delta x) + [bb](y' + \delta y) + [bc](z' + \delta z) + [bl] &= 0 \\
[ac](x' + \delta x) + [bc](y' + \delta y) + [cc](z' + \delta z) + [cl] &= 0,
\end{aligned}
$$

welche aus folgenden 3 Gleichungen eindeutig zu bestimmen sind:

$$
\begin{aligned}
[aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z + \omega_1 &= 0 \\
[ab]\delta x + [bb]\delta y + [bc]\delta z + \omega_2 &= 0 \\
[ac]\delta x + [bc]\delta y + [cc]\delta z + \omega_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Diese sind entstanden durch die Subtraktion jeder Gleichung der vorletzten Gleichungsgruppe von der betreffenden Gleichung der letzten Gleichungsgruppe.

Um die Verbesserungen graphisch zu bestimmen, braucht man nur die den Ausdrücken $(\omega_2 . 1)$ und $(\omega_3 . 2)$ entsprechenden Strecken graphisch zu ermitteln, und ein dem früher bei der Ermittlung der Unbekannten analoges Verfahren liefert uns in der Form von Strecken die Verbesserungen δx, δy und δz.

Es wird also δz aus der dritten reduzierten Bedingungsgleichung:

$$\delta z + \frac{(\omega_3 . 2)}{[cc . 2]} = 0$$

graphisch bestimmt, und rückgänglich gelangen wir zu den Werten der übrigen Unbekannten δy und δx.

Da jedoch die Widersprüche ω_1, ω_2, ω_3 im Verhältnisse zu den übrigen Koeffizienten sehr kleine Zahlen sein werden, werden wir uns beim Auftragen derselben eines viel größeren Maßstabes «ω» als früher beim Auftragen der Koeffizienten bedienen. Benennen wir das Verhältnis $\frac{\omega}{k}$ mit dem Buchstaben s, also $s = \frac{\omega}{k}$, so werden die Verbesserungen δx, δy und δz, da sie nach dem Vorhergehenden in dem Maßstabe $\frac{o\omega}{k}$ bestimmt werden, in einem $p.s$ größerem Maßstabe ermittelt, als die Koeffizienten $[aa]$, $[ab]$ usw. aufgetragen wurden.

Werden die Werte $x' + \delta x$, $y' + \delta y$ und $z' + \delta z$ in die Normalgleichungen substituiert, so werden sich höchst wahrscheinlich wieder Widersprüche ω'_1, ω'_2, ω'_3 zeigen. Analog wie früher fortfahrend, erhalten wir neue Verbesserungen der von uns beobachteten $x' + \delta x$, ...

Wir sind also imstande, nur mit Hilfe der Konstruktionen «a» «b» «c» die Unbekannten mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen.

Die Unbekannten erscheinen dann in der Form größtenteils stark konvergierender Reihen:*)

$$x = x' + \delta x + \delta' x + \delta'' x + \ldots \quad \delta x^{(n)}$$
$$y = y' + \delta y + \delta' y + \delta'' y + \ldots \ldots \delta y^{(n)}$$
$$z = z' + \delta z + \delta' z + \delta''' z + \ldots \ldots \delta z^{(n)}$$

Ganz auf dieselbe Weise kann die Genauigkeit der Gewichtskoeffizienten verschärft werden. Die von ihrer ersten Bestimmung herstammenden Werte $[\alpha\alpha]'$, $[\alpha\beta]'$ . . . . werden die Gewichtsgleichungen nicht vollständig befriedigen, sondern die Widersprüche

$$\omega_{\alpha 1},\ \omega_{\alpha 2},\ \omega_{\alpha 3},$$
$$\omega_{\beta 1},\ \omega_{\beta 2},\ \omega_{\beta 3},$$
$$\omega_{\gamma 1},\ \omega_{\gamma 2},\ \omega_{\gamma 3},$$

liefern, mit deren Hilfe wir die Verbesserungen der Koeffizienten $\delta\alpha\alpha$, $\delta\alpha\beta$ usw. bestimmen können.

Zur Kontrolle können schließlich die bekannten Beziehungen dienen:

$$x + [al]\,[\alpha\alpha] + [bl]\,[\alpha\beta] + [cl]\,[\alpha\gamma] = 0$$
$$y + [al]\,[\alpha\beta] + [bl]\,[\beta\beta] + [cl]\,[\beta\gamma] = 0$$
$$z + [al]\,[\alpha\gamma] + [bl]\,[\beta\gamma] + [cl]\,[\gamma\gamma] = 0,$$

die entweder rechnerisch oder auf einer Geraden graphisch durchzuführen sind.

Wurde bei der Bestimmung der Koeffizienten $[\alpha\alpha]'$, $[\alpha\beta]'$ . . . — 1 in dem Maßstabe $\varkappa = rk$ aufgetragen, so wurden dadurch die Koeffizienten $[\alpha\alpha]'$ $[\alpha\beta]'$ in dem Maßstabe $\frac{o\varkappa}{k}$ bestimmt und daher muß die oben erwähnte Kontrolle in dem Maßstabe $\frac{l}{o} \cdot \frac{o\varkappa}{k} = \frac{l\varkappa}{k}$ vorgenommen werden.

Wir können aber auch das Glied $[ll.3] = [p\delta\delta]$ graphisch bestimmen und zwar in dem Maßstabe $\frac{ll}{k}$. Da $[ll]$ als Strecke gewöhnlich zu lang ausfallen

*) Dabei ist die Konvergenz im ersten Grade abhängig von den Maßstäben, in welchen die Koeffizienten $[aa]$ . . . . und die Widersprüche ω aufgetragen wurden. Da die beim Auftragen der Koeffizienten $[aa]$ $[ab]$ . . . . begangenen Fehler $\delta[aa]$, $\delta[ab]$ bei mehrmaliger Ausgleichung dieselben bleiben, muß man solange die Ausgleichung fortsetzen, bis $\delta x^{(n)}\ \delta[aa]$, $\delta y^{(n)}\ \delta[ab]$ . . . . verschwindend kleine Größen werden.

würde, wird bei der Reduktion nur ein Teil desselben benutzt, wie dies in unseren Beispielen gezeigt wurde.

Zwar kann die Genauigkeit von $[p\delta\delta]$ nicht vergrößert werden, sie wird jedoch in den meisten Fällen zu der Bestimmung des mittleren Gewichteinheitsfehlers ε_0 ausreichen. Die genauere Bestimmung von ε_0 erfolgt auf dem Wege durch die Fehlergleichungen.

Dieses Verfahren eignet sich zur Ausgleichung jeder Beobachtungen, wo die Normalgleichungen die Hauptrolle spielen, also auch bei der Ausgleichung bedingter Beobachtungen, vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen und bedingter Beobachtungen mit Unbekannten. Dazu sei noch bemerkt, daß man mit Hilfe ähnlicher Konstruktionen wie die früheren «a» «b» «c» auch alle Koeffizienten der Normalgleichungen $[aa]$, $[ab]$, . . . graphisch bilden kann.

Schließlich sind wir imstande, ähnlich wie in der Baumechanik u. dgl., alle Ausgleichungen auf graphischem Wege durchzuführen und dazu viel schneller und genauer wie mit Hilfe der «rechnenden Methode der kleinsten Quadrate».

Die Folgen der Benützung verschiedener Maßstäbe seien durch nachstehende Tabellen klargemacht:

Für die Ausdrücke:	angenommenen Maßstäbe	Infolgedessen für die Ausdrücke:	zu gebrauchenden Maßstäbe
$[aa]$, $[ab]$ . . .	k	x', y', z' . . .	$\frac{ol}{K} = p \cdot q \cdot k$
1 auf d. G. $OA = O_1 A_1$	$o = pk$	$[\alpha\alpha]'$, $[\alpha\beta]'$ . .	$\frac{o\varkappa}{K} = p \cdot r \cdot k$
$[al]$, $[bl]$, $[cl]$ . . .	$l = qk$	δx, δy, δz . . .	$\frac{o\omega}{K} = p \cdot s \cdot k$
1 bei d. Enn. v. $[aa]$ . . .	$\varkappa = rk$	$\delta[\alpha\alpha]$, $\delta[\alpha\beta]$ . . .	$\frac{o\omega'}{K} = p \cdot t \cdot k$
ω_1, ω_2, ω_3 . . .	$\omega = sk$	$[p\delta\delta]$	$\frac{ll}{K} = q^2 \cdot k$
ω_{α_1}, ω_{α_2}, ω_{α_3} . . .	$\omega' = tk$	$\frac{1}{P_F}$	$\frac{ff}{k} = u^2 k$
f_1, f_2, f_3 . . .	$f = uk$	x', y', z bei der Kontrolle	$\frac{l\varkappa}{k} = q \cdot r \cdot k$

Zum besseren Verständnis des von mir angegebenen Verfahrens füge ich in dem Anhange ein Beispiel hinzu.

Anhang.

Eine übersichtliche Zeichnung liefert das von Dr. W. Jordan in dem Handbuche für Vermessungskunde, B. I, S. 102 (Stuttgart 1904) angegebene Zahlenbeispiel mit drei Unbekannten:

$$\begin{array}{rrrrl}
\underline{17{\cdot}50}\,x & -\ 6{\cdot}50\,y & -\ 6{\cdot}50\,z & -\ 2{\cdot}14 & = 0 \\
 & +\ \underline{17{\cdot}50}\,y & -\ 6{\cdot}50\,z & -\ 13{\cdot}96 & = 0 \\
 & & +\ \underline{20{\cdot}50}\,z & +\ 5{\cdot}40 & = 0 \\
 & & & +\ \underline{\underline{100{\cdot}34}} &
\end{array}$$

Die beigefügte Zeichnung enthält die ganze Ausgleichungsrechnung.

Die Koeffizienten $[aa]$, $[ab]$ und die Absolutglieder $[al]$, $[bl]$ . . wurden im Maßstabe 1:1 und die Strecke OA im Maßstabe 10:1 aufgetragen. Es ist also «k» $= 1$, «l» $= 1$, «o» $= 10$ und der Maßstab für x', y', z': $\frac{ol}{k} = 10$.

Das Resultat der ersten Ausgleichung war:

$$z' = 0{\cdot}32,\ y' = 1{\cdot}17,\ x' = 0.68,$$

welche Zahlen die Normalgleichungen bis auf folgende Widersprüche befriedigen:

$$\omega_1 = 0{\cdot}075,\ \omega_2 = 0{\cdot}015,\ \omega_3 = -0{\cdot}065.$$

Dieselben wurden im Maßstabe 100:1 aufgetragen und es wurde mit ihnen als Absolutgliedern die zweite Ausgleichung rasch vorgenommen.

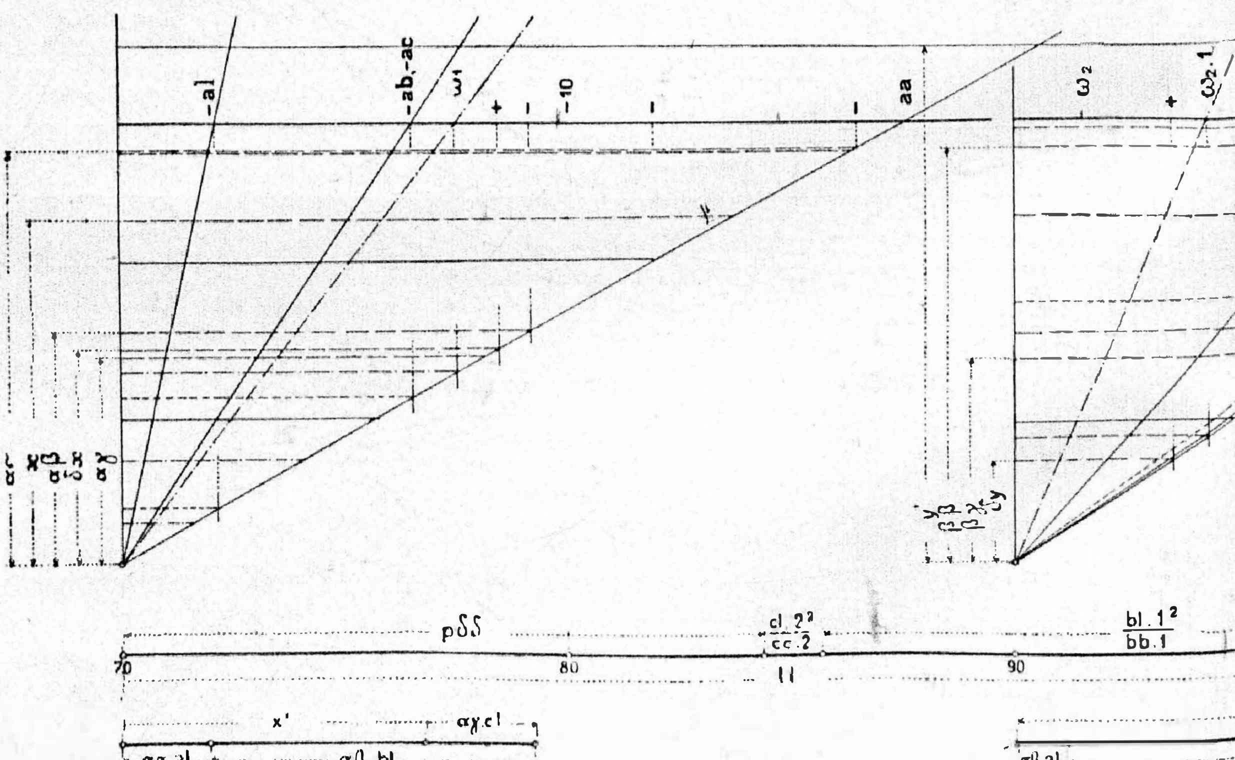
Die auf diese Weise erhaltenen und der Zeichnung im Maßstabe $\frac{o\omega}{k} = 1000:1$ entnommenen Verbesserungen:

$$\delta z = 0{\cdot}0009,\ \delta y = -0{\cdot}0023,\ \delta x = -0{\cdot}0048,$$

bestimmen, addiert zu den früher erhaltenen x', y', z' die Unbekannten:

$$x = x' + \delta x = 0{\cdot}6752$$
$$y = y' + \delta y = 1{\cdot}1677$$
$$z = z' + \delta z = 0{\cdot}3209$$

Die Bestimmung der Gewichtskoeffizienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ . . . , der Summe $[p\delta\delta]$ und der Kontrollwerte für x', y', z' bedarf keiner Erläuterung mehr.



Die bezüglichen Maßstäbe sind $\frac{o\varkappa}{k} = 100:1$, $\frac{ll}{k} = 1:1$ und $\varkappa = 10:1$.

Die auf diese Weise erhaltenen Resultate wurden in der nachstehenden Tabelle nebst den von Dr. W. Jordan angegebenen zusammengestellt, wobei zu bemerken ist, daß die letzteren, da sie mit einem Rechenschieber bestimmt wurden, bei weitem den ersten in bezug auf die Genauigkeit nachstehen.

Wert von	Bestimmt graphisch	Bestimmt mit den Rechenschieber
x	0·6752	0·67
y	1·1677	1·17
z	0·3209	0·32
$[p\delta\delta]$	84·35	84·35

Wert von	Bestimmt graphisch	Bestimmt m. d. Rechenschieber
$\alpha\alpha$	0·094	0·094
$\alpha\beta$	0·052	0·052
$\alpha\gamma$	0·046	0·046

Wert von	Bestimmt graphisch	Bestimmt m. d. Rechenschieber
$\beta\beta$	0·093	0·093
$\beta\gamma$	0·046	0·046
$\gamma\gamma$	0·078	0·078

Wie sehr die Genauigkeit der Bestimmung der Unbekannten durch die zweite Ausgleichung gestiegen ist, kann man schon aus dem Umstande erkennen, daß zuletzt die Unbekannten die Normalgleichungen bis auf folgende Widersprüche erfüllen:

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] = +0{\cdot}0001$$
$$[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] = +0{\cdot}0001$$
$$[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] = -0{\cdot}0004.$$