

Paper-ID: VGI_191053



Grenzregelung mittels des Polarplanimeters

A. Härpfer ¹

¹ *Privat- und Honorar-dozent in Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **8** (12), S. 391–401

1910

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Haerpfer_VGI_191053,  
Title = {Grenzregelung mittels des Polarplanimeters},  
Author = {H{"a}rpfer, A.},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen"},  
Pages = {391--401},  
Number = {12},  
Year = {1910},  
Volume = {8}  
}
```



Bekanntlich variieren bei konstanter Länge eines Kurvenclements der Krümmungsradius ρ und die Breite φ gemäß der Gleichung

$$\delta \rho \cdot d\varphi = \rho \cdot \delta d\varphi$$

so daß also selbst kleinen Variationen von $d\varphi$, große Variationen des Krümmungsradius entsprechen. Nun sind aber gerade die Lotabweichungen $\delta d\varphi$ das am schwersten zu bestimmende Messungselement. Um sie einigermaßen zu bestimmen, müßten wenigstens genähert die Gravitationsmaßen auch unterhalb der Beobachtungsstation bekannt sein. Die Isostasie enthebt uns, sofern die Ergebnisse einer Gradmessung in Betracht kommen, dieser Sorge. Es ist ohne weiteres klar, daß die Unkenntnis der Tiefe der Ausgleichsfläche auf die Berechnung der Erdgestalt, nach der Art der konstanten Fehler wirken mußte, so daß bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate besondere Vorsicht nötig wurde. Die bessere Übereinstimmung der errechneten Werte war also der nächste Gewinn. Die für den amerikanischen Bogen geltenden Werte sind

$$a = 6378283 \pm 34 \quad \text{Abplattung } 1 : 297.8 \pm 0.9$$

also die kleine halbe Achse

$$b = 6356868.$$

Zum Vergleiche führen wir das sogenannte Helmerzsche «neuere System» an:

$$a = 6378035 = a_{\text{Bessel}} \left(1 + \frac{1}{10.000} \right)$$

$$\text{Abplattung} = 1 : 299.15 = \text{Bessel}$$

somit

$$b = 6356717,$$

welches sehr gut der europäischen Gradmessung entspricht und dabei den Vorteil hat, daß die mit Bessels ursprünglichen Werten berechneten Tafeln nach einfach zu berechnenden Korrekturen wieder gebrauchsfähig werden. Zum Schlusse möge noch der zurzeit beste Abplattungswert (Helmert 1907) $1 : 298.3 \pm 0.7$ angeführt werden, um die schöne Übereinstimmung der neueren Werte zu dokumentieren. Vergl. hiezu: Helmert, Die Größe der Erde (Berlin, Sitz. 1906, XXVIII).

Grenzregelung mittels des Polarplanimeters.

Von Privat- und Honorar-dozent Dr. A. Haerpfer in Prag.

Zur Regelung einer mehrfach gebrochenen Eigentumsgrenze durch Einführung einer geradlinigen Ersatzgrenze bedient man sich entweder des numerischen oder des graphischen Verfahrens, je nachdem der Wert der in Betracht kommenden Grundstücke einen höheren oder geringeren Grad von Genauigkeit in der Durchführung wünschenswert erscheinen läßt. Bei wertvollen Parzellen, gleichgültig ob von gleicher oder ungleicher Bonität, wird man wohl ausschließlich das numerische Verfahren anwenden, weil hier die Berechnung der auszu-tauschenden Flächen, sowie der Absteckungselemente mit einer Sicherheit erfolgt, die mit der anderen Methode naturgemäß nie erreicht werden kann.

Bei dem numerischen Verfahren mißt man die gebrochene Grenze auf eine Messungslinie auf, die je nach der Bedingung, der die zu bestimmende neue

Grenze entsprechen soll, entweder parallel einer gegebenen Richtung und dann in der endgültigen Grenze angenäherter Lage anzunehmen ist oder durch einen gegebenen Punkt gehen wird. Aus den Koordinaten der Brechungspunkte berechnet man nach den Gaußschen Formeln die Fläche F der zwischen der Messungslinie und der gebrochenen Grenze liegenden, verschränkten Figur.

Je nach dem durch die angenommene Messungslinie erreichten Grad der Annäherung derselben an die endgültige Grenze wird diese Fläche F , die positiv oder negativ ausfallen kann, sich mehr oder weniger ihrem Sollwerte Null nähern. In Fig. 3, (Beilage), z. B. soll die neue Grenze $gk // AC$ sein. Sie wird gegen die Messungslinie de ein Rechteck — genauer ein Trapez wegen der Konvergenz von AB und CD — von der Fläche F abgrenzen müssen, dessen Höhe v aus dieser Fläche und der in der Natur gemessenen Basis de zu berechnen ist. Das Verfahren ist erforderlichen Falles zu wiederholen.

In Fig. 4b (Beilage) geht die neue Grenze durch den gegebenen Punkt P und schließt gegen die Messungslinie PN' ein Dreieck $PN'N$ von der Fläche F' ab. Zur Absteckung des Punktes N der neuen Grenze wird der Abstand $N'N$ berechnet. Hierzu sind zweckmäßig die Koordinaten eines Hilfspunktes R auf EF in bezug auf die Messungslinie, sowie dessen Abstand von N' zu messen. Nunmehr kann man die Fläche F'' des Dreieckes $PN'R$ berechnen, das mit dem Dreieck $PN'N$ eine Seite und einen Winkel gemein hat. Daher ist

$$\overline{N'N} = \frac{F'}{F''} \overline{N'R}. *)$$

Man steckt damit die neue Grenze ab und mißt in bezug auf diese noch einmal zur Probe die rechtwinkligen Koordinaten der Eckpunkte des verschränkten Polygons, für dessen Flächeninhalt sich jetzt der Wert Null ergeben soll.

Die Methode der graphischen Grenzausgleichung, die vermöge ihrer geringeren Genauigkeit bei minder wertvollen Grundstücken in Betracht kommen wird, besteht in dem fortgesetzten Abschneiden von Dreiecken und Verwandeln derselben in solche gleichen Inhalts.

Ein drittes Verfahren, das diesem an Einfachheit weit überlegen ist, ohne sich in der Genauigkeit — namentlich bei einem größeren Verjüngungsverhältnis (1:1000) — allzuweit von ihm zu entfernen, bedient sich zur Lösung der Aufgabe einer Grenzausgleichung eines Polarplanimeters. Davon soll im Nachstehenden die Rede sein.

Theoretisches.

Die theoretische Grundlage ist sofort klar, wenn man von dem Ergebnis der allgemeinen Theorie des Polarplanimeters in der Darstellung von Professor E. Doležal**) ausgeht. Es kommt hier der Fall in Betracht, daß der Pol außerhalb der zu bestimmenden Figur liegt. Darnach ergibt sich die Fläche F der im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers umfahrenen Figur $abcd$ (Fig. 1) als Differenz der Flächensektoren $F_1 = abcPa$ und $F_2 = cPadc$. Es ist

*) Siehe Prof. Dr. Ch. A. Vogler, Geodätische Übungen für Landmesser und Ingenieure, 2. Aufl., Berlin 1899, S. 16.

**) Hartner-Doležal, Handbuch der niederen Geodäsie. 10. Aufl., Wien 1910, S. 1067.

$$F = F_1 - F_2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\varrho_1^2}{2} d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\varrho_2^2}{2} d\alpha = -ar(v_1' - v_2).$$

Hierin bedeuten a die Fahrarmlänge, r den Rollenhalbmesser, v_1 den Wälzungswinkel der Rolle bei Beginn, v_1' jenen am Ende der Umfahrung. Zwischen den Polarkoordinaten ϱ_1 bzw. ϱ_2 und α bestehen die ganz allgemeinen Funktionsbeziehungen:

$$\varrho_1 = \varphi_1(\alpha) \dots \dots \dots 1)$$

als Gleichung des Kurvenzweiges abc und

$$\varrho_2 = \varphi_2(\alpha) \dots \dots \dots 2)$$

als Gleichung des Kurvenzweiges cda .

Setzt man allgemein die Abwälzung

$$v = 2\pi n$$

und nennt die Ablesung am Anfang der Umfahrung n_a , jene an deren Ende n_b , so ist:

$$F = F_1 - F_2 = -2\pi ar(n_b - n_a).$$

Für den praktischen Gebrauch besser geeignet ist die Form:

$$F = F_1 - F_2 = 2\pi ar(n_a - n_b) \dots \dots \dots 3)$$

Wird eine Fläche, wie F in Figur 1, in a beginnend, im Uhrzeigersinn umfahren, so ist beim Polarplanimeter erfahrungsgemäß

$$n_b > n_a,$$

die Differenz $F_1 - F_2$ daher wesentlich negativ. In diesem Sinne ist die größere Sektorenfläche F_1 als negativ, die andere F_2 als positiv anzusehen.

Daran ändert auch die Umfahrung in der der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Richtung nichts. Wir erhalten:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\varrho_2^2}{2} d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\varrho_1^2}{2} d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\varrho_2^2}{2} d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\varrho_1^2}{2} d\alpha = -ar(v_1' - v_1).$$

Daher ist

$$F = F_1 - F_2 = 2\pi ar(n_a - n_b) \dots \dots \dots 4)$$

Beachtet man, daß

$$n_b < n_a,$$

so folgt, daß die Differenz $F_1 - F_2$ wieder wesentlich negativ ist.

Man erkennt daraus, daß die mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmenden Flächensektoren F_1 und F_2 beim Planimeter algebraisch summiert werden.

Die beiden allgemeinen, von einander unabhängigen Gleichungen 1) und 2) enthalten keine einschränkende Bedingung in dem Sinne, daß ein ein- oder mehrfaches Durchkreuzen der beiden Kurvenzweige abc und cda (Fig. 1) unzulässig wäre. Wird daher eine verschränkte Figur $abcd \dots ga$ (Fig. 2) in der Richtung der Pfeile mit einem Polarplanimeter umfahren, wobei wieder dessen

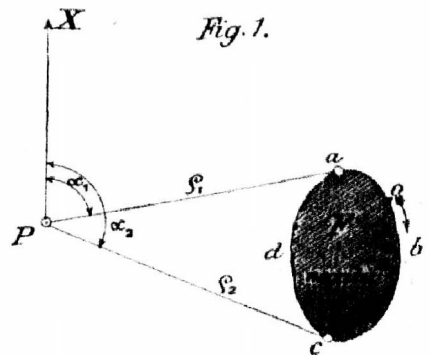


Fig. 1.

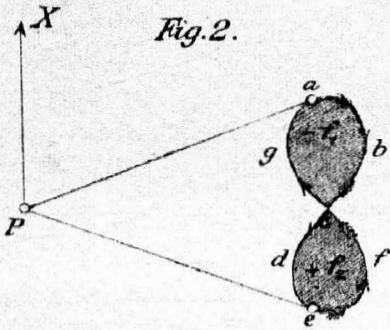
Pol außerhalb der zu bestimmenden Fläche liegen soll, so läßt sich aus der Differenz der Lesungen am Anfang und am Ende der Umfahrung

$$n_a - n_c$$

die algebraische Summe der Flächen der beiden Sektoren:

$$\begin{aligned} -F_1 &= abcdecPa \text{ und} \\ +F_2 &= ePacfcfc \end{aligned}$$

ableiten. Der Ausgangspunkt der Umfahrung ist dabei vollkommen gleichgültig; auch der Kreuzungspunkt c der Kurvenäste kann als solcher benützt werden, wenn man beim Umfahren immer die in Fig. 2 durch die Pfeile angegebene Richtung einhält, also die in sich zurückkehrende Schleife in einem Zuge durchfährt. Denn dadurch wird deren Teil $abcg$ im Uhrzeigersinn, der andere Teil $cfed$ im entgegengesetzten Sinn umfahren.



Hierbei sind zwei Fälle denkbar:

1. Es ergibt sich

$$n_c > n_a.$$

Dann ist im Sinne von Gleichung 3), S. 393, die resultierende Fläche F negativ. Es überwiegt der negative Anteil F_1 :

$$|-F_1| > |+F_2|.$$

Nennt man der Kürze wegen die beiden Sektoren gemeinsame Fläche

$$agcdecPa = F',$$

ferner die Flächen der Schleifen

$$abcg = f_1$$

$$cfedc = f_2,$$

so ist

$$F_1 = F' + f_1$$

$$F_2 = F' + f_2,$$

daher endlich

$$F = F_1 - F_2 = f_1 - f_2 = \text{negativ.}$$

Somit:

$$|-f_1| > |+f_2|.$$

2. Ist $n_c < n_a$, so folgt aus dem vorigen unmittelbar:

$$|-f_1| < |+f_2|.$$

Von diesen Beziehungen kann man bei Grenzausgleichungen zwischen Grundstücken gleicher Bonität praktischen Gebrauch machen.

Die gebrochene Grenze abc (Fig. 3) soll durch eine geradlinige parallel AC ersetzt werden. Man wählt eine Gerade de , von der man annehmen kann, daß sie in der Nähe der endgültigen Grenze liegt. Wird jetzt die verschränkte Fläche

$$dabcced$$

im Sinne der Buchstabenfolge, d. h. im Uhrzeigersinne umfahren, so wird sich z. B. herausstellen, daß

$$n_c < n_a$$

ist. Dann ist nach Gleichung 3), S. 393, der Flächenüberschuß

$$F = -(f + f') + \varphi$$

offenbar positiv.

Da eine Grenzausgleichung bei gleichen Bonitäten nur dann als erreicht zu betrachten ist, wenn durch dieselbe die Flächeninhalte der beteiligten Grundstücke keine Änderung erleiden, so muß F verschwinden. Dazu ist eine Parallelverschiebung von de notwendig, deren Maß v sich als Höhe eines Rechtecks von der bekannten Fläche F und der im Plan zu messenden Grundlinie de berechnen läßt und deren Sinn sich nach dem Vorzeichen von F richtet. In unserem Falle ist F positiv. Es überwiegt der positive Anteil φ , der daher durch die Verschiebung der geradlinigen Grenze von de nach gk , also gewissermaßen nach der positiven Seite von de , um v entsprechend zu verringern ist.

Hätte man bei gleichsinniger Umlaufung $n_c > n_a$ erhalten, so wäre F negativ und es müßte die vorläufige Grenze im entgegengesetzten Sinne, also nach der negativen Seite von de , um v parallel verschoben werden.

Setzt man $de = m$, so ist

$$\frac{\pm F}{m} = \pm v.$$

Das Vorzeichen von v bestimmt also die Seite von de , nach welcher die Verschiebung zu erfolgen hat.

Praktische Beispiele.

In den im Maßstab 1:1000 entworfenen Fig. 4a und 4b ist der mehrfach gebrochene Grenzzug $bcdef$. . . mn die Achse eines aufgelassenen Flußbettes. Der Teil $bcdef$ derselben zwischen $Aabb$ und $CgiD$ (Fig. 4a) ist derart zu verändern, daß die neue Grenze parallel zu AC geht. Dagegen soll an die Stelle der Grenze $fhklmn$ zwischen $CgiD$ und EF (Fig. 4b) eine geradlinige neue Grenze treten, die durch den Punkt P der neuen Grenze MP der Nachbarfigur geht.

Zur Bearbeitung dieser Aufgaben wurde ein Kompensations-Polarplanimeter von Coradi im Eigentum der Lehrkanzle für Geodäsie an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag benützt.

Der Flächenwert der Noniuseinheit für das Verhältnis 1:1000 wurde aus mehrfachen Umdrehungen des Kontrolllineals und bei beiden charakteristischen Lagen des Rollenarmes rechts und links vom Polarme zu $10.02 m^2$ ermittelt.

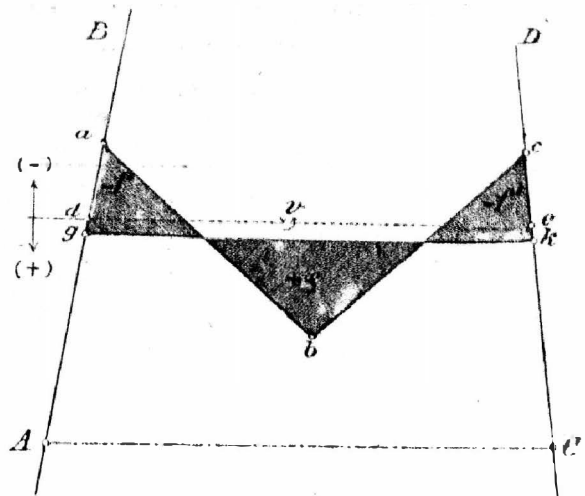


Fig. 3.

I. Zu Fig. 4a sei Nachstehendes bemerkt:

Eine versuchsweise Annahme ergab als vorläufige, genäherte Grenze die Gerade $M'P'$. Die Figur $M'abcdefgP'M'$ wurde bei beiden Stellungen des Rollenarmes je einmal im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers und entgegen diesem umfahren. Hierbei wurden die nachstehenden Ablesungen gemacht und deren Differenzen $\Delta n = n_a - n_e$ bzw. $n_e - n_a$ im Sinne der Gleichung 3), bzw. 4), S. 393, gebildet:

Nummer	Lage des Rollenarmes		Umfahrung		Anfangs- ablesung n_a	End- ablesung n_e	$\Delta n =$ $n_a - n_e$ bzw. $n_e - n_a$
			im Uhr- zeigersinn	entgegen diesem			
1	links	vom Polarme	1	.	1967·3	1958·6	+ 8·7
2			.	1	1958·6	1967·8	9·2
3	rechts		1	.	2758·0	2748·5	9·5
4			.	1	2748·5	2757·5	9·0

Wir erhalten somit eine positive Fläche

$$+ \frac{36 \cdot 4}{4} = + 9 \cdot 1$$

$$F = - (f_1 + f_2) + \varphi_1 = + 9 \cdot 1 \times 10 \cdot 02 = + 91 \cdot 18 \text{ m}^2,$$

die näherungsweise als Parallelogramm mit der Grundlinie $M'P'$ betrachtet und an deren positiven Seite abgesetzt wird.

Die Messung im Plane ergibt: $M'P' = 76 \cdot 9 \text{ m}$. Durch parallele Verschiebung um

$$v_1 = + \frac{91 \cdot 18}{76 \cdot 9} = + 1 \cdot 19 \text{ m}$$

nach der positiven Seite von $M'P'$ kommt die Grenze in die neue Lage MP . Zur Kontrolle wurde die verschränkte Figur $MabcdefgPM$ in beiden Richtungen und bei beiden Rollenarmlagen wiederholt umfahren. Die Ablesungen und deren Differenzen sind in der nachstehenden Tabelle enthalten:

Nummer	Lage des Rollenarmes		Umfahrung		Anfangs- ablesung n_a	End- ablesung n_e	$\Delta n =$ $n_a - n_e$ bzw. $n_e - n_a$
			im Uhr- zeigersinn	entgegen diesem			
1	links	vom Polarme	.	1	2284·3	2284·0	- 0·3
2			.	1	4·0	3·7	- 0·3
3			1	.	3·7	4·4	- 0·7
4			1	.	2284·4	2284·9	- 0·5
5	rechts		1	.	4064·0	4064·0	0
6			1	.	4·0	4·0	0
7			.	1	4·0	3·5	- 0·5
8			.	1	4063·5	4063·0	- 0·5

$$- \frac{2 \cdot 8}{8} = - 0 \cdot 35$$

Die Mehrzahl der Δn ist kleiner als Null. Daher ist noch eine kleine negative Fläche

$$d_1 = -0.35 \times 10.02 = -3.51 \text{ m}^2$$

vorhanden. Diese ließe sich — wenn auch nur zum geringsten Teile — dadurch erklären, daß infolge der Divergenz von Aa und Cg die Fläche des Trapezes $M'P'PM$ um weniges größer ist als die als Parallelogramm behandelte rechnerische Fläche F . Zur Tilgung von d_1 hätte die neue Grenze nochmals um

$$v_1' = -\frac{d_1}{MP} = -\frac{3.51}{77.1} = -0.046 \text{ m},$$

d. h. im Plane um 0.046 mm , nach der negativen Seite von MP parallel verschoben werden müssen. Darauf wurde füglich verzichtet. Dagegen ist jetzt $d_1 = -3.51 \text{ m}^2$ als unvermeidlicher Fehler anzusehen.

II. Die in Fig. 4b dargestellte Grenzausgleichung nimmt ihren Ausgang von dem in Fig. 4a bestimmten Punkte P . Ein erster Versuch wurde mit der näherungsweise angenommenen Geraden PN' unternommen.

Bei der Umfahrung von $Pgfhk\dots nN'P$ wurde genau so vorgegangen wie in Fig. 4a. Die Ablesungen waren:

Nummer	Lage des Rollenarmes		Umfahrung		Anfangs- ablesung n_a	End- ablesung n_c	$\Delta n =$ $n_c - n_a$ bezw. $n_a - n_c$
			im Uhr- zeigersinn	entgegen diesem			
1	rechts links	vom Polarme	1	.	4373.0	4331.0	+ 42.0
2			.	1	4331.0	4374.0	43.0
3			1	.	3083.0	3040.0	43.0
4			.	1	3040.0	3083.0	43.0

$$F = -(f_3 + f_4 + f_5) + (g_2 + g_3) = +42.75 \times 10.02$$

$$F = +428.36 \text{ m}^2.$$

Das ist die Fläche eines Dreieckes, die die endgültige, durch P gehende und auf der positiven Seite von PN' liegende Grenze gegen PN' abschließt. Die Lage der neuen Grenze bestimmt der Punkt N , dessen Abstand von PN' gleich der Höhe v_2 dieses Dreieckes ist:

$$v_2 = +\frac{2F}{PN'}$$

Entnimmt man dem Plane die Länge

$$PN' = 153.3 \text{ m},$$

so ist:

$$v_2 = +\frac{856.72}{153.3} = 5.59 \text{ m}.$$

Wiederholte Kontrollumfahrungen der verschränkten Figur $Pgfhk\dots nN'P$ in beiden Richtungen und bei beiden Lagen des Rollenarmes hatten das nachstehende Ergebnis:

Nummer	Lage des Rollenarmes		Umfahrung		Anfangs- ablesung n_a	End- ablesung n_e	$\Delta n =$ $n_a - n_e$ bezw. $n_e - n_a$
			im Uhr- zeigersinn	entgegen diesem			
1	links	vom Polarme	1	.	2141·0	2139·0	+ 2·0
2			1	.	39·0	39·0	0
3			1	.	39·0	38·0	+ 1·0
4			.	1	38·0	37·0	- 1·0
5			.	1	37·0	39·0	+ 2·0
6			.	1	2139·0	2139·5	+ 0·5
7	rechts	vom Polarme	.	1	2640·0	2638·0	- 2·0
8			.	1	38·0	37·0	- 1·0
9			1	.	37·0	34·5	+ 2·5
10			1	.	34·5	32·0	+ 2·5
11			1	.	27·5	26·0	+ 1·5
12			.	1	2626·0	2623·3	- 2·7
							+ 12·0
							- 6·7
							+ 5·3 : 12 = + 0·44

Das arithmetische Mittel der Δn , d. i.

$$\frac{[\Delta n]}{12} = + 0·44$$

zeigt an, daß eine kleine positive Restfläche

$$d_2 = + 0·44 \times 10·02 = + 4·41 \text{ m}^2$$

zurückgeblieben ist, deren Beseitigung das Absetzen eines Dreieckes von dieser Fläche und der Höhe

$$v_3' = + \frac{2d_2}{PN} = \frac{8·82}{162·7} = + 0·054 \text{ m}$$

nach der positiven Seite von PN erfordert hätte. Darauf mußte mit Rücksicht auf die Kleinheit von v_3' (0·05 mm) verzichtet werden. Es stellt dann $d_2 = + 4·41 \text{ m}^2$ den unvermeidlichen Fehler dar.

Zur Absteckung der neuen Grenzen MP und PN im Felde ist zu bemerken, daß daselbst die Richtungen aA , gC und FE vorhanden und die Punkte a , g und n vermarkt sind. Die im Plane gemessenen Längen aM , gP und nN können daher ohne weiteres im Felde abgesetzt werden. Dadurch ergeben sich hier die Punkte M , P und N der neuen Grenzen und somit — da P gemeinsam ist — diese selbst.

Nach dem obigen Verfahren wurden außerdem zwei weitere Grenzregelungen lediglich zu dem Zwecke durchgeführt, um deren und die früheren Ergebnisse (die unvermeidlichen Restflächen d) einer Genauigkeitsuntersuchung zu unterziehen. Von einer Wiedergabe der Zeichnungen*) zu diesen ähnlich angeordneten Fällen III

*) Im Maßstab 1:1000!

und IV konnte hier abgesehen werden. Bei III war die Richtung der neuen Grenze vorgeschrieben, während sie bei IV durch einen vorgeschriebenen Punkt geht.

Nachdem die neuen Grenzen gefunden waren, wurden Probeumfahrungen der verschränkten Figuren in beiden Richtungen und bei beiden Lagen des Rollenarmes zum Polarme vorgenommen. Die hierbei gemachten Ablesungen sind in den nachstehenden Tabellen zusammengestellt:

Nummer	Lage des Rollenarmes		Umfahrung		Anfangs- ablesung n_a	End- ablesung n_e	$\Delta c = n_a - n_e$ bezw. $n_e - n_a$
			im Uhr- zeigersinn	entgegen diesem			
Zu III:							
1	links	vom Polarme	1	.	8212·0	8210·0	+ 2·0
2			1	.	10·0	11·0	- 1·0
3			.	1	11·0	09·0	- 2·0
4			.	1	8209·0	8210·5	+ 1·5
5	rechts		.	1	1229·0	1229·0	0
6			.	1	29·0	30·0	+ 1·0
7			1	.	30·0	29·7	+ 0·3
8			1	.	1229·7	1229·3	+ 0·4
							+ 5·2
							- 3·0
							+ $\frac{2·2}{8} = + 0·275$
Zu IV:							
1	links	1	.	1666·0	1664·0	+ 2·0	
2		.	1	64	62	- 2·0	
3		.	1	62	62	0	
4		1	.	1662	1662	0	
5	rechts	1	.	3819·0	3819·0	0	
6		1	.	19	20	- 1·0	
7		.	1	14·2	14·2	0	
8		.	1	14·2	13·2	- 1·0	
							- $\frac{2·0}{8} = - 0·25$

Es ist selbstverständlich, daß alle Umfahrungen mit der größten Sorgfalt und unter Beobachtung aller Vorsichtsmaßnahmen (Stellung des Pols in der Breitenachse der Figur und in der Rollenebene, Beginn der Fahrt im Punkte langsamster Rollendrehung etc.) durchgeführt worden sind.

Es ergaben sich die unvermeidlichen Fehler:

$$d_3 = + 0·275 \times 10·02 = + 2·76 \text{ m}^2$$

$$d_4 = - 0·250 \times 10·02 = - 2·51 \text{ m}^2$$

Berechnung eines mittleren Fehlers.

Für eine Grenzausgleichung zwischen zwei Grundstücken gleicher Bonität gilt die Bedingung, daß die abzutretenden und einzuverleibenden Flächenteile einander gleich seien. Nach dem Früheren kann man diese Bedingung auch in der Form aussprechen: die Summe S_p der positiven Flächenanteile muß gleich der Summe S_n der negativen Flächenanteile sein, oder

$$S_n - S_p = 0.$$

An gemessenen Werten G_n und G_p dieser Summen müßten deren wahre Fehler ω_n und ω_p angebracht werden, um dieser Bedingung zu entsprechen:

$$(G_n + \omega_n) - (G_p + \omega_p) = 0.$$

Die Messungsdifferenz

$$G_n - G_p = d$$

hat den wahren Wert Null. Die unvermeidlichen Restflächen d sind daher gleich den Differenzen der wahren Fehler*):

$$d_1 = \omega_p - \omega_n$$

$$d_2 = \omega_p' - \omega_n'$$

$$d_3 = \omega_p'' - \omega_n''$$

$$d_4 = \omega_p''' - \omega_n'''$$

$$\text{Und: } [dd] = [\omega_p \omega_p] + [\omega_n \omega_n] - 2[\omega_p \omega_n].$$

Hierin ist der Durchschnittswert von $[\omega_p \omega_n]$ Null.

Führt man ferner den Mittelwert der wahren Fehler ein und setzt

$$[\omega_p \omega_p] = [\omega_n \omega_n] = n m^2,$$

so ergibt sich der bekannte Ausdruck für den mittleren Fehler aus Beobachtungsdifferenzen

$$m = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}}.$$

Die oben berechneten Werte von d sind aber nicht gleich genau, denn während d_1 der Mittelwert aus 12 Beobachtungen ist, sind die d_2 , d_3 und d_4 aus je acht Beobachtungen hervorgegangen. Demgemäß sind Gewichte einzuführen und ist der mittlere Fehler einer einzelnen Flächenmessung vom Gewicht Eins nach der Formel zu rechnen:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[gdd]}{2n}}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{55.42}{8}} = \pm 2.63 \text{ m}^2.$$

Nr.	d in m^2	g	gdd
1	-3.51	1	12.32
2	+4.41	1.5	29.18
3	+2.76	1	7.62
4	-2.51	1	6.30
			$[gdd] = 55.42$

*) Vergl. hierzu: Prof. Dr. O. Eggert, Einführung in die Geodäsie, Leipzig 1907, S. 35.

Berechnung des relativen Fehlers

Eine andere Art, sich über die bei der Grenzausgleichung mittels des Planimeters erzielte Genauigkeit ein Urteil zu bilden, besteht darin, daß man den Fehlerwert d zur Größe der Tauschfläche $S_p = S_n = S$ in Beziehung bringt.

	d in cm^2	S in cm^2	$\frac{d}{S}$	$\frac{\Delta F'}{F'}$
1	0·035	3·44	$\frac{1}{98}$	$\frac{1}{26}$
2	0·044	13·33	$\frac{1}{303}$	$\frac{1}{100}$
3	0·028	13·65	$\frac{1}{488}$	$\frac{1}{102}$
4	0·025	8·02	$\frac{1}{320}$	$\frac{1}{60}$

Zum Vergleich sind in der letzten Kolonne für dieselben Flächen $F' = S$ die relativen Fehler hinzugefügt, die sich mittels der Fehlergleichung von Hofrat Prof. Dr. Lorber berechnen lassen. Darnach ist der Fehler $\Delta F'$ einer Fläche F' für ein Polarplanimeter

$$\Delta F' = 0\cdot00126 f + 0\cdot00022 \sqrt{F'f} \text{ *)}$$

(f ist der Flächenwert einer Rollenumdrehung, der — ebenso wie F' — in cm^2 einzuführen ist).

Man bemerkt, daß die $\frac{d}{S}$ wesentlich kleiner sind als die $\frac{\Delta F'}{F'}$. Die erreichte Genauigkeit übertrifft also bei weitem jene, welche der Lorber'schen Gleichung entsprochen hätte.

Zum Schluß sei auch festgestellt, daß die Fehler d noch innerhalb der Grenzen liegen, die die österr. Instruktion für Polygonalvermessungen**) für die Berechnung von im Maßverhältnis 1 : 1000 dargestellten Flächen vorschreibt.

Darnach ist noch zulässig:

für eine Fläche	$S_1 = 344 m^2$	ein Maximalfehler von	$4\cdot0 m^2$	($3\cdot5 m^2$)
» » »	$S_2 = 1333$	» » »	$8\cdot6$	($4\cdot4$ »)
» » »	$S_3 = 1365$	» » »	$8\cdot7$	($2\cdot8$ »)
» » »	$S_4 = 802$	» » »	$6\cdot5$	($2\cdot5$ »)

(Die in Klammern beigefügten Zahlen sind die d in m^2).

Man ersieht hieraus, daß die Ergebnisse des planimetrischen Verfahrens auch in dieser Hinsicht durchaus befriedigen.

*) Siehe z. B. Hartner-Doležal, Handbuch der niederen Geodäsie, 10. Aufl. S. 1086.

**) 5. Auflage, 1904.