Paper-ID: VGI_191102

Graphostatische Ausgleichung linear gemessener Figuren

Alfons Cappilleri [1]

[1] *Reichenberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **9** (1), S. 5–14

1911

BibTEX:


```
@ARTICLE{Cappilleri_VGI_191102,
Title = {Graphostatische Ausgleichung linear gemessener Figuren},
Author = {Cappilleri, Alfons},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {5--14},
Number = {1},
Year = {1911},
Volume = {9}
}
```

soll zeigen, daß auch auf geodätischem Gebiete wie auf so manch anderem der österreichische Techniker eine hervorragende Stellung einzunehmen berufen wäre und soll mit dazu beitragen, daß endlich mit der echt österreichischen Indolenz gebrochen wird, welche den schwersten Hemmschuh bildet für unser erfolgreiches Vorwärtsdringen im internationalen Wettbewerb.

Und so hoffen wir zuversichtlich, daß die erste Tagung der österreichischen Geometer von segensreichen Folgen begleitet sein wird für die Allgemeinheit, für die geodätische Wissenschaft und für die Geodäten selbst.

Und wir hoffen auch, daß die neue Institution sich rasch einleben wird, daß der Tagung in Wien nach zweijähriger Pause andere folgen werden, in dem hunderttürmigen Prag, in der Hauptstadt der grünen Steiermark, in der schönen Metropole Galiziens, in der bergumkränzten Hauptstadt Tirols, dem lieblichen Innsbruck, in unserer stolzen Hafenstadt an der Adria usw.

Graphostatische Ausgleichung linear gemessener Figuren.

Von Prof. **A. Cappilleri.**

Die Festlegung einzelner Punkte oder ganzer Figuren mittels linearer Messungen allein gehört fast ausschließlich der niederen Feldmeßkunst an. Man wird sich in solchen minder wichtigen Fällen damit begnügen, die infolge überzähliger Messungen auftretenden Widersprüche empirisch auszugleichen, da die strenge Ausgleichung sehr zeitraubend ist und — wie Jordan (3. Aufl., II. Band, S. 30) meint — nicht die Mühe lohnt. Dagegen ist zu bemerken, daß man sich bei Ausgleichung minder wichtiger Fälle wohl mit einem geringeren Grade der Genauigkeit begnügen kann, daß aber das Prinzip nicht willkürlich aufgestellt werden darf; es soll stets mit dem vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitslehre einzig richtigen Prinzip der kleinsten Quadrate übereinstimmen oder doch ihm möglichst nahekommen. Nun läßt sich aber zeigen, daß die nach der Methode der kleinsten Quadrate vorzunehmende Ausgleichung linear gemessener Figuren auch ohne Rechnung, u. zw. mit Hilfe der Graphostatik bewerkstelligt werden kann. Es ist dies lediglich eine Konsequenz des von Wellisch ausgesprochenen Gedankens der «Fehlerausgleichung nach dem Prinzip des Gleichgewichtes elastischer Systeme» (Wien, 1904).

Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt, daß der Ausdruck $[pvv]$ ein Minimum werde, worin die v die Verbesserungen der gemessenen Längen und die p die zugehörigen Gewichte bedeuten. Als Bedingung hat dabei zu gelten, daß sich die verbesserten Längen vollkommen genau zu einer Figur zusammenfügen lassen, ohne irgendwo Lücken zu lassen, wie es bei den ursprünglichen Längen der Fall wäre. Es kommt nur darauf an, daß diese «Kontinuitätsbedingung» überhaupt erfüllt werde; die Form, in welcher sie zum Ausdruck gelangt, ist gleichgültig. Sind alle Längen s mit demselben Instrument gemessen worden, so entfällt der Instrumentalfehler, es kommt nur der zufällige Fehler in Betracht, welcher der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge proportional ist. Die Gewichte p sind also den gemessenen Längen s verkehrt proportional. Die Bedingung $[pvv]$ = Min. nimmt daher die Form an:

$$\left[\frac{vv}{s}\right] = \text{Min.} \qquad \text{I.}$$

Der Ausdruck $\frac{vv}{s}$ ist aber einer Deutung im Sinne der Mechanik fähig. Man betrachtet die gemessenen Längen s als Stäbe, die zu einem Fachwerk — der aufgenommenen Figur — zusammengesetzt werden sollen. Da bei der Aufnahme auch überzählige Stücke gemessen wurden (z. B. in Fig. 1 die Diagonale I, III), so muß die Zusammensetzung mit einem gewissen Zwange geschehen. Die Stäbe müssen teils gedehnt, teils gestaucht werden, das Fachwerk ist **statisch unbestimmt**. Durch die Längenzuwüchse (Verbesserungen) v entstehen in den Stäben Kräfte P, zu deren Überwindung Arbeit geleistet werden muß. So wird z. B. in dem i-ten Stabe die Arbeit $A_i = \int\limits_0^{v_i} P_i\, d\, v_i$ aufgebracht werden müssen. Nimmt man an, daß das Material der Stäbe dem **Hooke**schen Elastizitätsgesetz gehorcht, so ist $P_i = F_i E_i \cdot \frac{v_i}{s_i}$ (worin F_i den Querschnitt und E_i den Elastizitätsmodul des Stabes bedeutet) und somit

$$A_i = \int\limits_0^{v_i} F_i E_i \frac{v_i\, d v_i}{s_i} = \frac{F_i E_i}{2} \cdot \frac{v_i^2}{s}.$$

Die Summe der in allen Stäben geleisteten Arbeit — die Deformationsarbeit — ist also

$$[A] = \left[\frac{F E v^2}{2 s}\right].$$

Unter der weiteren Annahme, daß alle F und E gleich seien, kann man den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{2} F E$ aus der Summe herausheben und erhält

$$[A] = \frac{FE}{2}\left[\frac{v^2}{s}\right], \text{ somit } \left[\frac{v^2}{s}\right] = \frac{2}{FE}[A].$$

Die Bedingung I nimmt dann die Form an $\frac{2}{FE}[A]$ = Min., oder nach Unterdrückung des konstanten Faktors $\frac{2}{FE}$:

$$[A] = \text{Min.} \qquad \text{II.}$$

Die Bedingung, daß die Summe der Deformationsarbeiten unter Beibehaltung der Kontinuität des Systems ein Minimum werde, ist aber nach dem Lehrsatze **Castiglianos** das Kennzeichen dafür, daß sich das System nach erfolgter Deformation im Gleichgewicht befindet. **Die nach der Methode der kleinsten Quadrate mit $p_i = \frac{1}{s_i}$ ausgeglichene Figur ist also mit der Gleichgewichtslage identisch, welche das aus Stäben von den gegebenen Längen s und konstantem Querschnitt und Elas-**

tizitätsmodul zwangsweise zusammengesetzte Fachwerk annehmen würde. Das Aufsuchen der Gleichgewichtslage, bzw. der dabei auftretenden Stabkräfte und Längenänderungen ist aber eine Aufgabe, welche der Mechanik angehört und mit Hilfe graphischer Methoden gelöst werden kann, wie an den folgenden Beispielen gezeigt werden soll.

I. Beispiel.*)

Von einem Viereck wurden die vier Seiten $s_1 = 22{\cdot}4\ m$, $s_2 = 30{\cdot}2\ m$, $s_3 = 29{\cdot}8\ m$, $s_4 = 27{\cdot}6\ m$ und beide Diagonalen $s_5 = 44{\cdot}0\ m$, $s_6 = 32{\cdot}4\ m$ gemessen. In Fig. 1 wurde mit Hilfe der Stücke s_1 bis s_5 das Viereck I, II, III, IV

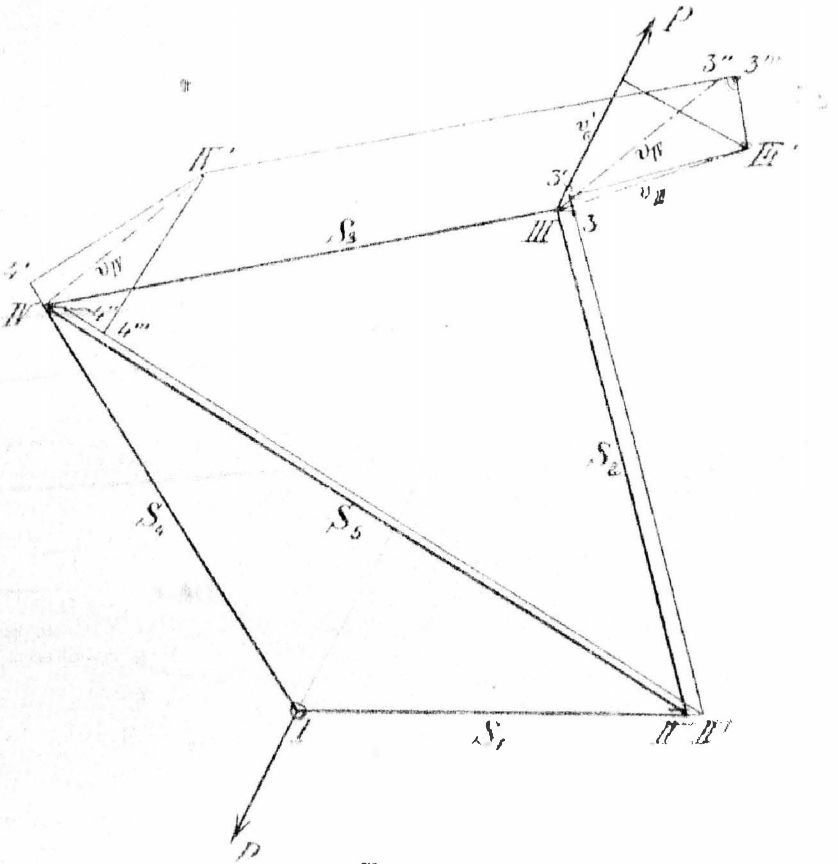

Fig. 1.

im Maßstabe 1 : 500 aufgetragen. Die Diagonale I, III dieses Vierecks besitzt, wie zu erwarten, nicht die Länge $s_6 = 32{\cdot}4\ m$, sondern es ergibt sich aus der Zeichnung I, III $= 32{\cdot}35\ m$ (genauer durch Rechnung $32{\cdot}3478\ m$). Man muß also, um die Diagonale $s_6 = 32{\cdot}4\ m$ in das Fachwerk einfügen zu können, letzteres durch zwei in I und III angreifende gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte P auseinander ziehen. Dadurch werden in den Stäben Kräfte hervorgerufen, die mittels des Kräfteplanes (Fig. 2) bestimmt werden können.

*) Aus dem „Lehrbuch der kleinsten Quadrate" von Dr. K. Schwering, Freiburg i. B. 1909, wo die Ausgleichung rechnungsmäßig (und zwar mit $p = 1$) durchgeführt wird.

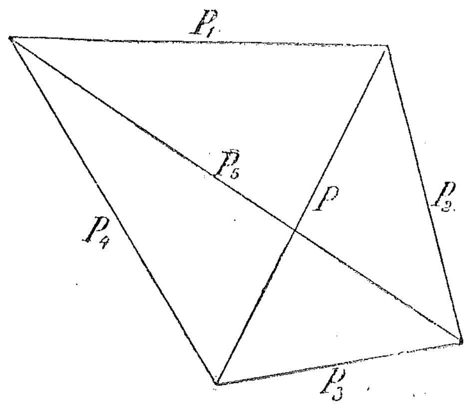

Fig. 2.

Man trägt zunächst P in einem beliebigen Maßstabe (z. B. $P = \frac{1}{2}\,dm$) nach Größe und Richtung auf, zieht durch ihre Endpunkte Parallele zu s_4 und s_1 bis zu ihrem Schnitt und erhält so die in s_4 und s_1 auftretenden Stabkräfte P_4 bzw. P_1. Auf entsprechende Weise erhält man auch P_2, P_3 und schließlich P_5. Die Richtigkeit dieses Verfahrens geht daraus hervor, daß die in einem beliebigen Punkte der Figur 1 angreifenden Kräfte (z. B. P, P_4 und P_1) in Figur 2 einen geschlossenen Zug bilden, was das Kennzeichen dafür ist, daß in dem betreffenden Punkte Gleichgewicht herrscht. Aus Figur 2 bekommt man durch Abgreifen auf dem Kräftemaßstab ($P = \frac{1}{2}\,dm$) die Stabkräfte

$$P_1 = +\,1{\cdot}01\,P,\ P_2 = +\,0{\cdot}80\,P,\ P_3 = +\,0{\cdot}66\,P,\ P_4 = +\,1{\cdot}05\,P,\ P_5 = -\,1{\cdot}44\,P.$$

(In dieser Angabe wurden, wie allgemein üblich, Zugkräfte mit plus und Druckkräfte mit minus bezeichnet.) Nun ergeben sich die durch jene Stabkräfte $P_1 \ldots P_5$ hervorgerufenen Verlängerungen, und zwar wenn man F und E gleich Eins annimmt, die Verlängerung

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{von } s_1 & \text{als } v_1 = P_1\,s_1 = +\,1{\cdot}01\,P\,.\,22{\cdot}4 = +\,22{\cdot}62\,P \\
\text{»} \quad s_2 & \text{»} \quad v_2 = P_2\,s_2 = +\,0{\cdot}80\,P\,.\,30{\cdot}2 = +\,24{\cdot}16\,P \\
\text{»} \quad s_3 & \text{»} \quad v_3 = P_3\,s_3 = +\,0{\cdot}66\,P\,.\,29{\cdot}8 = +\,19{\cdot}67\,P \\
\text{»} \quad s_4 & \text{»} \quad v_4 = P_4\,s_4 = +\,1{\cdot}05\,P\,.\,27{\cdot}6 = +\,28{\cdot}98\,P \\
\text{»} \quad s_5 & \text{»} \quad v_5 = P_5\,s_5 = -\,1{\cdot}44\,P\,.\,44{\cdot}0 = -\,63{\cdot}36\,P
\end{array}\right\} \qquad \text{III.}$$

Aus diesen Verlängerungen kann man mit Hilfe des sogenannten **Verschiebungsplanes** die Verlängerung von I, III ableiten. Um die Entstehung des Verschiebungsplanes zu erläutern, sei zunächst die in Fig. 1 skizzierte Darstellung besprochen, bei welcher die Verschiebungen, die in Wirklichkeit verschwindend klein sind, sehr stark vergrößert wurden.

Punkt I ist als unverschieblich gedacht. (Festes Lager.)

Punkt II verschiebt sich infolge der Änderung von s_1 um v_1 nach II' (Gleit- oder Rollenlager).

Punkt IV. Es verschiebt sich wegen Änderung

von s_1 der Punkt IV um v_1 nach $4''$, (II $4''$ ⧺ II IV)

» s_5 » » $4''$ » v_5 » $4'''$,

» s_4 » » IV » v_4 » $4'$.

$4'''$ kreist um II′ }
$4'$ » » I } (erscheint im ∞ Kleinen als Senkrechte).

Der Schnittpunkt IV′ dieser zwei Senkrechten ist die neue Lage von IV.

Punkt III. Es verschiebt sich, wie wir gesehen haben, IV um v_{IV} nach IV′, folglich (um ein gleiches Stück und parallel) III nach $3''$, ferner wegen Änderung

von s_3 der Punkt $3''$ um v_3 nach $3'''$,

» s_1 » » II » v_1 » $2''$, II′

» s_1 » » III » v_1 » 3,

» s_2 » » 3 » v_2 » $3'$.

$3'''$ beschreibt einen Kreis um IV′ }
$3'$ » » » » II′ } (erscheint im ∞ Kleinen als Senkrechte.)

Der Schnittpunkt III′ dieser zwei Senkrechten ist die neue Lage von III. Die Diagonale I III hat sich nach I III′ verschwenkt. Um die Längenänderung zu bestimmen, dreht man III′ um I zurück, wobei der Kreis wieder als Senkrechte auf I III erscheint. Man erhält dadurch die Verlängerung v_6' des Abstandes I III.

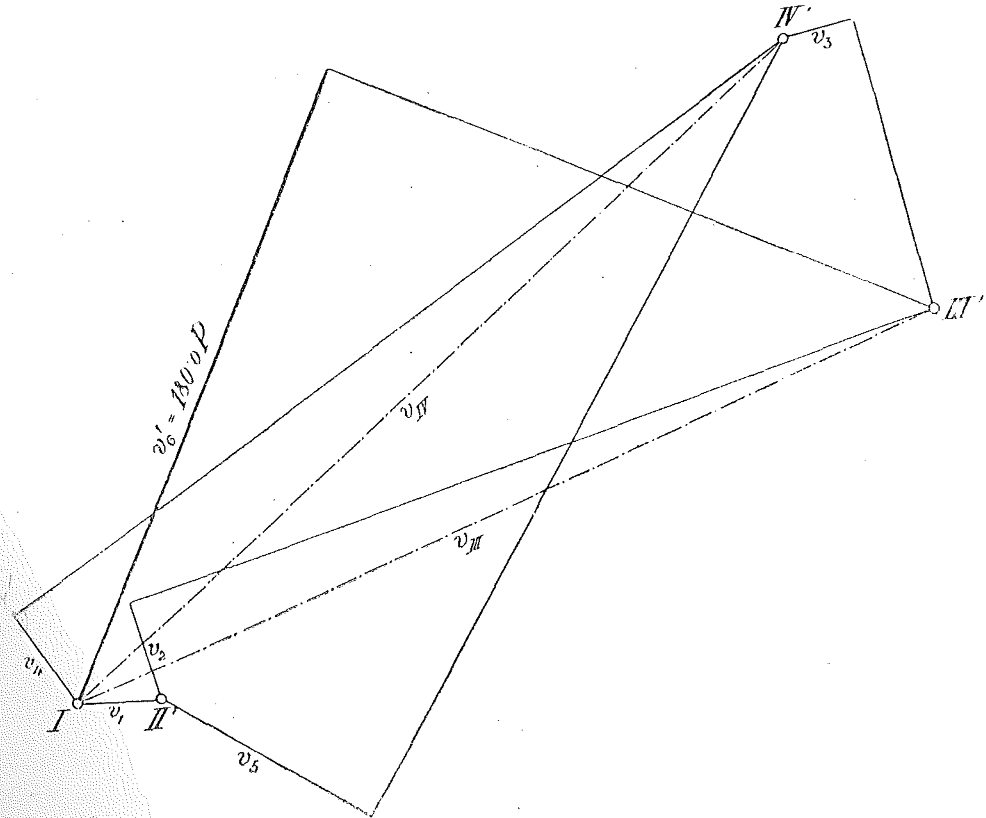

Fig. 3.

Das Verfahren läßt sich dadurch vereinfachen, daß man die Verschiebungsfiguren, welche von II nach II', von IV nach IV' und von III nach III' führen, von der Figur 1 ablöst und so zusammenlegt, daß die Anfangspunkte I, II, III und IV aufeinander fallen. Es entsteht dadurch der in Figur 3 im Maßstabe $1\,P = \frac{1}{2}\,mm$ dargestellte übliche Verschiebungsplan. Man trägt vom Punkte I an die Verschiebung v_1 auf (als Dehnung vom Anfangspunkte weg, also hier nach rechts) und kommt so zum Punkte II'. Dann trägt man von I = IV aus die Verschiebung v_4 auf (Drehung, nach links aufwärts) und errichtet darauf im Endpunkte eine Senkrechte; ferner von II' aus die Verschiebung v_5 (als Stauchung zum Anfangspunkte hin, also hier nach rechts abwärts) und errichtet die Senkrechte. Im Schnittpunkt beider Senkrechten ergibt sich IV'. Die Verbindungslinie v_{IV} von I = IV und IV' gibt der Größe und Richtung nach die Verschiebung des Punktes IV an. Die Verschiebung des Punktes III wird aus II' und IV' abgeleitet, so wie in Figur 1 Punkt III aus IV konstruiert wird. Man trägt von II' an die Verschiebung v_2 auf (Dehnung, nach links aufwärts) und errichtet die Senkrechte; ferner von IV' an die Verschiebung v_3 (Dehnung, nach rechts aufwärts) und errichtet die Senkrechte. Im Schnittpunkt beider Senkrechten ergibt sich III'. Die Verbindungslinie v_{III} von I = III und III' gibt nach Größe und Richtung die Verschiebung des Punktes III an. Da es sich aber in letzter Linie nicht um die Verschiebung des Punktes III, sondern um die Veränderung des Abstandes I III handelt, so muß man v_{III} auf die Richtung I III projizieren. Man zieht also von I eine Parallele zu I III, fällt darauf von III' eine Senkrechte und erhält so die Verlängerung v_6' von I III, die sich nach dem Maßstabe zu $180{\cdot}0\,P$ ergibt.

Denkt man sich die Diagonale s_6 in der ursprünglich gemessenen Länge von $32{\cdot}4\,m$ in das Fachwerk (Fig. 1) zwangsweise eingefügt, so ist die Anbringung der äußern Kräfte P überflüssig, da ihre Wirkung durch die Reaktion der zusammengedrückten Diagonale ersetzt wird. In der Diagonale s_6 herrscht also die Druckkraft P, und die Zusammendrückung v_6 der Diagonale beträgt nach dem Elastizitätsgesetz $v_6 = s_6 \,.\, P = 32{\cdot}4\,P$. Die Verlängerung v_6' des Ab-

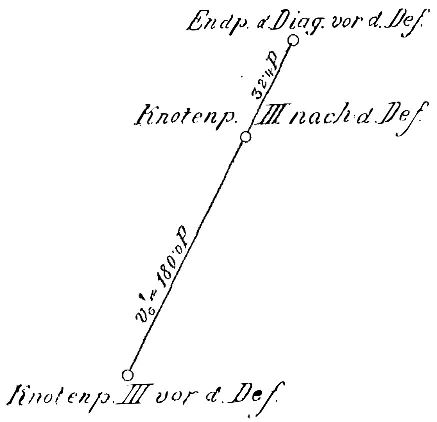

Fig. 4.

standes I III wurde mit $180 \cdot 0\, P$ bestimmt. Beide Größen v_6' und v_6 geben zusammengenommen — wie es in Figur 4 anschaulich gemacht wurde — den Unterschied zwischen der undeformierten Diagonale $32 \cdot 4$ und dem Abstande I III = $32 \cdot 3478$ vor der Deformation. Es muß also

$$180 \cdot 0\, P + 32 \cdot 4\, P = 32 \cdot 4 - 32 \cdot 3478 = 0 \cdot 0522 \quad \ldots\ldots \text{IV.}$$

Daraus folgt

$$P = 0 \cdot 0522 : 212 \cdot 4 = 0 \cdot 0002457.$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung III ein, so kommt

$$v_1 = +\, 0 \cdot 0056\, m, \quad v_2 = +\, 0 \cdot 0059\, m, \quad v_3 = +\, 0 \cdot 0048\, m,$$
$$v_4 = +\, 0 \cdot 0071\, m, \quad v_5 = -\, 0 \cdot 0156\, m, \quad v_6 = -\, 0 \cdot 0080\, m.$$

Letzterer Wert gibt die Verlängerung der Diagonale s_6 an, nach dem Ansatze $v_6 = s_6 \,.\, P = 32 \cdot 4\, P$; die Verlängerung v_6' des Abstandes I III ist hingegen $v_6' = 180 \cdot 0 \,.\, P = +\, 0 \cdot 00442\, m$.

Wegen der vielen graphischen Operationen werden die hier bestimmten Verbesserungen v mit Fehlern behaftet sein, die man im Mittel auf 1—2% des Wertes schätzen kann. Das graphische Verfahren bietet also eine Genauigkeit, die praktisch vollkommen hinreicht. Von weit größerem Einfluß als die Fehler, die durch Ungenauigkeiten im Ziehen von Parallelen und Senkrechten, im Abgreifen und Auftragen entstehen, ist der Fehler, welcher durch eine Unrichtigkeit in der Bestimmung des «Widerspruches» (der Differenz zwischen dem Abstande I III und der in der Natur gemessenen Diagonale s_6) erzeugt wird. Würde man z. B. die in Fig. 1 abgemessene Länge I, III = $32 \cdot 35$ zugrunde legen, so bekäme man statt IV:

$$180 \cdot 0\, P + 32 \cdot 4\, P = 32 \cdot 4 - 32 \cdot 35 = 0 \cdot 05 \text{ (statt } 0 \cdot 0522\text{).}$$

Dadurch würden P und alle v im selben Verhältnis, und zwar um $4 \cdot 4\%$ kleiner werden. Der Unterschied zwischen der abgegriffenen und der berechneten Distanz, der hier zufälligerweise bloß $32 \cdot 35 - 32 \cdot 3478 = 0 \cdot 0022$ beträgt, hätte aber leicht viel größer sein können, so daß man in Zweifel gerät, ob man den abgegriffenen Wert von I, III verwenden dürfe. Wenn es sich um die zahlenmäßige Ausgleichung der s und Korrektur der Koordinaten handelte, so müßte man allerdings die Entfernung I III berechnen. In den praktisch allein vorkommenden Fällen, wo die bereits aufgetragene Figur 1 wegen Nichtstimmens der Kontrollmessung I, III verbessert werden soll, muß man hingegen die vom Plane abgegriffene Distanz I III, also hier $32 \cdot 35\, m$, verwenden. Dadurch verwandelt sich Gleichung IV in

$$180 \cdot 0\, P + 32 \cdot 4\, P = 32 \cdot 40 - 32 \cdot 35 = 0 \cdot 05.$$

Daraus folgt $P = 0 \cdot 000235$ und

$$v_1 = +\, 0 \cdot 0054\, m, \quad v_2 = +\, 0 \cdot 0056\, m, \quad v_3 = +\, 0 \cdot 0046\, m,$$
$$v_4 = +\, 0 \cdot 0068\, m, \quad v_5 = -\, 0 \cdot 0149\, m, \quad v_6 = -\, 0 \cdot 0077\, m.$$

Um die Verschiebungen der einzelnen Punkte zu bestimmen, muß man die aus Fig. 3 abgegriffenen Werte v_{II}, v_{III} und v_{IV} mit $P = 0 \cdot 000235$ multiplizieren. So erhält man z. B. $v_{IV} = 255 \cdot 6\, P = 0 \cdot 060\, m$. Der Punkt IV in Fig. 1 wäre nun parallel zur Linie v_{IV} um 0·060 zu verschieben, was allerdings im Maßstabe 1 : 500 nicht möglich ist.

Daß die hier ermittelten Verbesserungen mit den von Schwering bei der Annahme $p = 1$ berechneten Werten

$$v_1 = +\,0{\cdot}0084\,m,\quad v_2 = +\,0{\cdot}0065\,m,\quad v_3 = +\,0{\cdot}0055\,m,$$
$$v_4 = +\,0{\cdot}0088\,m,\quad v_5 = -\,0{\cdot}0082\,m,\quad v_6 = -\,0{\cdot}0119\,m$$

nicht übereinstimmen können, ist selbstverständlich.

II. Beispiel.

In dem Sechseck I, II, III, IV, V, VI (Fig. 5) wurde gemessen:

$$s_1 = 29{\cdot}85\,m,\quad s_2 = 32{\cdot}32\,m,\quad s_3 = 43{\cdot}38\,m,\quad s_4 = 41{\cdot}80\,m,\quad s_5 = 65{\cdot}75\,m,$$
$$s_6 = 49{\cdot}18\,m,\quad s_7 = 41{\cdot}22\,m,\quad s_8 = 39{\cdot}86\,m,\quad s_9 = 32{\cdot}25\,m,\quad s_{10} = 97{\cdot}00\,m.$$

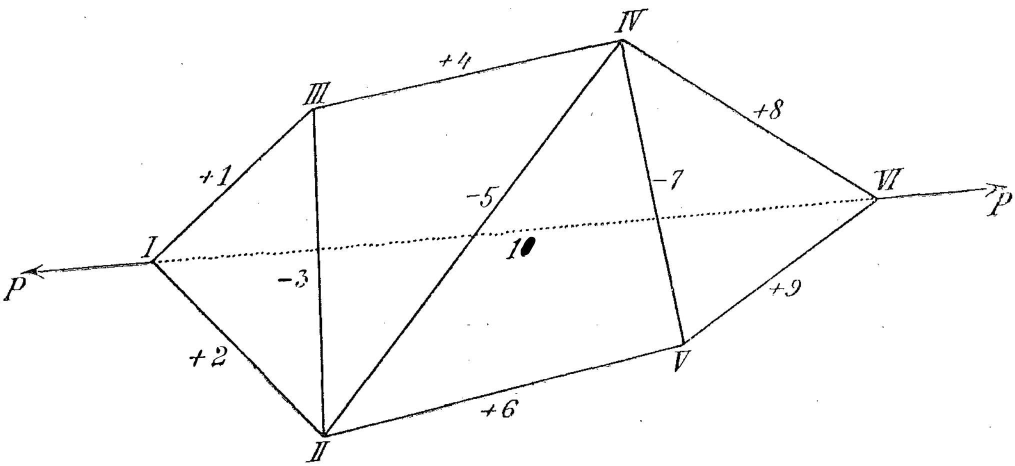

Fig. 5.

Das Sechseck wurde mit Hilfe der Stücke s_1 bis s_9 im Maßstabe 1 : 1000 konstruiert, s_{10} wurde nicht zur Konstruktion verwendet, sondern dient nur zur Kontrolle, bezw. zur Ausgleichung des Widerspruchs, der sich zwischen diesem Naturmaß und der auf dem Plane abgegriffenen Distanz I—VI = 96·60 m herausstellt. Der Vorgang, der bei der Ausgleichung eingehalten wird, ist im Wesent-

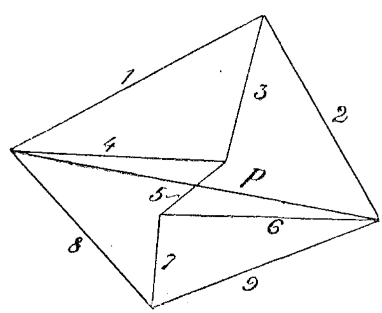

Fig. 6.

lichen derselbe wie im ersten Beispiel. Man bringt bei I und IV die Kräfte P an und entwirft in Fig. 6 den Kräfteplan im Maßstabe $1\ P = \frac{1}{2}\,dm$, bei welchem die Kräfte mit denselben Nummern beschrieben wurden, welche den betreffenden Stäben in Fig. 5 zukommen. (+ bedeutet Zug, — Druck.) Es ergibt sich durch Abmessen in Figur 6: $P_1 = +0{\cdot}767\,P$, $P_2 = +0{\cdot}616\,P$, $P_3 = -0{\cdot}398\,P$, $P_4 = +0{\cdot}579\,P$, $P_5 = -0{\cdot}230\,P$, $P_6 = +0{\cdot}583\,P$, $P_7 = -0{\cdot}238\,P$, $P_8 = +0{\cdot}557\,P$, $P_9 = 0{\cdot}646\,P$. Nimmt man wieder den Elastizitätsmodul und den Querschnitt jedes Stabes als Eins an, so erhält man die Verlängerungen der Stäbe nach der Formel: $v_i = P_i \,.\, s_i$, also hier: $v_1 = +22{\cdot}90\,P$, $v_2 = +19{\cdot}90\,P$, $v_3 = -17{\cdot}26\,P$, $v_4 = +24{\cdot}20\,P$, $v_5 = -15{\cdot}12\,P$, $v_6 = +28{\cdot}67\,P$, $v_7 = -9{\cdot}81\,P$, $v_8 = +22{\cdot}20\,P$, $v_9 = +20{\cdot}83\,P$.

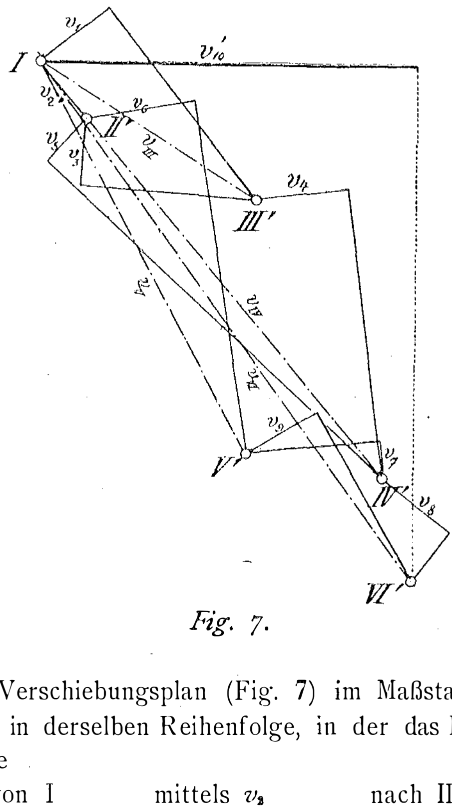

Fig. 7.

Jetzt wird der Verschiebungsplan (Fig. 7) im Maßstabe $1\ P = \frac{1}{2}\,mm$ konstruiert. Man gelangt in derselben Reihenfolge, in der das Polygon (Fig. 5) von I aus konstruiert wurde

von	I		mittels	v_2			nach	II'
»	II'	und I	»	v_3	und	v_1	»	III'
»	III'	» II'	»	v_4	»	v_5	»	IV'
»	IV'	» II'	»	v_7	»	v_6	»	V'
»	V'	» IV'	»	v_9	»	v_8	»	VI'.

Die Verbindungslinien I II', I III', I IV', I V', I VI' geben die Verschiebungen v_{II}, v_{III}, v_{IV}, v_V, v_{VI} der Punkte II, III, IV, V, VI nach Größe und Richtung an. Um auf die Verlängerung v_{10}' von I, VI zu kommen, muß man v_{VI} auf die Richtung I VI projizieren, wodurch man $v_{10}' = 99{\cdot}6\,P$ erhält. Die Verkürzung v_{10}, welche die Diagonale s_{10} nach erfolgter Einführung erleiden wird, ist $v_{10} = s_{10} \,.\, P = 97{\cdot}0\,P$.

Für v_{10}', v_{10} und den Widerspruch $w_{10} = 97{\cdot}00 - 96{\cdot}60 = 0{\cdot}40$ muß (wie im vorigen Beispiel) die Beziehung $v_{10}' + v_{10} = w_{10}$ bestehen. Es ist also $99{\cdot}6\,P + 97{\cdot}0\,P = 0{\cdot}4$, und daraus folgt

$$P = 0{\cdot}4 : 196{\cdot}6 = 0{\cdot}00203.$$

Mit diesem Werte lassen sich die bereits durch P ausgedrückten Verschiebungen v berechnen:

$v_1 = +0{\cdot}046\,m$, $v_2 = +0{\cdot}040\,m$, $v_3 = -0{\cdot}035\,m$, $v_4 = 0{\cdot}049\,m$, $v_5 = -0{\cdot}031\,m$, $v_6 = +0{\cdot}058\,m$, $v_7 = -0{\cdot}020\,m$, $v_8 = +0{\cdot}045\,m$, $v_9 = +0{\cdot}042\,m$, $v_{10} = -0{\cdot}202\,m$.

Wenn man das Sechseck mit den korrigierten Stablängen $s_1 + v_1$ bis $s_9 + v_9$ konstruiert, so wird die Diagonale I VI mit dem ausgeglichenen Werte $s_{10} + v_{10}$ wahrscheinlich nicht stimmen. Es ist daher besser, die Punkte II . . . VI um die aus Fig. 7 zu entnehmenden Größen $v_{II} = v_2 = 0{\cdot}04\,m$, $v_{III} = 77{\cdot}2\,P = 16\,cm$, $v_{IV} = 141{\cdot}6\,P = 29\,cm$, $v_V = 115{\cdot}8\,P = 23\,cm$, $v_{VI} = 167{\cdot}4\,P = 34\,cm$ zu verschieben. Im Maßstabe 1 : 1000 können die Verschiebungen kaum zum Ausdruck gebracht werden, wenigstens nicht im Druck. Um die Abweichung der ausgeglichenen von der ursprünglich aufgetragenen Figur anschaulich zu machen, wurden die Verschiebungen in zwanzigfach vergrößertem Maße aufgetragen und das erhaltene Sechseck so verschwenkt, daß I VI' in die Richtung I VI fällt

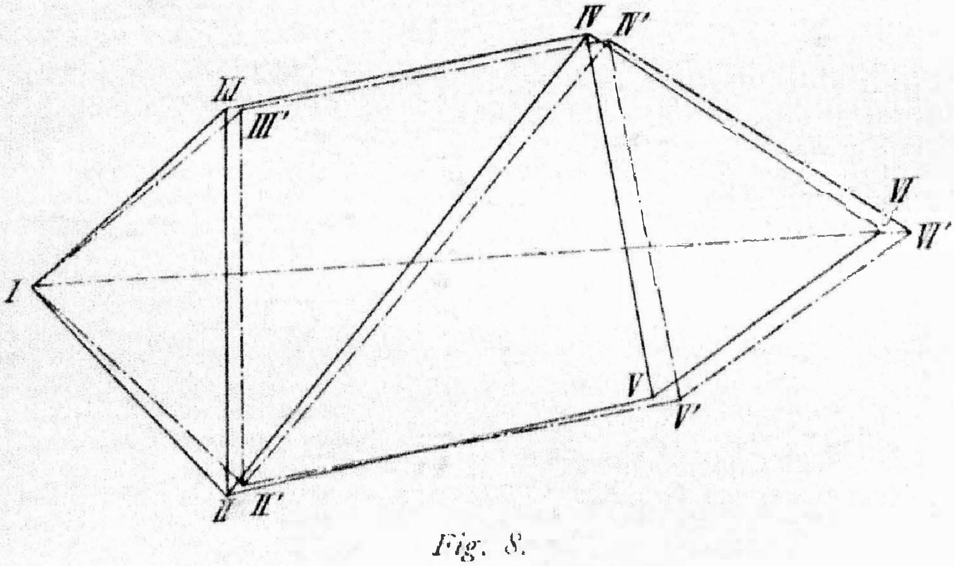

Fig. 8.

(Fig. 8). Man bemerkt, daß durch die Ausgleichung die Figur in der Richtung der zu lang gefundenen Kontrolldiagonale I VI gestreckt, in der Querrichtung zusammengedrückt wurde. Genaues läßt sich aber darüber nicht sagen, so daß es immer eine schwierige Sache sein wird, eine derartige Ausgleichung »nach dem Gefühl« vorzunehmen, wenn auch durch die Vorstellung der elastischen Deformation der Sinn der notwendigen Veränderungen im großen Ganzen angegeben erscheint.