Zur neuen Ausgabe der Gauß'schen "Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie"

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Bauinspektor der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **9** (1), S. 15–18

1911

Zur neuen Ausgabe der Gauß'schen „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie".

Von S. Wellisch.

Von Ostwald's Klassikern der exakten Wissenschaften ist unter Nr. 177 die von Professor Dr. Johannes Frischauf, Leipzig 1910, besorgte neue Ausgabe der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" von Carl Friedrich Gauß erschienen. Bei der hohen Bedeutung, welche diesen „Untersuchungen" im Gebiete der angewandten Mathematik beigemessen werden muß, sei es gestattet, diesem klassischen Werke ein Begleitwort mitzugeben.

Die von Gauß im Anschlusse an seine Hannover'schen Triangulationen angestellten theoretischen Untersuchungen sind in zwei Abhandlungen niedergelegt, die in den Jahren 1843 und 1846 in Göttingen erschienen. Den Hauptinhalt der ersten Abhandlung bildet die Methode der konformen oder winkeltreuen Übertragung eines Dreiecksnetzes von der Oberfläche eines Umdrehungsellipsoids auf die Oberfläche einer Kugel und umgekehrt. Die konforme Abbildung oder Übertragung ist eine solche Abbildungsart, bei welcher das Verzerrungs- oder Vergrößerungsverhältnis in jedem Punkte der Fläche nach allen Richtungen dasselbe bleibt, so daß die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so dargestellt werden, daß das Abbild dem Urbild in den kleinsten (unendlich kleinen) Teilen ähnlich wird. Hiebei ist zu bemerken, daß bei konformer Darstellung die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen nur ausnahmsweise die Ähnlichkeit in den endlichen Teilen bedingt, während bei äquivalenter Darstellung die Flächengleichheit in den kleinsten Teilen auch Flächengleichheit in den endlichen Teilen erzeugt.

Das Vergrößerungsverhältnis, das den Unterschied in den Längen der auf beiden Flächen dargestellten, einander entsprechenden unendlich kleinen Linien angibt, ist im allgemeinen an jeder Stelle ein anderes, weshalb die Ähnlichkeit in allen endlichen Teilen nur in dem speziellen Falle zu erreichen möglich ist, wenn die erste Fläche auf einer ihr ähnlichen Fläche abgewickelt wird. In Mercador's Projektion, die ebenso wie die stereographische Projektion eine konforme Übertragung der ganzen Kugeloberfläche auf die Ebene darstellt, wächst das Vergrößerungsverhältnis mit der Entfernung der betreffenden Stelle vom Äquator; in der stereographischen Projektion wächst sie mit der Entfernung vom Augpunkte. Bei der Gauß'schen konformen Projektion erfolgt die geodätische Übertragung eines nur mäßig ausgedehnten Teiles der Ellipsoidoberfläche auf die Kugeloberfläche derart, daß innerhalb des darzustellenden Gebietes die Ungleichheiten des Vergrößerungsverhältnisses auf ein Minimum gebracht erscheinen. Es beträgt nämlich innerhalb einer Zone von fünf Breitengraden die Veränderlichkeit des Vergrößerungsverhältnisses nur $1 : 5{,}800.000 = 0{\cdot}0^{6}18$.

Auf einer sphäroidischen Fläche kann man bekanntlich eine Länge (Grundlinie) streng genommen nicht in einer sogenannten „geodätischen Linie", d. i. die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf einer Fläche, messen; bei der praktischen Längenmessung einer Dreiecksseite wird diese nur in der Vertikalebene gemessen. Für schärfere geodätische Berechnungen sind aber die Vertikalschnitte ungeeignet, weil zwischen zwei gegebenen Punkten A und B der Sphäroidoberfläche die Ebene durch die Normale von A und durch den Punkt B verschieden ist von der Ebene durch den Punkt A und die Normale von B. -- Der durch Messung erhaltene Winkel eines Dreiecks bestimmt die Neigung der in der Normale des Beobachtungspunktes sich schneidenden Normalebenen nach den beiden anvisierten Dreieckspunkten. Ein beobachtetes Azimut fällt mit dem astronomischen Azimut zusammen und ist daher von dem sogenannten geodätischen Azimut verschieden. Sowohl die Längen- als die Winkelmessungen stehen also mit der geodätischen Linie in keiner direkten Beziehung.

Will man aber auf dem Erdsphäroid ein Dreieck, dessen Eckpunkte gegeben sind, bilden, um dieses sphäroidische Dreieck zur Abbildung zu bringen, so kann dies dadurch geschehen, daß man die Eckpunkte durch eindeutig difinierte Linien verbindet, als welche in der höheren Geodäsie allgemein die kürzesten oder geodätischen Linien gewählt werden.

In der ersten Abhandlung ist nun die Theorie aller Rechnungen entwickelt, die notwendig sind, um eine konforme Übertragung zur Berechnung eines Systems von Dreiecken auszuführen.

Ist zur Berechnung trigonometrischer Vermessungen ein System von sphäroidischen Dreiecken, deren Seiten geodätische Linien sind, im Wege konformer Übertragung auf die Kugelfläche durch ein Abbild darzustellen, so werden die abgebildeten Winkel den abzubildenden Winkeln, dem Begriffe der Winkeltreue entsprechend, vollkommen genau gleich sein müssen, während die Seiten nur annähernd einander gleich sein können. Ist es nun gestattet, diese Abweichungen innerhalb einer mäßig ausgedehnten Zone als verschwindend klein zu betrachten, so kann man, wenn eine sphäroidische Dreiecksseite auf die Kugelfläche übertragen ist, das ganze Dreieckssystem mittels der Winkel ohne Einbuße für die äußerste Schärfe der Ergebnisse so berechnen, als wenn es auf der Sphäre selbst läge. Die Berechnung eines Dreiecksystems auf der Kugel umfaßt dann folgende Arbeiten:

1. Die Ausgleichung der Winkel unter Berücksichtigung aller sich darbietenden Bedingungsgleichungen,
2. Die Berechnung aller Dreiecksseiten,
3. Die Bestimmungen der Längen und Breiten der Dreieckspunkte und der Azimute der Dreiecksseiten.

Um sodann die unter 3) ermittelten Stücke von der Kugelfläche auf das Sphäroid wieder zurückzuführen, kann man sich der von Gauß zu diesem Zwecke entwickelten Formeln oder einer im voraus berechneten Hilfstafel bedienen, wie solche Gauß 1843 und ausführlicher Schreiber 1897 geliefert haben. Sind hingegen die oben erwähnten Abweichungen nicht so geringfügig, daß sie ohne weiteres vernachlässigt werden dürfen, so müssen alle aus der Messung hervorgegangenen Winkel vor der sphärischen Dreiecksberechnung erst noch einer kleinen Reduktion unterzogen werden, welche Nebenarbeit aber in den meisten praktischen Fällen wird unterbleiben können. Gauß hat auch die nötigen Formeln für diese Reduktionsaufgabe entwickelt, damit man, „wenn man jene Reduktion berücksichtigen will, alles zu ihrer schärfsten Berechnung nötige bereit finde, oder wenn man sie nicht berücksichtigen will, leicht und bestimmt übersehen könne, wie wenig man dadurch aufopfere".

Was z. B. die ganze Hannover'sche Triangulation betrifft, so sind die Reduktionen daselbst so geringfügig, daß sie nicht berücksichtigt zu werden brauchten.

Die zweite Abhandlung schließt an die in der ersten Abhandlung gestellte und nach mehreren Methoden gelöste Hauptaufgabe der Geodäsie an: Aus der im Bogenmaße gegebenen Länge einer Dreiecksseite, ihrem Azimut an dem Anfangspunkte und der Breite dieses Anfangspunktes abzuleiten das Azimut der Seite an dem anderen Endpunkte, die Breite dieses Endpunktes und den Längenunterschied beider Punkte. Der Zusammenhang zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken ist am Schluße der ersten Abhandlung für den Fall der Kugelfläche in der für die Rechnung möglich einfachsten und bequemsten Form aufgestellt, die auch an Schärfe nichts zu wünschen übrig läßt. In der zweiten Abhandlung werden die analogen unmittelbar für die Ellipsoidfläche geltenden Formeln entwickelt. Es ist dies eine zu den wichtigsten Problemen der höheren Geodäsie gehörige Aufgabe, die Gauß schon 30 Jahre vor deren Veröffentlichung praktisch geübt hatte und mit der sich auch schon Dusejour, Legendre, Delambre, Bessel und Jvory vor dem Erscheinen der „Untersuchungen . . ." befaßt haben.

Die Ableitung der für die Sphäroidfläche gültigen Formeln erfordert selbstverständlich die Kenntnis der sphäroidischen Trigonometrie und einen weit größeren Umfang des geodätischen und mathematischen Wissens als die Aufstellung der für die Kugelfläche geltenden elementareren Formeln, die auf den einfachen Sätzen der sphärischen Trigonometrie beruhen. Aber die sphäroidischen Schlußformeln unterscheiden sich von den sphärischen Formeln nur dadurch, daß gewisse bei diesen konstante Größen bei jenen von der geographischen Breite abhängig werden. Diese Größen hat Gauß in eine Hilfstafel für die Breitenzone von 51° bis 54° gebracht, so daß mit deren Hilfe — wenn sie nur entsprechend erweitert wird — jede Rechnung auf dem Sphäroid ebenso leicht durchgeführt werden kann, wie auf der Kugel.

Herr Professor Frischauf hat sich der dankenswerten Mühe unterzogen, bei Herausgabe der Gauß'schen Abhandlungen „Anmerkungen" und einen „Anhang" hinzuzufügen, welche den Zweck haben, die schwierigsten Stellen der Gauß'schen Entwicklungen zu erläutern, die in der ersten Abhandlung gegebene sphäroidische Trigonometrie, die durch den Aufschwung der geodätischen Messungen I. Ordnung in den letzten Jahrzehnten an Bedeutung gewann, zu erweitern, sowie die Reduktion geodätischer Messungen auf ein Referenzellipsoid, soweit selbe auf geometrischer Grundlage beruhen, aufzunehmen, was umso berechtigter erscheint, als aus Gauß' Briefwechsel und Nachlaß hervorgeht, daß er bereits in den 20er Jahren die Formeln dafür ohne ausführliche Ableitungen aufgestellt hatte.

Besonders interessant sind die in den „Anmerkungen" gebotenen Entwicklungen der sehr bequemen Formeln zur Berechnung der Konstanten, welche

Formeln die Anwendung siebenstelliger Logarithmentafeln mit der gleichen Genauigkeit gestatten, die bei den anderen Lösungen kaum mit zehnstelligen Logarithmen erreicht werden kann. Auch werden die Leser aufmerksam gemacht, daß das von Gauß an seiner „vierten Methode“ zur Bestimmung der geographischen Punktkoordinaten ausgesetzte „etwas beschwerliche Interpolieren“ gegenwärtig durch die z. B. in den Schrön'schen Logarithmentafeln enthaltenen *S*- und *T*-Zahlen nicht mehr erforderlich ist.

Der „Anhang“, der zur Erläuterung der zweiten Abhandlung dient, beschäftigt sich mit der geodätische Linie und dem Vertikalschnitt auf einer allgemeinen Fläche, mit der Abbildung einer sphäroidischen Zone auf der Kugel, sowie mit der Verbesserung des Azimuts wegen Erhebung des anvisierten Objektes.

Da die Gauß'schen „Untersuchungen . . .“ in erster Linie auf die Hannover'sche Triangulation Rücksicht nimmt, so lag die Versuchung nahe, manche Erweiterungen zu bringen. Es war aber für den Herausgeber gewiß keine leichte Arbeit, die Grenze zu treffen, wie weit mit den Erläuterungen gegangen werden soll.

Vielleicht entschließt sich Professor Frischauf noch, in einer besondern Abhandlung mit den Erklärungen und Ergänzungen noch etwas weiter zu gehen. Der wißbegierige Studierende und der angehende Gradmesser würden ihm gewiß hiefür ebenso dankbar sein, wie der fertige „höhere Geodät“.

Aus den Verhandlungen der XVI. allgem. Konferenz der internationalen Erdmessung zu London 1909.

Die Verhandlungen der XVI. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung, abgehalten zu London und Cambridge vom 21. bis 29. September 1909, und zwar ihr I. Teil: Sitzungsberichte und Landesberichte über die Arbeiten in den einzelnen Staaten, redigiert vom ständigen Sekretär H. G. van de Sande Bakhuyzen, sind vor kurzem erschienen.

Dieser mächtige Band enthält eine Überfülle für den Geodäten höchst interessanter Berichte und wir haben die Absicht, in der Folge für die Leser unserer Zeitschrift interessante Artikel aus den genannten Verhandlungen zu bringen. Wir beginnen mit der Wiedergabe jener Berichte, die sich auf Österreich beziehen und die auf der Konferenz von den Vertretern Österreichs erstattet worden sind.

I. Die Tätigkeit des k. k. Gradmessungsbureaus in Wien.

Hofrat Prof. Dr. E. Weiss, emer. Direktor der Universitätssternwarte, der mit der Oberleitung des Gradmessungs-Bureaus in Wien betraut ist, führte Nachstehendes aus:

Bei der letzten Konferenz der internationalen Erdmessung in Budapest war ich in der Lage mitzuteilen, daß die sämtlichen noch unter v. Oppolzers Leitung ausgeführten Längen-, Breiten- und Azimutbestimmungen nicht nur vollständig reduziert vorlagen, sondern auch bereits seit längerer Zeit in den ersten 13 Bänden der Publikationen des k. k. Gradmessungsbureaus veröffentlicht