Paper-ID: VGI_191120

Ein prinzipieller Fehler in der Geodäsie

Karl Fuchs [1]

[1] *Preßburg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **9** (6), S. 177–181

1911

BibTEX:

```
@ARTICLE{Fuchs_VGI_191120,
Title = {Ein prinzipieller Fehler in der Geod{\"a}sie},
Author = {Fuchs, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {177--181},
Number = {6},
Year = {1911},
Volume = {9}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN
DES
VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 6. Wien, am 1. Juni 1911. IX. Jahrgang.

Ein prinzipieller Fehler in der Geodäsie.

Von Prof. K. Fuchs, Preßburg.

Es soll gezeigt werden, daß in der geodätischen Punktbestimmung ein bisher nicht bemerkter Fehler vorkommen kann, der in der Praxis allerdings selten mehr als wenige Zentimeter beträgt.

Diese Behauptung soll zunächst genauer umschrieben werden. Es seien mehrere Standpunkte $P_1\,P_2$ . . . von den Koordinaten

$$x_1\,y_1\,z_1 \qquad x_2\,y_2\,z_2 \qquad \ldots \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

gegeben und es gelte, die Koordinaten

$$x_0\,y_0\,z_0 \qquad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

eines Neupunktes P_0 aus Azimut und Höhenwinkel zu berechnen.

Die Geodäsie macht nun die Annahme, daß die Horizontalkoordinaten $x_0\,y_0$ des Neupunktes P_0 schon aus den Horizontalwinkeln (Azimuten), die in $P_1\,P_2$ . . . gemessen worden sind, berechnet werden können. Diese Annahme ist auch richtig, wenn alle Winkel, die Horizontalwinkel wie die Vertikalwinkel (Höhenwinkel) fehlerfrei gemessen sind. In diesem Falle genügen sogar schon je zwei Azimute, die Horizontalkoordinaten $x_0\,y_0$ zu berechnen. Die Annahme beruht auf der Vorstellung, daß der Neupunkt P_0 sich in einer Vertikalen V befinden müsse, deren Horizontalkoordinaten $x_0\,y_0$ aus den Azimuten berechnet werden können. Die erwähnte Annahme ist aber falsch, wenn die Winkelmessungen ungenau sind, so daß die gesuchten Koordinaten $x_0\,y_0\,z_0$ mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden müssen. In diesem Falle ist der wahrscheinliche Ort des Neupunktes P_0 nicht eine Vertikale V, sondern eine leicht geneigte Gerade U. Diese Behauptung soll nun begründet werden.

1. Unseren Rechnungen soll eine bekannte dynamische Deutung der Methode der kleinsten Quadrate zu Grunde gelegt werden.

Dem Standpunkte P_1 entspricht ein Rayon R_1, der durch P_1 geht und in Folge unvermeidlicher Fehler am Zielpunkte P_0 vorübergeht. So entspricht jedem

Standpunkt P ein Rayon R, der am Zielpunkt P_0 in irgendeiner Entfernung vorübergeht.

Irgendein Raumpunkt P in der Nähe des Neupunktes P_0 hat irgendwelche Normalabstände $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots$ von den Rayons, und als wahrscheinlichster Punkt P_0 gelte der Einfachheit wegen der Punkt, der die kleinsten Normalabstände von den Rayons hat, für die also gilt:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots = \text{Min.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ 3)$$

Durch jeden Rayon R legen wir nun eine Vertikal-Ebene A und eine dazu normale Ebene B, so daß der Strahl R die Schnittlinie der beiden Ebenen A und B ist. Ein Raumpunkt P, der von R einen Normalabstand λ hat, hat von der Ebene A einen Abstand μ, von der Ebene B einen Abstand ν und es gilt dann:

$$\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ 4)$$

Die Minimumbedingung 3) können wir also auch so schreiben:

$$(\mu_1^2 + \mu_2^2 \ldots) + (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots) = \text{Min.} \qquad \ldots\ldots\ 5)$$

Dieser Minimumbedingung geben wir eine neue dynamische Bedeutung. Jede Ebene A soll einen Punkt w, den wir den Wanderpunkt nennen wollen, mit einer dem Normalabstande μ proportionalen Kraft 2μ anziehen. Dann ist μ^2 die Arbeit, die wir leisten müssen, wenn wir den Wanderpunkt aus der Ebene A unter Überwindung der Anziehungskraft in den Abstand μ bringen wollen. Wir können auch sagen: μ^2 ist die Arbeit, die die Anziehungskraft der Ebene leistet, wenn wir den Wanderpunkt aus dem Abstande μ in die Ebene überführen. Wir können also in üblicher Weise μ^2 das Potential des Wanderpunktes in bezug auf die Ebene A nennen. Das Gleiche gilt für die Ebene B. Wenn der Wanderpunkt von einer Ebene B den Abstand ν hat, dann ist ν^2 das Potential des Wanderpunktes in bezug auf die Ebene B. Das Potential P des Wanderpunktes in bezug auf alle Ebenen ist also:

$$P = (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots) + (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots) \qquad \ldots\ 6)$$

Dieses Potential ändert sich, wenn wir den Wanderpunkt an einen anderen Ort bringen, d. h. es ist eine Funktion der Koordinaten $x\,y\,z$ des Wanderpunktes:

$$P = f(x\,y\,z) \qquad \ldots\ldots\ldots\ 7)$$

Wenn wir das P nach x differenzieren, dann erfahren wir die Kraft, die der Wanderpunkt in der x-Richtung durch die Anziehungen der Ebenen erleidet. Das Entsprechende gilt für die y-Richtung und für die z-Richtung. Wenn wir den Wanderpunkt frei geben, dann werden ihn die Anziehungskräfte unter positiver Arbeitsleistung nach Punkten immer kleineren Potentials führen; der Punkt kleinsten Potentials:

$$P = \text{Min.} \qquad \ldots\ldots\ldots\ 8)$$

ist dann also der stabile Gleichgewichtspunkt, in den der Wanderpunkt geführt wird, und er ist der wahrscheinlichste Neupunkt P_0 im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.

2. Wir wollen nun das Potential des Wanderpunktes für irgendeinen Raumpunkt $x\,y\,z$ auch wirklich berechnen.

Der Rayon R, der durch einen Polygonpunkt P geht, gibt als Projektion in der xy-Ebene einen Rayon r, der mit der x-Achse irgendeinen Horizontalwinkel ϱ bildet, mit seiner Projektion r aber bildet der Rayon R den Höhenwinkel τ. Die Gleichung der Ebene B, die durch den Polygonpunkt P geht, hat die allgemeine Form:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = l \quad \ldots \quad 9)$$

Hier sind $\alpha \beta \gamma$ die Stellwinkel des Stellotes l. Das Lot l liegt in der Ebene A, die durch R und r geht, und steht normal zu R, so daß es mit der z-Achse den Winkel $\gamma = \tau$ bildet. Aus diesen Angaben findet man leicht:

$$\cos \alpha = - \sin \tau \cos \varrho \qquad \cos \beta = - \sin \tau \sin \varrho$$

und die Gleichung 9) der Ebene B lautet genauer:

$$B: \qquad - x \sin \tau \cos \varrho - y \sin \tau \sin \varrho + z \cos \tau = l \quad \ldots \quad 10)$$

Den Wert des Lotes l findet man, indem man links für die Variablen xyz die Koordinaten des Polygonpunktes P einsetzt.

Nun wollen wir auch die Gleichung der Ebene A bestimmen, die durch den Polygonpunkt P geht. Die Gleichung hat die äußere Form:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = l' \quad \ldots \quad 11)$$

Dabei ist $\cos \beta = \sin \alpha$, und $\alpha = \varrho + 90^\circ$, so daß 11) genauer so lautet:

$$A: \qquad - x \sin \varrho + y \cos \varrho = l' \quad \ldots \quad 12)$$

Den Wert des Lotes l' findet man wieder, indem man links für x und y die Koordinaten des Polygonpunktes P einsetzt. Wenn n Polygonpunkte $P_1 P_2 \ldots$ gegeben sind, dann erhalten wir n Ebenengleichungen von der Form 10) und n Ebenengleichungen von der Form 12). Die Normalabstände μ und ν des Wanderpunktes von der A-Ebene und der B-Ebene eines Polygonpunktes P sind dann:

$$\nu = - x \sin \tau \cos \varrho - y \sin \tau \sin \varrho + z \cos \tau - l$$
$$\mu = - x \sin \varrho + y \cos \varrho - l'.$$

Hier sind xyz die Koordinaten des Wanderpunktes. Wenn man in diesen Gleichungen für $\varrho \tau l$ nacheinander die Werte einsetzt, die den Polygonpunkten $P_1 P_2 \ldots$ entsprechen, dann erhält man die Normalabstände $\mu_1 \mu_2 \ldots \nu_1 \nu_2 \ldots$ des Wanderpunktes von den einzelnen Ebenen und kann diese Ausdrücke quadrieren. Man findet dann:

$$\begin{aligned}[\nu^2] = {} & x^2 [\sin^2 \tau \cos^2 \varrho] + y^2 [\sin^2 \tau \sin^2 \varrho] + z^2 [\cos^2 \tau] + [l^2] \\ & + 2xy [\sin^2 \tau \sin \varrho \cos \varrho] - 2xz [\sin \tau \cos \tau \cos \varrho] - 2yz [\sin \tau \cos \tau \sin \varrho] \\ & + 2x [l \sin \tau \cos \varrho] + 2y [l \sin \tau \sin \varrho] - 2z [l \cos \tau].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mu^2] = {} & x^2 [\sin^2 \varrho] + y^2 [\cos^2 \varrho] + [l']^2 \\ & - 2xy [\sin \varrho \cos \varrho] + 2x [l' \sin \varrho] - 2y [l' \cos \varrho].\end{aligned}$$

Das Potential P des Wanderpunktes in einem Raumpunkte xyz ist dann:

$$P = [\mu^2] + [\nu^2]$$

Hiemit ist das Potential berechnet.

3. Wir wollen nun dem Brauche gemäß die wahrscheinlichsten Horizontal-Koordinaten $x_0 y_0$ des Neupunktes P_0 nur aus den Azimuten ϱ, also nur aus

den Ebenen A, nur aus den Abständen μ berechnen. Dementsprechend nehmen wir das Potential $[\mu^2]$ und suchen den Punkt xy kleinsten Potentials.

Wenn der Wanderpunkt die Koordinaten xyz hat, dann erleidet er durch die Anziehungen der A-Ebenen eine Kraft X in der x-Richtung und eine Kraft Y in der y-Richtung. Wir finden diese Kräfte, indem wir das Potential nach x und nach y differentieren:

$$\tfrac{1}{2} X_a = x[\sin^2\varrho] - y[\sin\varrho\cos\varrho] + [l'\sin\varrho]$$
$$\tfrac{1}{2} Y_a = -x[\sin\varrho\cos\varrho] + y[\cos^2\varrho] - [l'\cos\varrho].$$

Wenn wir in der ersten Gleichung $X_a = 0$ setzen, dann haben wir die Gleichung einer Vertikalebene V_x, und in keinem Punkte dieser Ebene erleidet der Wanderpunkt eine Kraft in der x-Richtung; die Ebene ist also die Gleichgewichtsebene nach x.

Wenn wir in der zweiten Gleichung $Y_a = 0$ setzen, dann haben wir wieder die Gleichung einer Vertikalebene V_y, in der der Wanderpunkt keine Kraft in der y-Richtung erleidet. Die beiden Ebenen V_x und V_y schneiden sich in einer Vertikalen V. In dieser Vertikalen erleidet der Wanderpunkt keine Horizontalkraft; in dieser Gleichgewichtskurve V liegt also der wahrscheinlichste Punkt P_0.

Das war jetzt die traditionelle Behandlung der Aufgabe.

4. Wir wollen nun die wahrscheinlichsten Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ des Neupunktes ausschließlich aus den Ebenen B berechnen, also aus dem Potentiale $[\nu^2]$.

Der Wanderpunkt in einem Punkte xyz erleidet durch die Anziehungen der Ebenen B orthagonale Kräfte XYZ, die wir durch die Differentiation des Potentiales $[\nu^2]$ finden:

$$\tfrac{1}{2} X_b = x[\sin^2\tau\cos^2\varrho] + y[\sin^2\tau\sin\varrho\cos\varrho] - z[\sin\tau\cos\tau\cos\varrho] + [l\sin\tau\cos\varrho]$$
$$\tfrac{1}{2} Y_b = x[\sin^2\tau\sin\varrho\cos\varrho] + y[\sin^2\tau\sin^2\varrho] - z[\sin\tau\cos\tau\sin\varrho] + [l\sin\tau\sin\varrho]$$
$$\tfrac{1}{2} Z_b = -x[\sin\tau\cos\tau\cos\varrho] - y[\sin\tau\cos\tau\sin\varrho] + z[\cos^2\tau] - [l\cos\tau].$$

Wenn wir $X_b = 0$ setzen, erhalten wir die Gleichung einer geneigten Ebene W_x ohne x-Kräfte; wenn wir $Y_b = 0$ setzen, erhalten wir die Gleichung einer geneigten Ebene W_y ohne y-Kräfte. In der geneigten Schnittlinie W_{xy} dieser beiden Ebenen erleidet der Wanderpunkt also keine Horizontalkraft. Daraus folgt, daß der wahrscheinlichste Punkt P_0 in dieser geneigten Geraden W_{xy} liegt, daß also seine Horizontalkoordinaten $x_0 y_0$ von der Höhe z_0 abhängen, in der er liegt.

Wenn wir endlich $Z_b = 0$ setzen, dann erhalten wir die Gleichung einer Ebene W_z, in der der Wanderpunkt keine Vertikalkraft erleidet; unterhalb der Ebene wird er nach oben, oberhalb der Ebene nach unten gezogen, in der Ebene W_z ist er im Gleichgewicht.

5. Endlich lassen wir auf den Wanderpunkt sowohl die A-Ebenen, als auch die B-Ebenen wirken. Dann erleidet der Wanderpunkt in irgendeinem Raumpunkte xyz die orthogonalen Kräfte:

$$X = X_a + X_b \qquad Y = Y_a + Y_b \qquad Z = Z_b$$

Wir sehen aus diesen Gleichungen, daß der Ort ohne X-Komponente wieder eine geneigte Ebene U_x ist, wenn sie auch weniger geneigt ist, als W_x; der

Ort ohne Y-Komponente ist wieder eine geneigte Ebene U_y, wenn sie auch weniger geneigt ist als W_y. Die Schnittlinie U, in der notwendig der wahrlichste Punkt P_0 liegt, ist also tatsächlich eine geneigte Gerade, und das war zu beweisen. Das Resultat bleibt qualitativ dasselbe, auch dann, wenn wir den Rayons Gewichte zuschrieben.

6. Man kann das Problem auch weniger ins Einzelne gehend behandeln. Die Ebenen A geben ausschließlich horizontale Kräfte, die auf den Wanderpunkt wirken. Die Ebenen B haben in der Praxis nicht sehr große Höhenwinkel. Das hat zur Folge, daß die Abstände v ziemlich steil, ziemlich vertikal liegen; die Anziehungen, die der Wanderpunkt durch die B-Ebenen in der Richtung der Abstände v erleidet, haben also nur kleine Horizontalkomponenten, ändern also an der Wirkung der A-Ebenen nicht viel. Dazu kommt, daß in der Praxis die Polygonpunkte $P_1\, P_2 \ldots$ meist rings um den Neupunkt P_0 liegen und das hat zur Folge, daß die Horizontalkomponenten, die die B-Ebenen liefern, einander teilweise aufheben, so daß an der Wirkung der A-Ebenen noch weniger geändert wird. Wenn man Spezialfälle durchrechnet, dann findet man, daß die Neigung der Gleichgewichtslinie oder wahrscheinlichsten Linie U so gering ist, daß ihre übliche Vernachlässigung keine beachtenswerten Fehler zur Folge hat. Die ganze Untersuchung hat also vorwiegend nur theoretischen Wert.

Über die neutralen, widerspruchsfreien Fehlermaße.

Vortrag, gehalten in der Monatsversammlung des Vereines der österr. k. k. Vermessungsbeamten am 19. November 1909 an der k. k. Techn Hochschule in Wien von Bauinspektor S. **Wellisch.**

Von einer endlichen Reihe wahrer Beobachtungsfehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ nennt man das arithmetische Mittel der absoluten Werte aller Fehler den durchschnittlichen Fehler ϑ, während das arithmetische Mittel aller Fehlerquadrate das Quadrat des mittleren Fehlers μ darstellt. Es ist nämlich

$$\vartheta = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_n|}{n} = \frac{[|\varepsilon|]}{n}$$

$$\mu^2 = \frac{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots + \varepsilon_n{}^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} \quad \text{und} \quad \mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}}.$$

Analog ergibt sich aus den m-ten Potenzen der einzelnen Fehler durch Mittelbildung die m-te Potenz des Fehlermittels der m-ten Ordnung:

$$\overset{m}{M}_{(m)} = S_{(m)}\frac{[|\varepsilon|]}{n} \quad \text{und} \quad M_{(m)} = \sqrt[m]{\frac{[|\varepsilon^m|]}{n}}.$$

Geht man von einer endlichen Reihe von Fehlern auf eine unendliche Anzahl von Fehlern über, so erhält man unter Zugrundelegung des Gaußschen Fehlergesetzes bekanntlich für die Summe $S_{(m)}$ den Integralausdruck

$$S_{(m)} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon^m e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon,$$