Paper-ID: VGI_191128

Studien zur Viertelsmethode der Geodäsie

Lothar von Schrutka [1]

[1] *Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **9** (7), S. 220–226

1911

BibTEX:

```
@ARTICLE{Schrutka_VGI_191128,
Title = {Studien zur Viertelsmethode der Geod{\"a}sie},
Author = {von Schrutka, Lothar},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {220--226},
Number = {7},
Year = {1911},
Volume = {9}
}
```

zu finden, so gilt natürlich dieselbe Lösung. Die Aufgabe stellt sich dann als eine Erweiterung zum Vorwärtseinschneiden dar, soferne dann eben von drei gegebenen Punkten durch je eine äußere Richtung drei neue Punkte zu finden sind. Die Lösung setzt wieder voraus, daß das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ für sich bestimmt ist.

Das erweiterte Vorwärtseinschneiden kann auch für die Gewinnung neuer Standpunkte bei Meßtischaufnahmen in Ausnahmsfällen von Bedeutung werden, nur daß dann jede die Ermittlung der Lage des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ betreffende Rechnung entfällt.

Sind nämlich drei zugängliche Punkte $p_1 p_2 p_3$ am Tisch gegeben, während für die Detailaufnahme $P_1 P_2 P_3$ als Aufstellungspunkte am Meßtisch bestimmt werden sollen, so ist die Lösung dieser Aufgabe auch dann noch möglich, wenn von $p_1 p_2 p_3$ je einer der künftigen Aufstellungspunkte sichtbar wäre.

Wird der Tisch in $p_1 p_2 p_3$ der Reihe nach orientiert aufgestellt, so können die Strahlen nach den zu bestimmenden Punkten gezogen werden. Werden dann die auf direktem oder indirektem Wege herzuleitenden Seiten des Dreieckes $P_1 P_2 P_3$ in dem Maßstabe der Aufnahme auf Pauspapier übertragen, so kann man durch Verschieben des letzteren die Ecken dieses Dreieckes in die drei am Tisch gezogenen Strahlen einpassen. Für jede Aufstellung hat man dann einen Strahl zur Orientierung.

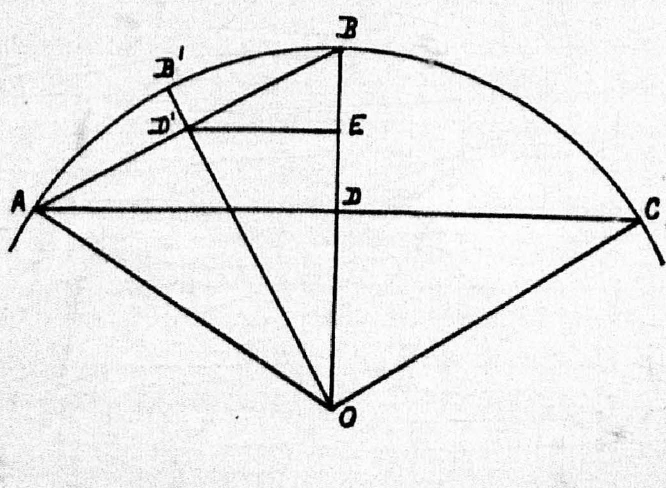
Da im Sinne der Instruktion für Meßtischaufnahmen, Wien 1907, für die sogenannte Detailtriangulierung ohnehin in den gegebenen Punkten des Netzes IV. Ordnung Aufstellungen des Tisches vorgenommen werden müssen, so kann für die Gewinnung neuer Standpunkte in unübersichtlichem Gebiete diese Lösung herangezogen werden.

Graz, im November 1910.

Studien zur Viertelsmethode der Geodäsie.

Von **Dr. Lothar v. Schrutka** in Wien.

1. Die als Viertelsmethode bezeichnete Näherungsmethode für die Absteckung eines Kreisbogens im Felde beruht bekanntlich auf der Tatsache, daß die Pfeilhöhe für den halben Zentriwinkel um so genauer gleich dem Viertel der Pfeilhöhe für den ganzen Zentriwinkel ist, je kleiner dieser Zentriwinkel ist.



In der Tat, ist ABC der abzusteckende Kreisbogen, O sein Mittelpunkt, r sein Radius, $\varphi = AOC$ sein Zentriwinkel, so ist die Pfeilhöhe des ganzen Bogens

$$BD = h = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 2r\sin^2\frac{\varphi}{4},$$

die des halben

$$B'D' = h' = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{4}\right) = 2r\sin^2\frac{\varphi}{8};$$

die dafür substituierte Größe ist

$$h'_1 = \frac{h}{4} = \tfrac{1}{2}r\sin^2\frac{\varphi}{4} = 2r\sin^2\frac{\varphi}{8}\cos^2\frac{\varphi}{8};$$

somit ist der absolute Fehler

$$h'_1 - h' = 2r\sin^2\frac{\varphi}{8}\left(\cos^2\frac{\varphi}{8} - 1\right) = -2r\sin^4\frac{\varphi}{8}$$

und der relative Fehler

$$\frac{h'_1 - h'}{h'} = -\sin^2\frac{\varphi}{8}.$$

2. Es mögen noch die zu den Bogen AC und AB gehörigen Sehnen s und s' eingeführt werden; es ist

$$s = 2r\sin\frac{\varphi}{2},\quad s' = 2r\sin\frac{\varphi}{4}$$

und

$$s'^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + h^2.$$

Die Gleichungen

$$2s' + s = 2r\left(2\sin\frac{\varphi}{4} + \sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 2r\left(2\sin\frac{\varphi}{4} + 2\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}\right) =$$

$$= 4r\sin\frac{\varphi}{4}\left(1 + \cos\frac{\varphi}{4}\right) = 4s'\frac{1 + \cos\frac{\varphi}{4}}{2} = 4s'\cos^2\frac{\varphi}{8}$$

und

$$\frac{h'_1}{h'} = \cos^2\frac{\varphi}{8}$$

zeigen, daß (exakt)

$$h' = \frac{4s'}{2s'+s}\,.\,h'_1 = \frac{s'}{2s'+s}\,.\,h$$

ist.*)

3. Wird die Pfeilhöhe für den Zentriwinkel 2φ mit $'h$ bezeichnet, so ist

$$'h = r(1 - \cos\varphi) = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{'h}{h} = \frac{2r\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2r\sin^2\frac{\varphi}{4}} = 4\cos^2\frac{\varphi}{4}$$

*) Chr. A. Vogler, Zeitschrift für Vermessungswesen, 23 (1894) p. 561.

und

$$\frac{s}{s'} = \frac{2r\sin\frac{\varphi}{2}}{2r\sin\frac{\varphi}{4}} = 2\cos\frac{\varphi}{4}$$

folgt

$$\frac{'h}{h} = \frac{s^2}{s'^2},$$

$$'h = \frac{s^2}{s'^2}.h.$$

4. Die Genauigkeit der Viertelsmethode, die bei größeren Zentriwinkeln nicht allzugroß ist, läßt sich auf verschiedene Art verbessern, wenn man nicht von einer einzigen Pfeilhöhe h, sondern von zwei aufeinanderfolgenden h und h' ausgeht. Während bei der Viertelsmethode an Stelle von

$$h'' = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{8}\right) = 2r\sin\frac{\varphi}{16},$$

der Pfeilhöhe für den Zentriwinkel $\frac{\varphi}{4}$, der Näherungswert

$$h''_{I} = \frac{h'_{I}}{4} = \frac{h}{16}$$

gesetzt wird, werden bei den im folgenden zu besprechenden genaueren Methoden Näherungswerte h''_{II}, h''_{III}, h''_{IV} verwendet, die aus h und h' gebildet sind.

5. Die an Stelle von h'' tretenden Näherungswerte sind

$$h''_{II} = \tfrac{5}{16}h' - \tfrac{1}{64}h,$$

$$h''_{III} = \frac{3 + 4\frac{h'}{h}}{16}\,.\,h' = \tfrac{3}{16}h' + \tfrac{1}{4}\frac{h'^2}{h}$$

und

$$h''_{IV} = \tfrac{1}{4}h' - \tfrac{1}{128}h + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{h'^2}{h}.$$

Es besteht übrigens die Relation

$$h''_{IV} = \tfrac{1}{2}(h''_{II} + h''_{III}).$$

Um die Genauigkeit dieser Näherungen beurteilen zu können, empfiehlt es sich, die verschiedenen auftretenden Winkelfunktionen auf eine einzige zurückzuführen. Hiefür eignet sich

$$\sin^2\frac{\varphi}{16} = \sigma$$

besonders gut, weil alles rational wird. Mat hat

$$\cos\frac{\varphi}{8} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{16} = 1 - 2\sigma,$$

$$\sin^2\frac{\varphi}{8} = 4\sin^2\frac{\varphi}{16}\cos^2\frac{\varphi}{16} = 4\sigma(1-\sigma) = 4\sigma - 4\sigma^2,$$

$$\cos\frac{\varphi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{8} = 1 - 8\sigma + 8\sigma^2,$$

$$\sin^2\frac{\varphi}{4} = 4\sin^2\frac{\varphi}{8}\cos^2\frac{\varphi}{8} = 4.(4\sigma - 4\sigma^2)(1-2\sigma)^2 = 16(\sigma - 5\sigma^2 + 8\sigma^3 - 4\sigma^4);$$

daher

$$h = 32\,r\,(\sigma - 5\,\sigma^2 + 8\,\sigma^3 - 4\,\sigma^4),$$
$$h' = 8\,r\,(\sigma - \sigma^2),$$
$$h'' = 2\,r\,\sigma;$$
$$\frac{h'^2}{h} = 2\,r\,\frac{\sigma\,(1-\sigma)}{(1-2\sigma)^2} = 2\,r\,\sigma\,(1-\sigma)\,(1 + 4\,\sigma + 12\,\sigma^2 + 32\,\sigma^3 + 80\,\sigma^4 + \ldots) =$$
$$= 2\,r\,(\sigma + 3\,\sigma^2 + 8\,\sigma^3 + 20\,\sigma^4 + 48\,\sigma^5 + \ldots.);$$

ferner

$$h'_{\mathrm{I}} = 8\,r\,(\sigma - 5\,\sigma^2 + 8\,\sigma^3 - 4\,\sigma^4),$$
$$h''_{\mathrm{I}} = 2\,r\,(\sigma - 5\,\sigma^2 + 8\,\sigma^3 - 4\,\sigma^4)$$

und

$$h''_{\mathrm{II}} = r\left[\tfrac{5}{2}\,(\sigma - \sigma^2) - \tfrac{1}{2}\,(\sigma - 5\,\sigma^2 + 8\,\sigma^3 - 4\,\sigma^4)\right] = 2\,r\,(\sigma - 2\,\sigma^3 + \sigma^4),$$
$$h''_{\mathrm{III}} = r\left[\tfrac{3}{2}(\sigma - \sigma^2) + \tfrac{1}{2}(\sigma + 3\sigma^2 + 8\sigma^3 + 20\sigma^4 \ldots)\right] = 2\,r\,(\sigma + 2\sigma^3 + 5\,\sigma^4 + \ldots),$$
$$h''_{\mathrm{IV}} = r\left[2\,(\sigma - \sigma^2) - \tfrac{1}{4}(\sigma - 5\,\sigma^2 + 8\,\sigma^3 - 4\,\sigma^4) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}\,(\sigma + 3\,\sigma^2 + 8\,\sigma^3 + 20\,\sigma^4 + \ldots)\right] = 2\,r\,(\sigma + 3\,\sigma^4 + \ldots).$$

Es ist demnach bei h''_{II} der absolute Fehler

$$h''_{\mathrm{II}} - h'' = 2\,r\,.\,(-2\,\sigma^3 + \sigma^4),$$

daher der relative Fehler

$$\frac{h''_{\mathrm{II}} - h''}{h''} = -2\,\sigma^2 + \sigma^3,$$

bei h''_{III} der absolute Fehler

$$h''_{\mathrm{IV}} - h'' = 2\,r\,(2\,\sigma^3 + 5\,\sigma^4 + \ldots.),$$

der relative

$$\frac{h''_{\mathrm{III}} - h''}{h''} = 2\,\sigma^2 + 5\,\sigma^3 + \ldots.,$$

endlich bei h''_{IV} der absolute Fehler

$$h''_{\mathrm{III}} - h'' = 2\,r\,.\,(3\,\sigma^4 + \ldots),$$

der relative

$$\frac{h''_{\mathrm{IV}} - h''}{h''} = 3\,\sigma^3 + \ldots.$$

Bei der vom genauen h' ausgehenden Viertelsmethode endlich wäre h'' durch $\frac{h'}{4}$ zu ersetzen und der absolute Fehler wäre

$$\frac{h'}{4} - h'' = 2\,r\,.\,-\sigma^2,$$

der relative

$$\frac{\frac{h'}{4} - h''}{h''} = -\sigma.$$

Über die numerischen Werte orientiert folgende kleine Tabelle (für den Wert $\varphi = 180^0$ mußten bei den Reihenentwicklungen mehr Glieder berücksichtigt werden):

Werte der relativen Fehler
in Einheiten der siebenten Dezimale.

φ	h''_{I}	h''_{II}	h''_{III}	h''_{IV}	$\frac{h'}{4}$
10°	— 5950	0	0	0	— 1190
20°	— 23779	— 4	4	0	— 4759
30°	— 53437	— 22	22	0	— 10705
60°	— 212415	— 365	371	3	— 42775
90°	— 473012	— 1835	1891	27	— 96073
180°	—1789326	— 28421	32006	1791	—380602

6. Die wirkliche Berechnung der Näherungswerte wird durch folgende Bemerkung sehr erleichtert. Es werde

$$h' - \frac{h}{4} = \gamma \text{ und } \frac{\gamma}{h} = \frac{h'}{h} - \tfrac{1}{4} = \varepsilon$$

gesetzt; nach dem Prinzip der Viertelsmethode ist γ eine kleine Länge, ε eine kleine Zahl. Nun ist

$$h''_{\mathrm{II}} = \tfrac{5}{16} h' - \tfrac{1}{64} \cdot 4 (h' - \gamma) = \tfrac{1}{4} h' + \tfrac{1}{16} \gamma;$$

man hat also die Verbesserung γ für den Näherungswert $\frac{h}{4} = h'_{\mathrm{I}}$ der Viertelsmethode zu ermitteln und bei h'' abermals zunächst $\frac{h'}{4}$ zu bilden und den sechzehnten Teil dieser Verbesserung hinzuzufügen. Die Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich leicht; die nächste Pfeilhöhe ist

$$h'''_{\mathrm{III}} = \frac{h''_{\mathrm{II}}}{4} + \frac{1}{16^2} \gamma,$$

usw.

Ähnlich ist

$$h''_{\mathrm{III}} = \frac{3 + 4(\frac{1}{4} + \varepsilon)}{16} \cdot h' = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\varepsilon) . h';$$

man bestimme demnach die Verbesserung ε des durch die Viertelsmethode gelieferten Näherungswertes $\frac{1}{4}$ für das Verhältnis $\frac{h'}{h}$ und füge für das folgende Verhältnis $\frac{h''}{h'}$ den vierten Teil dieser Verbesserung zum Näherungswert $\frac{1}{4}$ hinzu; die weiteren Schritte sind:

$$h'''_{\mathrm{III}} = (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16}\varepsilon) . h''_{\mathrm{III}},$$

usw.

Auch für h''_{IV} wäre leicht eine ähnliche Vorschrift aufzustellen. Alle diese Vorschriften führen, wie man leicht erkennt, nach und nach zur Viertelsmethode über.

7. Die Näherung h''_{II} ist etwas genauer als h''_{III}; aber die letztere ist zur Berechnung bequemer, auch deshalb, weil ε unmittelbar aus Nr. 2 entnommen werden kann*):

*) Für h''_{II} ergibt sich bei Verwendung von ε die weniger einfache Formel:

$$h''_{\mathrm{II}} = \frac{1 + 5\varepsilon}{1 + 4\varepsilon} \cdot \frac{1}{4} h'_{\mathrm{II}}.$$

$$\varepsilon = \frac{s'}{2s' + s} - \tfrac{1}{4}.$$

Die Näherung h''_{IV} ist viel genauer, aber auch weit unbequemer; sie ist hier mehr darum angeführt, weil sie ein weiteres Glied einer ins Unendliche fortsetzbaren Reihe von immer genaueren Näherungen darstellt. Die Existenz einer solchen Reihe geht auch daraus hervor, daß der abzusteckende Kreisbogen durch Angabe von h und h' festgelegt ist, es daher — wenn man algebraische Ausdrücke verlangt, allerdings nur mit Hilfe unendlicher Reihen — möglich sein muß, alle auftretenden Größen durch h und h' auszudrücken.

8. Statt von h und h' kann man bei den erwähnten Methoden auch von $'h$ und h ausgehen, wobei man allerdings an Genauigkeit verliert. An Stelle von ε tritt dann

$$'\varepsilon = \frac{h}{'h} - \tfrac{1}{4}.$$

Nach Nr. 3 ist

$$\frac{h}{h'} = \left(\frac{s'}{s}\right)^2.$$

$\frac{s'}{s}$ ist nahe gleich $\frac{1}{2}$ und wenn

$$\frac{s'}{s} = \tfrac{1}{2} + \delta$$

gesetzt wird, so ist

$$'\varepsilon = \frac{h}{'h} - \tfrac{1}{4} = \delta + \delta^2.$$

9. Es möge endlich noch eine Bemerkung hier angeschlossen werden, die allerdings zu den sogenannten verbesserten Methoden in keiner Beziehung steht, sich vielmehr auf die gewöhnliche Viertelsmethode bezieht. Bildet man nämlich den Ausdruck

$$I = \frac{\frac{1}{4}s^2 + \frac{4}{3}h^2}{h}$$

und vergleicht ihn mit dem analog aus s' und h'_I gebildeten Ausdruck:

$$I_I' = \frac{\frac{1}{4}s'^2 + \frac{4}{3}h'_I}{h'_I},$$

so zeigt sich, daß beide übereinstimmen. In der Tat ist ja nach den Formeln in Nr. 1 und 2

$$I_I' = \frac{\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{4}s^2 + h^2) + \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{h}{4}\right)^2}{\frac{h}{4}} = \frac{\frac{1}{4}s^2 + h^2 + \frac{1}{3}h^2}{h} = I.$$

(I kann also eine Invariante gegenüber der Operation der Viertelsmethode genannt werden.)

Bezeichnet man ferner den Radius des Kreises, der s zur Sehne und h zur Pfeilhöhe hat, mit r, so ist der Radius r', bei dem an Stelle dieser Größen s' und h'_I treten, von r verschieden, eben weil h'_I nur ein Näherungswert ist.

Wird von D' das Lot $D'E$ auf OB gezogen, so lehrt das rechtwinklige Dreieck $O\,D'\,B$, daß

$$\tfrac{1}{4}\,s'^2 = \tfrac{1}{2}\,h\,.\,r,$$

also

$$r = \frac{s'^2}{2h}$$

ist. Hieraus folgt weiter

$$r = \frac{\tfrac{1}{4}\,s^2 + h^2}{2h} = \tfrac{1}{2}\,l - \tfrac{1}{6}\,h.$$

Ebenso ist daher

$$r' = \tfrac{1}{2}\,l - \tfrac{1}{6}\,.\,h'_1 = \tfrac{1}{2}\,l - \tfrac{1}{24}\,h,$$

mithin

$$r' = r + \tfrac{1}{8}\,h.$$

Analogerweise wäre bei den folgenden Schritten

$$r'' = \tfrac{1}{2}\,l - \tfrac{1}{96}\,h = r + \tfrac{5}{32}\,h,$$

. . . .

die aufeinanderfolgenden Radien nähern sich rasch der Grenze $\tfrac{1}{2}\,l$. Bei konsequenter Anwendung der Viertelsmethode würde eine Kurve entstehen, die, wie eine genauere Betrachtung leicht zeigt, überall dicht mit Ecken besetzt ist.

Wien, am 10. November 1910.

Aus dem Abgeordnetenhause.

In der Sitzung des Abgeordnetenhauses vom 24. Juni 1910 wurde nachstehender Antrag sammt Gesetzentwurf des Abgeordneten Viktor Silberer und Genossen, wegen Erlassung eines Gesetzes für Neuvermessungen eingebracht:

«In Niederösterreich und einigen anderen Ländern werden seit mehreren Jahren Neuvermessungen vorgenommen, das heißt es werden die Mappen einzelner Katastralgemeinden durch neue ersetzt, auf Grundlage komplizierter Vermessungen, die vor 80 Jahren, aus welcher Zeit unsere Mappen stammen und später bei der mit dem Gesetze vom 23. Mai 1869 angeordneten meist sehr mangelhaften Reambulierung selbstverständlich nicht in Anwendung kamen.

Diese neuen Vermessungen verursachen unendlich viel Mühe, nehmen außerordentlich viel Zeit in Anspruch und veranlassen nahmhafte Kosten, weswegen auch begreiflich sein muß, daß es zu einer neuerlichen Vermessung nicht so bald, ja ganz bestimmt vor 100 Jahren nicht kommen wird, daß die eigentliche Bestimmung und Benutzung in der Zukunft liegt, woraus folgert, daß die Ergebnisse der Vermessung den voraussichtlichen Bedürfnissen jener Zeit Rechnung tragen müssen.

Es ist ferner einleuchtend, daß Operationen, wie die Neuvermessung, wobei der Verkehr mit allen Grundbesitzern der Gemeinde erforderlich ist und außer den zu lösenden technischen Aufgaben es eine ganze Reihe privat- und öffentlich rechtlicher Angelegenheiten zu erledigen gibt, gesetzlich geregelt sein müssen. Und doch ist der merkwürdige und höchst bedenkliche Fall eingetreten, daß