

Paper-ID: VGI_191138



Über graphische Auflösung von überzähligen linearen Gleichungen zwischen zwei Unbekannten

W. Láska ¹

¹ *Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **9** (9), S. 285–288

1911

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Laska_VGI_191138,  
  Title = {{\U}ber graphische Aufl{\o}sung von {\u}berz{\a}hligen linearen  
    Gleichungen zwischen zwei Unbekannten},  
  Author = {L{\a}ska, W.},  
  Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {285--288},  
  Number = {9},  
  Year = {1911},  
  Volume = {9}  
}
```



die Lote s berechnen können, aber kein Mittel in der Hand haben, auf die Länge der Polabstände r zu schließen, nachdem wir den Polvektor R nicht kennen. So kann es kommen, daß unsere ganze Näherungsarbeit vergeblich ist: wir kommen nicht vorwärts, die Quadratsumme der Absoluten will nicht kleiner werden. Die im folgenden behandelten Verfahren helfen diesem Übelstande ab.

Neue Ebenen. Aus den gegebenen Gleichungen G_1, G_2, \dots können wir auch beliebig viel neue Gleichungen G ableiten, u. zw. als Summengleichungen nach dem Schema

$$G = uG_1 + vG_2 + \dots$$

Wir könnten ebensogut sagen: aus den alten Ebenen E_1, E_2, \dots können wir beliebig viel neue Ebenen E ableiten, oder aus den alten Strahlen S_1, S_2, \dots können wir neue Strahlen ableiten. Die abgeleiteten Ebenen gehen alle durch P_0 und die abgeleiteten Strahlen geben alle in der Lotkugel neue Lotpunkte p u. s. w., und wie wir den Wanderpunkt auf die alten Ebenen projizieren, so können wir ihn auch auf die neuen Ebenen projizieren, um dem Fernpunkt P_0 näher zu kommen. Nun gibt es Methoden, aus mehreren alten Ebenen G_1, G_2, \dots planmäßig eine neue Ebene G abzuleiten, die sicher besser ist, als die beste der Komponentenebenen, d. h. einen besseren Näherungspunkt p gibt, als die beste der verwendeten Ebenen. Da liegt der Gedanke nahe, zunächst nicht zu projizieren, sondern erst planmäßig aus den gegebenen Gleichungen immer bessere Ebenengleichungen abzuleiten, und erst wenn wir eine sehr gute Ebene gefunden zu haben glauben, den Wanderpunkt auf sie zu projizieren. Dann sind wir mit einem Schlage dem Fernpunkte P_0 sehr nahe gekommen.

Es soll nun gesagt werden, wie man aus alten Gleichungen sicher bessere Ebenengleichungen ableiten kann, und wir beginnen mit der Ableitung einer besseren Gleichung aus zwei Gleichungen.

(Fortsetzung, resp. Schluß folgt.)

Über graphische Auflösung von überzähligen linearen Gleichungen zwischen zwei Unbekannten.

Von Prof. Dr. W. Láška in Prag.

Es sei die graphische Darstellung eines Systems von linearen Gleichungen:

$$a_k x + b_k y + c_k = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

gegeben. Eine jede Gleichung wird darin durch eine Gerade dargestellt, welche in der Fig. 1 einfach mit dem Index 1, 2, 3, 4 bezeichnet erscheint.

Um genäherte Werte für x und y graphisch zu finden, suchen wir die sogenannte Korrelation dieser Darstellung auf. Durch sie werden die Geraden in Punkte verwandelt und man erhält eine nahezu gerade Punktfolge, sobald die ursprünglichen Geraden sich in nahezu einem Punkte schneiden.

Dadurch wird die Auffindung von plausiblen x - und y -Werten offenbar wesentlich erleichtert. Das Ziehen der Geraden MN in der Fig. 2 stellt nämlich ein gut definiertes geometrisches Problem dar, während die Auffindung des plau-

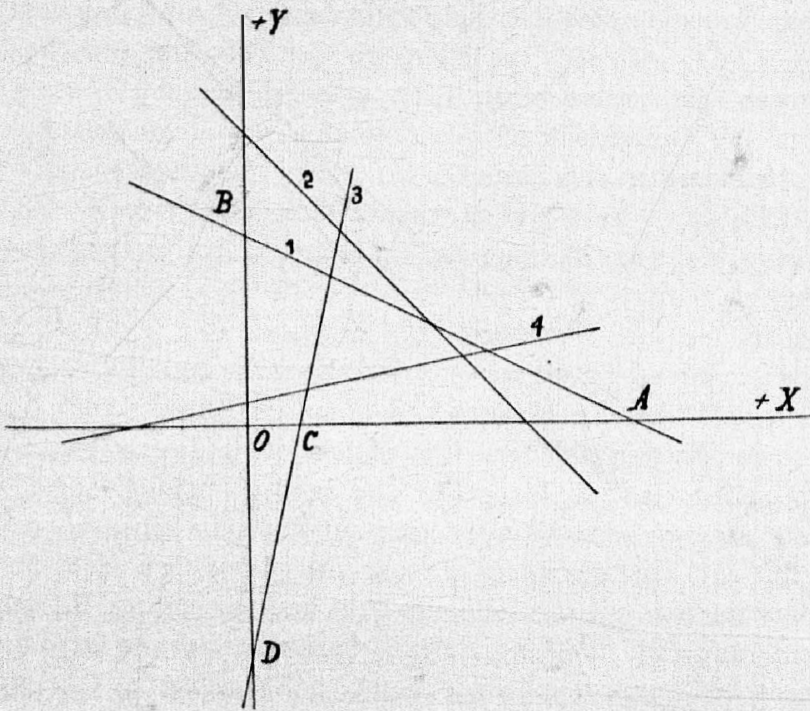


Fig. 1.

sibelsten Punktes in der Fig. 1 erst besonderer Erwägungen bedarf. Vermehrt sich weiters die Zahl der Geraden in der Fig. 1, so wird das Bild ein verworrenes, während umgekehrt in der Fig. 2 die Vermehrung der Punktezahl nur höchst wünschenswert erscheint.

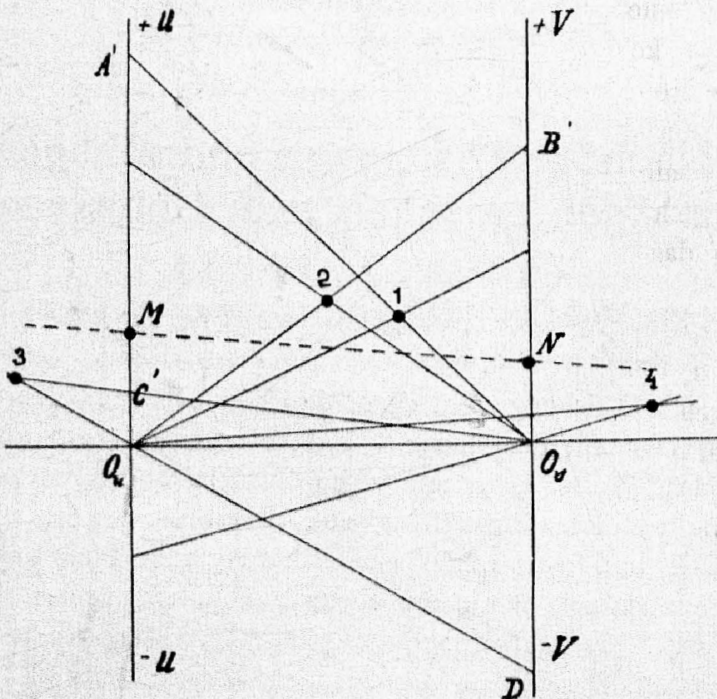


Fig. 2.

Um eine bequeme Korrelationsfigur zu erhalten, wähle man (siehe Fig. 2) zwei Punkte O_u, O_v und ziehe die Verbindungsgerade und auf diese in den erwähnten Punkten die Senkrechten $(+U-U)$ $(+V-V)$.

Um den der Geraden $AB \equiv 1$ in der Fig. 1 entsprechenden Punkt 1 in der Fig. 2 zu finden, trage man

$$OA \text{ (Fig. 1)} = O_u A' \text{ (Fig. 2)}$$

$$OB \text{ (Fig. 1)} = O_v B' \text{ (Fig. 2)},$$

ziehe hierauf die Verbindungsgeraden $O_u B'$ und $O_v A'$, deren Schnittpunkt 1 der Gesuchte ist. Er stellt das korrelative Bild der Geraden $1 \equiv AB$ in der Fig. 1 dar.

Um analog den Punkt 3 in der Fig. 2 zu erhalten, welcher der Geraden CD in der Fig. 1 entspricht, trage man

$$O_v D' \text{ (Fig. 2)} = OD \text{ (Fig. 1)}$$

$$O_u C' \text{ (Fig. 2)} = OC \text{ (Fig. 1)},$$

der Schnittpunkt 3 (Fig. 2) der Verbindungslinien $O_u C'$ und $O_v D'$ ist das Korrelat der Geraden $3 \equiv CD$ in der Fig. 1. So ergeben sich die Punkte 1, 2, 3, 4 der Fig. 2.

Zieht man (etwa nach dem Augenmaß) die ihnen am besten entsprechende Gerade MN (in der Fig. 2) und schneidet diese die U - resp. die V -Gerade in dem Punkte M resp. N , so wird

$$O_u M = x \qquad O_v N = y.$$

Diese korrelative Transformation hat eine große Bedeutung, weil sie ermöglicht, konstante Fehler in den Beobachtungen sofort zu übersehen.

Weichen nämlich die Punkte dem Zufallsgesetz gemäß von einer Geraden ab, dann sind konstante Fehler nicht wahrscheinlich. Anders stellt sich die Sache dar, sobald die Punkte eine regelmäßige Gruppierung zeigen, indem sie beispielsweise sich mehr einer Kurve, als einer Geraden anschmiegen. Dann ist der Verdacht auf einen konstant wirkenden Fehler gerechtfertigt und die Form der Kurve wird sichere Fingerzeige geben zu seiner Aufdeckung.

Bisher haben wir angenommen, daß allen Geraden das gleiche Gewicht zukommt. Dies ist nicht immer der Fall. Wenn beispielsweise ein System von numerischen Gleichungen gegeben ist, dann stellen sich Gewichte von selbst ein.

Denn um das System zeichnen zu können, muß man es auf die Form

$$\frac{x}{\frac{c_k}{a_k}} + \frac{y}{\frac{c_k}{b_k}} = 1 \text{ mit dem Gewicht } c_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

bringen. Dadurch erhalten die einzelnen Punkte verschiedene Gewichte. In diesem Falle kann man das Problem in zweifacher Weise in Angriff nehmen. Man kann erstens in der Fig. 2 den einzelnen Punkten die Gewichte c_k zuordnen. Dann führen die Mittel, welche uns Möbius in seinem baryzentrischen Kalkül geliefert hat, allenfalls zu einer bequemen Lösung des Problems. Legt man zweitens die Fig. 1 zu Grunde, dann kann eine jede Gerade dieser Figur als die Spur einer Ebene aufgefaßt werden, deren Neigungswinkel i_k gegen die Ebene der Zeichnung durch die Gleichung

$$\text{tang } i_k = c_k$$

gegeben ist. Die orthogonale Projektion der Schnittgeraden dieser Ebenen gibt dann eine Geradenschaar, in welcher die einzelnen Geraden gleiche Gewichte haben. Diese lassen sich mit Hilfe der Grundsätze der Theorie der kotierten Projektion leicht zeichnen.

Nachtrag zur graphostatischen Ausgleichung linear gemessener Figuren.

Herr Professor E. Hammer hat im 19. Heft der »Zeitschrift für Vermessungswesen« 1911 eine Abhandlung »Zur Ausgleichung von Streckennetzen« veröffentlicht, welche sich auch auf die Berechnung des mittleren Fehlers m_1 der Gewichtseinheit erstreckt, was ich s. Z. in dem Artikel »Graphostatische Ausgleichung linear gemessener Figuren« (1. Heft 1911 der österr. Zeitschrift) unterlassen hatte.

Da $m_1 = \sqrt{\frac{[p v v]}{B}}$, worin B die Anzahl der Bedingungsgleichungen oder den Grad der statischen Unbestimmtheit bedeutet, handelt es sich nur darum, den Ausdruck $[p v v]$, oder, was dasselbe ist, $\left[\frac{v^2}{s}\right]$ auf dem Wege der Mechanik zu ermitteln. Setzt man alle Querschnittsflächen $F=1$ und $E=1$, so bedeutet $\frac{1}{2} \left[\frac{v^2}{s}\right]$ die Deformationsarbeit $[A]$ des Fachwerks. Diese ist aber bekanntlich halb so groß als die von den äußeren Kräften P geleistete virtuelle Verschiebungsarbeit A_v . Die »innere« Arbeit $[A]$ ist nämlich ebenso groß als die wirklich geleistete äußere Arbeit, weil an Arbeit nichts verloren gehen kann. Letztere ist aber gleich $\frac{1}{2} A_v$, weil die Kräfte P von Null aus stetig wachsend angenommen werden müssen, um das Fachwerk, ohne durchzuschwingen, in die Gleichgewichtslage zu führen, während A_v mit den als konstant wirkenden P berechnet wird, so daß die Kräfte P nur mit ihrem halben Betrage für die Arbeit in Betracht kommen.¹⁾ Es ist also

$$\frac{1}{2} \left[\frac{v^2}{s}\right] = \frac{1}{2} P (|v_0| + |v_0'|), \text{ folglich}$$

$$[p v v] = \left[\frac{v^2}{s}\right] = P \cdot (|v_0| + |v_0'|).$$

Mit den Werten des ersten Beispiels meines Artikels erhält man $[p v v] = 0.0002457 (0.0080 + 0.0442) = 0.0000 1283$ und somit

$$m_1 = \sqrt{\frac{[p v v]}{1}} = \sqrt{0.00 00 1283} = 0.00358 m.$$

Die (etwas umständlichere) direkte Ermittlung von $[p v v] = \left[\frac{v^2}{s}\right]$ aus den graphisch bestimmten Werten von v liefert $[p v v] = 0.00 00 12 65$ und daraus

¹⁾ Vgl. S. Wellisch »Fehlerausgleichung nach dem Prinzip des Gleichgewichts elastischer Systeme,« österr. Zeitschr. f. Verm. 1904, S. 183 u. 184