Paper-ID: VGI_191202

Über die geodätische Linie

Siegmund Wellisch [1]

[1] *Bauinspektor der Stadt Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **10** (1), S. 2–8

1912

BibTEX:

```
@ARTICLE{Wellisch_VGI_191202,
Title = {{\"U}ber die geod{\"a}tische Linie},
Author = {Wellisch, Siegmund},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {2--8},
Number = {1},
Year = {1912},
Volume = {10}
}
```

Wir glauben auch, nicht unbescheiden zu sein, wenn wir manche Erfolge der Geometerschaft in den letzten Jahren nicht zuletzt auf unser publizistisches Wirken zurückführen.

Die vielen neuen Freunde, die unsere Zeitschrift seit ihrem ersten Erscheinen im Laufe der Jahre sowohl im In- als auch im Auslande gewonnen hat, sind uns ein Beweis, daß die Wirksamkeit unseres Blattes anerkannt wurde; sie bieten aber auch die Gewähr für einen weiteren progressiven Ausbau unseres Arbeitsrahmens, da aus ihren Reihen gewiß noch zahlreiche wackere Mitarbeiter erstehen werden.

So richten wir denn unsere Blicke von der Vergangenheit auf die Zukunft und hoffen, daß es uns gelingen wird, unseren Zielen noch näher zu kommen, unsere Bemühungen noch wirksamer zu machen, zum Vorteile sowohl der geodätischen Wissenschaft als auch der österreichischen Geometer.

Schließlich erachtet es der unterzeichnete Redakteur als eine gebieterische Pflicht, der Verdienste zu gedenken, welche die früheren Redakteure: Obergeometer M. Reinisch, J. Beran, L. v. Klatecki um unsere Zeitschrift besitzen, dem Mitredakteur Ingenieur S. Wellisch für seine werktätige Unterstützung in den zwei verflossenen Jahren und allen Mitarbeitern, die sein redliches Streben in den verflossenen fünf Jahren unterstützt und gefördert haben, seinen herzlichen und aufrichtigen Dank auszusprechen, mit der Bitte zugleich, sie mögen auch in Zukunft treue Freunde des Blattes bleiben. Prof. E. Doležal.

Über die geodätische Linie.

Von S. Wellisch.

I.

Die Entstehungsweise der geodätischen Linie.

Betrachtet man zwei Punkte A und B auf der Oberfläche des Erdsphäroides unter verschiedenen Breiten und denkt sich in diesen Punkten die Flächennormalen errichtet, so schneiden diese die Erdachse nicht in einem und demselben Punkte. Legt man daher durch A eine Vertikalebene, welche auch durch B hindurchgeht, so kann sie die Flächennormale im Punkte B nicht enthalten. Anderseits kann die in B errichtete Vertikalebene, welche auch den Punkt A enthält, in diesem Punkte nicht vertikal stehen. Beide Vertikalebenen können daher auch nicht zusammenfallen; sie werden vielmehr die Sphäroidoberfläche in zwei durch A und B gehenden ebenen Kurven (elliptischen Bögen) schneiden, welche sich nicht decken.

Um das Entstehen der beiden Normalschnitte anschaulich zur Darstellung zu bringen, denken wir uns in Fig. 1 die beiden Flächenelemente, welche die Punkte A und B tragen, tangential erweitert und, da diese verlängerten Ebenen E_1 und E_2 nicht zusammenfallen können, in der Kante TT' zum Schnitt gebracht. Errichtet man in A die Flächennormale AA' senkrecht zu E_1 und legt durch diese und den Punkt B die Normalebene N_1, so werden die Ebenen E_1 und E_2

in dem Linienzuge AtB geschnitten. Die durch die Flächennormale BB' des Punktes B und den Punkt A gelegte Normalebene N_2, welche senkrecht auf E_2 steht, schneidet die beiden Ebenen E_1 und E_2 in dem Linienzuge $Bt'A$. Die gerade Verbindungslinie AB, welche die Ebenen E_1 und E_2 in den Punkten A und B durchdringt, stellt die Schnittlinie der beiden Normalschnittebenen N_1 und N_2 dar; sie bildet mit der Kante TT' ein Paar sich kreuzende Gerade.

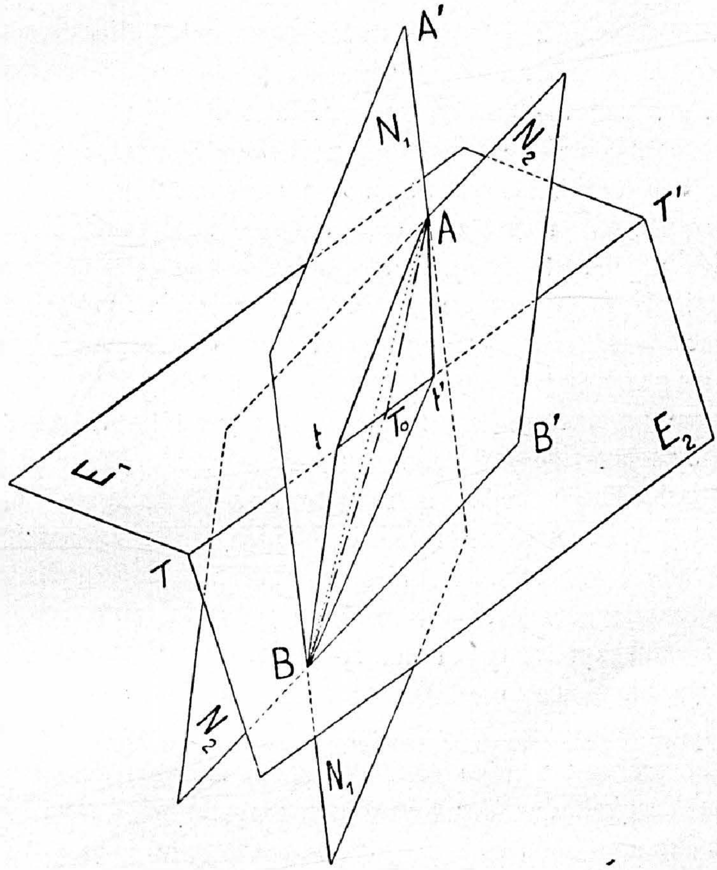

Fig. 1.

Da zwischen zwei Punkten auf einer krummen Fläche, wie später nachgewiesen werden wird, im allgemeinen nur e i n e kürzeste Verbindungslinie gezogen werden kann und kein Grund vorliegt, einem der beiden Normalschnitte vor dem anderen eine ausgezeichnete Eigenschaft beizulegen, so mag schon jetzt betont werden, daß weder der eine noch der andere der beiden Normalschnitte den kürzesten Weg zwischen den beiden Punkten auf der Erdoberfläche bezeichnet. Dieser wird vielmehr im allgemeinen zwischen den beiden Normalschnitten verlaufen und demnach eine Kurve doppelter Krümmung bilden. (Der Ausnahmsfall, daß beide Endpunkte in gleichen Breiten liegen, soll außer Betracht bleiben.)

Die geodätische Elementaraufgabe, von einem gegebenen Punkte aus in vorgeschriebener Richtung einen Linienzug abzustecken, wird im Sinne der geodätischen Praxis mit Hilfe eines Theodolits gelöst. Geschieht die Theodolit-Ausrichtung in einer Ebene, so ist der abgesteckte Linienzug eine Gerade, erfolgt sie auf einer Kugeloberfläche, so ist der Linienzug ein größter Kreisbogen, wird jedoch die sphäroidische Erdoberfläche zu Grunde gelegt, so entsteht eine Kurve doppelter Krümmung, welche die geodätische Linie genannt wird. Es stellen daher die Gerade und der größte Kugelkreisbogen auch geodätische Linien, aber spezielle Fälle derselben dar.

Die Bezeichnung als «geodätische Linie», wofür Gauß in den Disquisitiones generales circa superficies curvas nur den Ausdruck «linea brevissima», d. i. kürzeste Linie gebraucht, rührt von ihrer Entstehungsweise her, vermöge welcher sie die durch den geodätischen Vorgang des Absteckens erlangte Eigenschaft besitzt, daß mindestens drei aufeinanderfolgende Punkte der Linie, nämlich der Theodolit-Standpunkt und die zu beiden Seiten gelegenen Zielpunkte einer und derselben Vertikalebene angehören. Während bei der Geraden und dem größten Kreisbogen nicht nur drei aufeinanderfolgende Punkte, sondern sämtliche Punkte in derselben Vertikalebene zu liegen kommen, sind bei der geodätischen Linie doppelter Krümmung nur drei unendlich nahe liegende Punkte oder zwei benachbarte Linienelemente in einer Vertikalebene gelegen, welche die Schmiegungsebene genannt wird.

Um zu beweisen, daß ein vierter Punkt der geodätischen Linie nicht mehr in der Schmiegungsebene der drei vorhergehenden Punkte liegen kann, verfolgen wir die geodätische Kurve bei ihrer schrittweisen Absteckung. Um von dem Punkte A aus in gegebener Richtung nach B einen Linienzug auszurichten, wird über A der Theodolit mit vertikaler Instrumentenachse aufgestellt, der Vertikalfaden in die vorgezeichnete Richtung nach B gebracht und durch Kippen des Fernrohres ein Zwischenpunkt a auf der sphäroidischen Erdoberfläche bezeichnet. Dies geschieht im Sinne der geodätischen Praxis in der Weise, daß bei a ein Visierstab durch Einweisen in die verlangte Richtung gebracht wird, wobei jedoch nicht außer Acht gelassen werden darf, daß dann nur der Fußpunkt des Visierstabes von dem Vertikalfaden des Fernrohres gedeckt wird, daß aber der Stab selbst, obgleich ihn der Gehilfe in a vollkommen vertikal hält, mit dem Vertikalfaden einen kleinen Winkel bilden muß, weil ja die beiden Normalen in A und a nicht in dieselbe Vertikalebene fallen. Der auf diese Weise abgesteckte Punkt a gehört also auch der Vertikalschnittlinie in der Richtung von A nach B an. (Geht man in umgekehrter Richtung von B aus nach A vor, so erkennt man, daß der erste von B aus abgesteckte Punkt a' der geodätischen Linie in der Normalschnittlinie von B nach A liegen muß.)

Im zweiten Stadium der geodätischen Absteckung gelangt der Theodolit nach a, wo dessen Instrumentenachse vertikal gestellt, also in dieselbe Lage gebracht wird, die zuvor der Visierstab daselbst inne hatte und die daher mit der ersten Vertikalebene des Punktes A einen kleinen Winkel bilden wird. Der Visierstab hingegen wird in A vertikal aufgestellt, wo er dieselbe Lage einnimmt, wie ursprünglich die Instrumentenachse. Wird nun das Fernrohr nach A gerichtet, so ist zunächst zu beachten, daß die Kippebene desselben nicht mehr identisch ist mit jener im Punkte A und daß die Schnittlinie beider Kippebenen die gerade Verbindungslinie Aa ist. Diese Schnittlinie gehört sowohl der Vertikalebene in

A als auch der Vertikalebene in *a* an, weshalb auch den Punkten *A* und *a* dieselbe Zugehörigkeit zukommt. Wird nun weiters das Fernrohr in *a* durchgeschlagen und ein zweiter Zwischenpunkt *b* auf der sphäroidischen Oberfläche bezeichnet, so ist es einleuchtend, daß der Punkt *b* nicht mehr in der Normalschnittlinie *A a B*, sondern abseits davon zu liegen kommen muß, weil ja die vertikale Umdrehungsachse des Theodolits im Standpunkte *a* nicht mehr in der Normalschnittebene *A a B* gelegen ist, sondern eben nur den einzigen Punkt *a* mit derselben gemeinsam hat, sonst aber um einen kleinen Winkel von ihr abweicht. Es ist aber auch einleuchtend, daß die drei Punkte *A a b* in einer und derselben Vertikalebene, nämlich in der Kippebene des Theodolits im Standpunkte *a* liegen müssen, wobei jedoch nicht übersehen werden darf, daß bei dem Rückblick nach *A* eben nur der Fußpunkt *A* des ersten Visierstabes und bei dem Vorblick nach *b* eben nur der Fußpunkt *b* des zweiten Visierstabes von dem Vertikalfaden des Instrumentes zur Deckung gelangen, daß aber die Visierstäbe selbst, und zwar der eine nach links, der andere nach rechts um den wiederholt erwähnten kleinen Winkel aus der Kippebene des Instrumentes herausgedreht erscheinen.

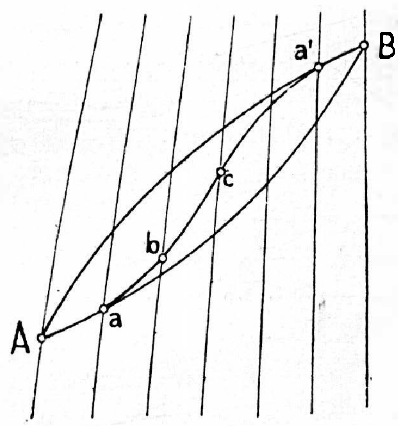

Fig. 2.

Bringt man nun den Theodolit im dritten Stadium der Absteckungsarbeit vertikal über *b*, zielt zurück nach *a*, schlägt das Fernrohr durch und fixiert einen vierten Punkt *c* der Erdoberfläche, so liegen allerdings, wie früher die drei Punkte *A a b* in der Vertikalebene des Punktes *a*, nunmehr die drei Punkte *a b c* in der jetzigen Vertikalebene des Punktes *b*, der Punkt *A* jedoch kann der letzteren Ebene nicht mehr angehören, denn die beiden durch *A a b* und *a b c* bestimmten Schmiegungsebenen haben wohl die Schnittlinie *a b* der beiden in *a* und *b* errichteten Normalebenen gemeinsam, die beiden anderen Elemente *A a* und *b c* erscheinen jedoch um unseren kleinen Winkel im horizontalen Sinne von einander abgelenkt, weil die vertikale Kippebene im Standpunkte *b* die Normalen der Punkte *a* und *c* gerade in der Erdoberfläche selbst, die Normale von *A* aber bereits außerhalb dieser Fläche schneidet, während sie die Normale in *b* natürlich vollständig in sich enthält.

II.

Die Definition der geodätischen Linie.

Bei der Verschiedenartigkeit der Formulierung der für die geodätische Linie bestehenden Definitionen sei es hier unternommen, die unterschiedlichen Erklärungsweisen auf möglichst einfachem und elementarem Wege in mathematischen Einklang zu bringen.

Die geodätische Linie zwischen zwei irgend einer krummen Fläche angehörenden Punkten wird in geodätischen Werken definiert als diejenige Kurve, welche in jedem Punkte mit irgend einer an diesem Punkte gelegten Flächentangente gleiche Scheitelwinkel bildet.

Diese Definition entspringt der gedachten Entstehungsweise der geodätischen Linie durch fortgesetztes punktweises Einweisen auf der krummen Fläche, ebenso wie eine gerade Linie durch schrittweises Abstecken in der Ebene erhalten wird. Es ist daher eine sehr zutreffende Ausdrucksweise, wenn Soldner in der «Monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde», 1805, § 7, die geodätische Linie als eine «geodätisch gerade Linie» bezeichnet oder wenn sie Helmert in den «Mathem. Theorien der höheren Geodäsie», 1880, S. 70, «die gerade Linie des Geodäten» nennt.

Die Identität der geodätischen Linie mit dem kürzesten Linienzuge hat Jordan in seinem «Handbuch der Vermessungskunde», III, 1896, § 70, durch Differentiation der zwischen zwei Punkten einer krummen Fläche allgemein gültigen Bedingungsgleichung, Klingatsch in der «Zeitschr. f. Verm.», XXVI, 1897, S. 614, mit Zuhilfenahme eines bifokalen Rotationsellipsoides und eines Rotations-Doppelkegels und Czuber in den «Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung», 1898, II, S. 387, durch die Variationsrechnung nachgewiesen. Im Nachstehenden sei nun zunächst gezeigt, daß dieser Beweis auch mit ganz elementaren Mitteln geführt werden kann.

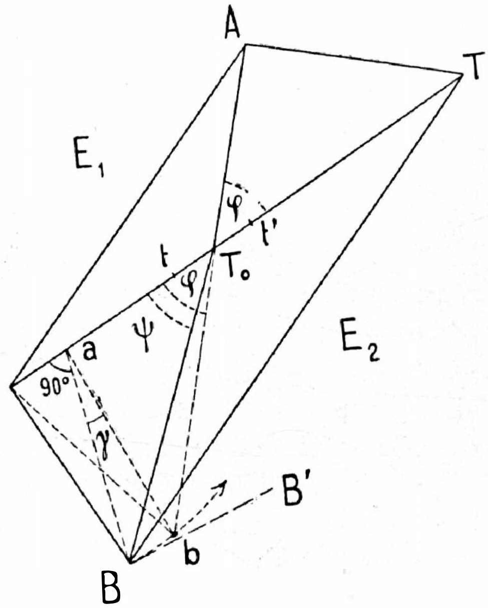

Fig. 3.

Sind ATT' und BTT' in Fig. 4 zwei mit der Seite TT' aneinanderstoßende Elemente einer krummen Fläche, die man im Vergleiche zur Krümmung der Fläche als eben betrachten kann, z. B. zwei kleine Dreiecke eines Triangulierungsnetzes, und stellt AT_0B die geodätische Linie zwischen A und B und die gemeinsame Dreiecksseite TT' die Schnittkante der beiden Dreiecksebenen E_1 und E_2 dar, so nimmt der Schnittpunkt T_0 der geodätischen Linie mit der Kante TT' auf der letzteren eine solche Lage ein, daß die Scheitelwinkel φ und ψ einander gleich werden. Wird daher die Ebene E_2 um die Schnittkante TT' so lange gedreht, bis sie mit der Erweiterung der Ebene E_1 zusammenfällt, so daß der Endpunkt B durch diese Drehung um den Drehungsmittelpunkt a nach b gelangt und bei a der Neigungswinkel γ der beiden Ebenen E_1 und E_2 erscheint, so muß vermöge der Gleichheit der Scheitelwinkel das aufgedrehte Element T_0b mit dem unverändert gelassenen Elemente AT_0 eine Gerade bilden.

Die geodätische Linie könnte daher auch nach dieser Auffassung definiert werden als diejenige Kurve, deren jedes Element gleich ist der in die Tangentialebene des vorhergehenden Elementes umgelegten Verlängerung dieses Elementes.

In dem ebenen Vierecke $ATbT'$ ist T_0 der Schnittpunkt beider Diagonalen. Da in einem Vierecke die Diagonale stets kürzer ist als die Summe der beiden ihr gegenüberliegenden Seiten, so ist

$$Ab = AT_0 + T_0b = AT_0 + T_0B$$

immer kürzer als die Summe:

$$AT + Tb = AT + TB$$

oder: $$AT' + T'b = AT' + T'B$$

oder auch: $$At + tb = At + tB \text{ u. s. w.,}$$

womit dargetan ist, daß die geodätische Linie im allgemeinen den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten auf einer krummen Fläche bezeichnet und daß es zwischen zwei Punkten nur eine mit der geodätischen Linie identische Kürzeste gibt.

Dieser Beweis läßt sich auch durch Betrachtung der beiden Geraden AB und TT' in Fig. 1 leicht erbringen, indem nachgewiesen werden kann, daß die Normale von T_0 auf AB den kürzesten Abstand der beiden sich kreuzenden Geraden AB und TT' darstellt und daß unter allen von der gemeinschaftlichen Grundlinie AB und irgend einem Punkte der Kante TT' gebildeten Dreiecken das Dreieck ABT_0 die kürzeste Höhe oder den geringsten Flächeninhalt besitzt und daß daher die Summe der der Grundlinie AB gegenüberliegenden Seiten

$$AT_0 + T_0B$$

bei diesem Dreiecke ein Minimum ist.

Wegen dieser charakteristischen Eigenschaft ist man nach Schell (Theorie der Bewegung und der Kräfte) auch berechtigt, die geodätische Linie als die Gleichgewichtsfigur eines über eine Fläche hin gespannten Fadens zu definieren, welchen Gedanken auch schon Dr. Barfuß in seinem «Handbuch der Meßkunde» 1847 ausgesprochen hat.

Übergehend auf eine stetig gekrümmte Fläche wird der Linienzug $A T_0 B$ im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung, die Kante TT' eine Tangente an der krummen Fläche und der Punkt T_0 der Tangentenberührungspunkt der geodätischen Kurve. Die durch $A T_0 B$ gelegte Ebene wird zur Schmiegungsebene, welche die beiden in T_0 zusammentreffenden Elemente der geodätischen Linie enthält, auf der Flächentangentialebene senkrecht steht und die durch die Flächentangente gehende Flächennormalebene in der Flächennormalen schneidet.

Man kann daher nach Czuber folgende Definitionen für die geodätische Linie aufstellen:

«Unter einer geodätischen Linie ist eine solche Kurve auf der Fläche zu verstehen, deren Schmiegungsebene senkrecht ist zur Tangentialebene der Fläche in dem betreffenden Punkte; oder sie ist eine solche Kurve, bei welcher in jedem Punkte die Hauptnormale in die Normale der Fläche fällt.»

Die bedingungslos jeder ebenen Kurve zukommende Eigenschaft betreffend die Gleichheit der Scheitelwinkel vermag also nicht jede beliebige Kurve doppelter Krümmung aufzuweisen, sondern nur diejenige, deren zwei unmittelbar auf einander folgende Elemente in einer Ebene liegen, welche auch die Flächennormale des Berührungspunktes T_0 in sich enthält, was nur bei der geodätischen Linie zutrifft.

Da für unendlich kleine Elemente der Kreisbogen Bb (Fig. 3) in die Flächennormale des Punktes B übergeht, so lautet alsdann der aus der Gleichheit der Scheitelwinkel und der zweiten Definition hervorgehende, für die Ableitung der Differentialgleichung der geodätischen Linie grundlegende Satz: Bei der geodätischen Linie ist von zwei zusammenstoßenden, unendlich kleinen Elementen das eine Element immer gleich der auf die krumme Fläche projizierten Verlängerung des anderen Elementes. In diesem Sinne erscheint auch die geodätische Linie von Dr. Grunert in seinen «Elementen der ebenen, sphärischen und sphärodischen Trigonometrie» S. 243) zum ersten Male definiert.

Neumessung des Grundbesitzes der k. u. k. militär-aeronautischen Anstalt in Fischamend.

Von Obergeometer **L. Mielichhofer,** beh. autor. Geometer in Wien.

Der geometrischen Aufnahme des vom k. u. k. Militärärar in Fischamend angekauften Grundbesitzes ist ein Dreiecksnetz, gebildet durch die trigonometrischen Punkte 1 bis 7, zugrunde gelegt.

In diesem Dreiecksnetze wurden alle Winkel je zweimal mit dreifacher Repetition gemessen und die Messungswidersprüche nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen.

Die Orientierung des Dreiecksnetzes im Koordinatensystem «Sct. Stefan» des Grundsteuerkatasters geschah mit Benützung der Katasterkoordinaten der trigonometrischen Punkte «Kirche Dorf Fischamend (P_d)» und «Kirche Markt