

Paper-ID: VGI_191208



Eine Studie über Ausgleichung von Polygonzügen

Norbert Haponowicz ¹

¹ *stud. techn. in Lemberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **10** (2), S. 38–46

1912

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Haponowicz_VGI_191208,  
  Title = {Eine Studie {\u}ber Ausgleichung von Polygonz{\u}gen},  
  Author = {Haponowicz, Norbert},  
  Journal = {{{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {38--46},  
  Number = {2},  
  Year = {1912},  
  Volume = {10}  
}
```



katasters in Wien in probeweiser Verwendung und wurde am 18. Oktober 1896 zum Evidenzhaltungsgeometer II. Klasse für Millstadt in Kärnten ernannt.

Am 24. November desselben Jahres vermählte sich Buschek mit Fräulein Silva Giuseppina Bonapace aus Rovereto, mit welcher ihn eine glückliche Ehe bis zu seinem Tode vereinte.

Buschek rückte am 20. Februar 1898 zum Geometer I. Klasse und am 3. Juli 1901 zum Obergeometer II. Klasse vor und wurde über seine Bewerbung am 12. April 1902 zur Dienstleistung in das Triangulierungs- und Kalkulobureau in Wien einberufen. Hier ward er im Jahre 1903 mit der Triangulierung und Vermessung des Gebietes der Landeshauptstadt Troppau nach der Polygonalmethode betraut. Dieser Arbeit oblag Buschek mit Eifer und Erfolg bis zu seiner am 29. Mai 1906 erfolgten Ernennung zum Evidenzhaltungs-Inspektor für Tirol, welche ihn völlig unerwartet in Troppau traf.

Obgleich ihn diese Ernennung mit großer Freude und Genugtuung erfüllte, bedauerte es Buschek dennoch, schon nach so kurzer Zeit aus dem genannten Bureau scheiden zu müssen, in welchem sein reger Geist so manche Anregung und Förderung gefunden und wo er sich im Kreise treuer Freunde so heimisch gefühlt hatte.

Aber auch in seinem neuen Wirkungskreise, in Tirol, fand Buschek, der am 17. Dezember 1908 zum Evidenzhaltungs-Oberinspektor befördert worden war, volle Befriedigung. Verband ihn mit Innsbruck doch noch so manche traute Jugenderinnerung und war die Stelle, die er einnahm, doch jene, in welcher vor Jahren auch sein Vater in gleicher Eigenschaft gewirkt hatte. Sein rastloser Fleiß, seine reichen Kenntnisse und Erfahrungen fanden hier ein weites, uneingeschränktes Feld der Betätigung, der er in seltener Hingebung und Energie, aber auch mit besonderem Takte oblag — von den Vorgesetzten wegen seiner Pflichttreue und seines rechtlichen Charakters hochgeschätzt, von den ihm unterstellten Beamten als wohlwollender Berater und gerechter Beurteiler geliebt und verehrt.

Bis zum letzten Frühjahre erfreute sich Buschek vollkommener Gesundheit, im Sommer jedoch stellten sich bei ihm Zeichen neurasthenischer Erkrankung ein. Er suchte in dem italienischen Bade Montecatini Erholung, glaubte sich auf dem Wege der Genesung und machte seine Pläne für die Zukunft. Und wie kam es doch so anders, so ganz anders. *Engel.*

Eine Studie über Ausgleichung von Polygonzügen.

Von **Norbert Haponowicz** stud. techn. in Lemberg.

Die Ausgleichung eines Polygonzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate besteht bekanntlich darin, die Unstimmigkeiten des Endpunktes und der Endrichtung durch Verbesserungen der gemessenen Seiten und Winkel so zu beseitigen, daß dabei die **Summe**

$$[pvv] + [pww] \dots \dots \dots 1)$$

ihr Minimum erreiche. Es bedeuten in dem Ausdrucke p die Gewichte der Beobachtungen, v die Verbesserungen der Seiten und w diejenigen der Winkel. Man kann dies auch anders ausdrücken, wenn man den aus der Mechanik bekannten Begriff der virtuellen Verschiebungen einführt. Es muß nämlich

$d[pvv] + d[pvw] = 0$ *gilt nicht*
oder $[pvdv] + [pw dw] = 0$ *mathematisch*

sein für alle virtuellen Verschiebungen des Polygons.

Die Ausgleichung kann nun leicht auf eine mechanische Aufgabe zurückgeführt werden. Denken wir uns Stäbe von der Eigenschaft, daß sie der Länge nach dehnbar, dagegen unbiegsam sind. Wir verbinden die Stäbe untereinander durch elastische Gelenke. Die Dehnung eines Stabes wird der in ihm wirkenden Achsialkraft und die Winkeländerung dem Momente in dem Scheitel des Winkels proportional sein. Man wird sonach setzen können

Hooke'sches Gesetz $P_i = \alpha_i v_i$ $M_i = \beta_i w_i$ *d. h. ... Prop. fähig*

Die Längen der Stäbe und die Winkel, die sie miteinander bilden, seien gleich den gemessenen Größen des Polygonzuges. Das so zusammengefügte Stabsystem bringen wir mit dem Schenkel und Scheitel des ersten Winkels in seine richtige Lage im Polygonzuge; es wird dann der letzte Scheitel des Systems nicht in den bekannten richtigen Endpunkt des Polygons fallen, auch der Schenkel des letzten Winkels nicht der wahren letzten Polygonrichtung parallel sein. Durch Anbringung einer Kraft und eines Kräftepaares an dem letzten Schenkel kann man jedoch Übereinstimmung herbeiführen. Für das Gleichgewicht muß nun nach bekanntem Satze die Arbeit aller Kräfte bei jeder virtuellen Verschiebung Null sein. Da die äußeren Kräfte einen starren Angriffspunkt haben, leisten bei der Verschiebung nur die inneren Kräfte Arbeit, nämlich

Zwei

Widerlager $P \equiv \sum (v_i^2 + w_i^2)$ $[\alpha v dv] + [\beta w dw]$ $\beta \equiv \tau$ (τ)

Dieser Ausdruck soll Null sein. Es ist diese Bedingung mit derjenigen für das ausgeglichene Polygon identisch, wenn nur die α proportional sind den Gewichten der Längenmessungen, die β denjenigen der Winkel. Es leuchtet also ein, daß das Stabsystem unter dieser Voraussetzung die Gestalt des ausgeglichenen Polygons annehmen wird.

um den Maßstab in seine endgültige Lage bringen

Über die Gewichte der gemessenen Größen machen wir die gewöhnlichen Annahmen. Wir setzen also die Winkel als gleich genau mit dem mittleren Fehler μ voraus, und den mittleren Fehler einer Längenmessung

Wahrscheinlichkeit

$$m = k \sqrt{l}$$

Weiterhin definieren wir die Gewichte einfach als reziproke Werte der mittleren Fehlerquadrate. Dies ist auch wegen Homogenisierung des Ausdruckes 1) nötig. Mit diesen Voraussetzungen können wir nun die Koeffizienten α , β leicht berechnen. Es wird nämlich

$$\alpha_i = c p_i = \frac{c}{k^2 l_i} \quad \beta = c p = \frac{c}{\mu^2}$$

und wenn man noch $c = k^2$ wählt,

$$\alpha_i = \frac{1}{l_i} \quad \beta = \left(\frac{k}{\mu}\right)^2$$

Besseren Nachweis, daß identisch

Die Deformationen können also aus den einfachen Formeln berechnet werden:

$$P_i = \frac{\tau_i}{l_i} \quad M_i = \left(\frac{k}{u}\right)^2 \tau_i \dots \dots \dots 2)$$

Man kann sich demnach vorstellen, daß die Stäbe von gleichem Querschnitt und die Gelenke von gleicher Steifigkeit sind. *und einigert?*

Bevor wir zur Bestimmung der auf den letzten Schenkel wirkenden Kräfte schreiten, wollen wir allgemeine Betrachtungen anstellen über die Deformationen des Stabpolygons, welche von Kräftepaaren und Kräften hervorgerufen werden.

Nehmen wir zunächst das Ende des Polygons als frei an, und lassen darauf ein Kräftepaar vom Momente M wirken. Da das Paar keine Resultante besitzt, wird es auch keine Längenänderungen verursachen. Die Winkel werden sich dagegen alle um die gleiche Größe

$$w = \left(\frac{u}{k}\right)^2 M$$

ändern, und die Richtung des Endschenkels um

$$nw = n \left(\frac{u}{k}\right)^2 M$$

Damit wäre auch die Frage nach der Wirkungsart eines Kräftepaars erledigt. *)

Bringen wir nun an dem letzten Schenkel eine Kraft $P = 1$ an. Sie wird sowohl die Stablängen ändern, als auch die Winkel. Die Gesamtverschiebung wird also aus zwei Teilen bestehen: der eine wird nur durch die Dehnungen hervorgerufen, der zweite nur durch die Winkeländerungen verursacht werden. Betrachten wir vor allem den ersten.

Die Dehnung der Stäbe ist von der Achsialkraft abhängig. Letztere läßt sich für einen beliebigen Stab CD durch Projektion der Kraft P auf die Stabrichtung bestimmen (Fig. 1). Es ist also

$$P_1 = P \cos \alpha_1 = \cos \alpha_1$$

und die Dehnung nach 2)

$$v_i = P_1 l_i = l_i \cos \alpha_i$$

Dies ist einfach die Projektion der Stablänge auf die Kraftrichtung. Um nun die Gesamtdeformation zu erhalten, wird man die Einzeldehnungen geometrisch summieren. Die Konstruktion ist, wie die nebenstehende Figur zeigt, sehr einfach: Man projiziert die Scheitel $A, B, C \dots$ auf die Kraftrichtung und trägt, von einem beliebigen Punkte a beginnend, die Projektionen der einzelnen Seiten in den Richtungen der letzteren auf. So erhält man die Verschiebung \overline{ae} des Endpunktes für die Kraft $P = 1$.

Während auf die Längenänderungen der Stäbe nur die Richtung der Kraft Einfluß hatte, dagegen die Lage gleichgültig war, ist dies bei den Winkeländerungen nicht der Fall. Wählen wir die Kraft so, daß der Schwerpunkt der Polygonscheitel auf der Wirkungsgeraden liege. Das Moment der Kraft in bezug auf einen beliebigen Scheitel C ist

*) Über die Verschiebung des Endpunktes des Polygons will ich nur die kurze Bemerkung machen, daß sie einer Drehung dieses Punktes äquivalent ist, die um den Schwerpunkt der Scheitel ausgeführt wird und deren Größe nw beträgt.

1. Kräftepaar!
2. Kraft
3. 1
4. 1
5. 1
6. 1
7. 1
8. 1
9. 1
10. 1
11. 1
12. 1
13. 1
14. 1
15. 1
16. 1
17. 1
18. 1
19. 1
20. 1
21. 1
22. 1
23. 1
24. 1
25. 1
26. 1
27. 1
28. 1
29. 1
30. 1
31. 1
32. 1
33. 1
34. 1
35. 1
36. 1
37. 1
38. 1
39. 1
40. 1
41. 1
42. 1
43. 1
44. 1
45. 1
46. 1
47. 1
48. 1
49. 1
50. 1
51. 1
52. 1
53. 1
54. 1
55. 1
56. 1
57. 1
58. 1
59. 1
60. 1
61. 1
62. 1
63. 1
64. 1
65. 1
66. 1
67. 1
68. 1
69. 1
70. 1
71. 1
72. 1
73. 1
74. 1
75. 1
76. 1
77. 1
78. 1
79. 1
80. 1
81. 1
82. 1
83. 1
84. 1
85. 1
86. 1
87. 1
88. 1
89. 1
90. 1
91. 1
92. 1
93. 1
94. 1
95. 1
96. 1
97. 1
98. 1
99. 1
100. 1

$$M = P \cdot x_i = x_i$$

wenn x_i die senkrechte Entfernung des Scheitels von der Kraft bedeutet. Die Winkeländerung ist nach 2)

$$w_i = M \cdot \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 x_i$$

also die Richtungsänderung des letzten Schenkels

$$\Sigma w = \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 \Sigma x_i$$

die Summe der x_i = 0

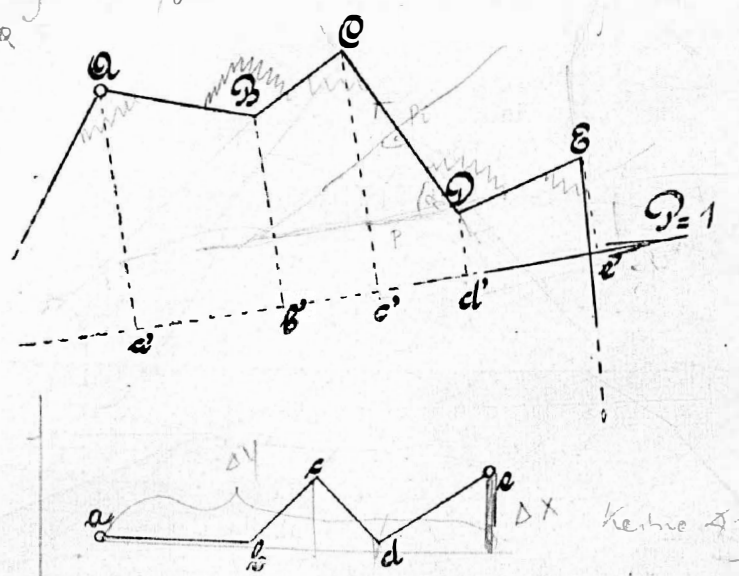


Fig. 1.

Nun geht die Kraftrichtung durch den Schwerpunkt der Scheitel, also ist bekanntlich $\Sigma x = 0$. Es folgt daraus, daß die angenommene Kraft in dem Endschenkel eine Parallelverschiebung hervorruft, ohne seine Richtung zu ändern. Die Verschiebung selbst entsteht aus Drehungen um die einzelnen Scheitel. Betrachten wir die Verschiebung eines beliebigen Scheitels D , welche durch die Drehung um B hervorgerufen wird (Fig. 2). Die Winkeländerung in B beträgt

$$\Delta \beta = \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 x_B = \epsilon$$

die zu BD senkrechte Verschiebung also

$$\left(\frac{\mu}{k}\right)^2 x_B \cdot \overline{BD} \quad (\text{Radius} \times \text{Bogenlänge})$$

Wir zerlegen diese Verschiebung in zwei Komponenten, die eine parallel, die andere senkrecht zur Kraft P . Erstere beträgt $\left(\frac{\mu}{k}\right)^2 x_B \cdot \overline{BD} \cos \alpha$, wenn α den Winkel bedeutet, den die Verschiebungsrichtung mit der Kraft bildet. Man sieht aber leicht ein, daß $\overline{AD} \cos \alpha$ die Projektion $\overline{B_1 D_1}$ des Abstandes \overline{BD} auf eine zur Kraft senkrechte Gerade ist. Es beträgt also die zur Kraft parallele Verschiebung

$$\left(\frac{\mu}{k}\right)^2 x_B \cdot \overline{B_1 D_1}$$

Ähnlicherweise wäre die vertikale*) Komponente der Verschiebung von C gleich

$$\left(\frac{u}{k}\right)^2 x_B \cdot B_1 C_1$$

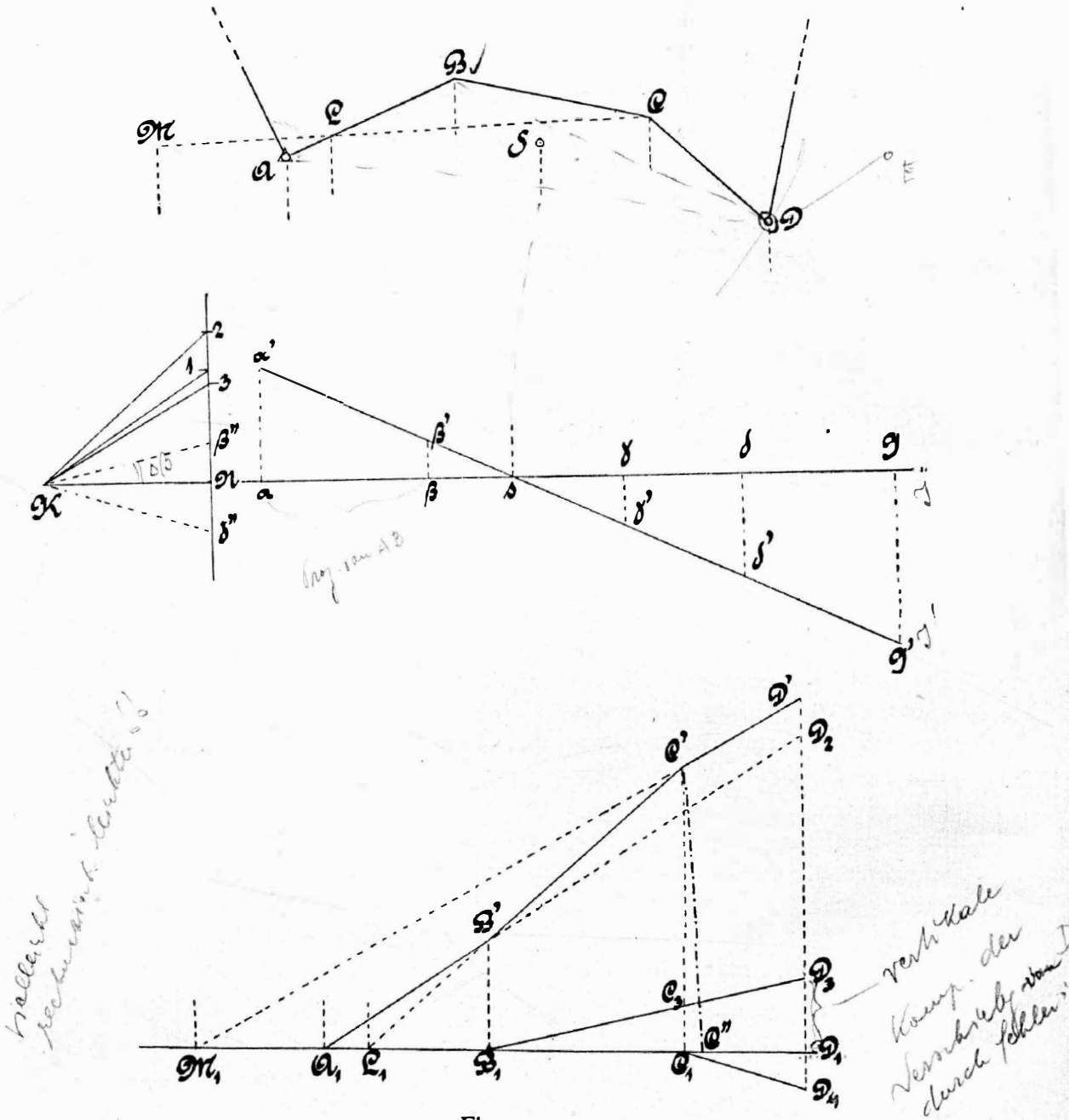


Fig. 2.

Beide Größen, sowohl die Winkeländerung als auch die Verschiebung, kann leicht geometrisch konstruiert werden. Ziehen wir durch den Schwerpunkt der Scheitel S eine Vertikale (verlängern wir also die Krafttrichtung) und hierzu eine

*) Wir wollen im Weiteren, der Kürze wegen, die zur Kraft parallelen Richtungen vertikal, die hierzu senkrechten horizontal nennen.

(Konstruktion)

beliebige Senkrechte $\alpha\delta$. Durch den Schnittpunkt beider Geraden, der s heißen möge, legen wir nun eine beliebige Gerade $s\alpha'$, und in der Entfernung

$$\overline{sJ} = \left(\frac{k}{\mu}\right)^2 \quad *)$$

von s eine zweite Vertikale JJ' . Vom Punkte N aus schneiden wir

$$\overline{KN} = \overline{JJ'}$$

ab und sind nun imstande, die Winkeländerungen in allen Scheiteln zu konstruieren. Wir ziehen durch den betreffenden Scheitel z. B. B eine Vertikale, auf der von den Geraden $\alpha\delta$ und $\alpha'\delta'$ die Länge $\overline{\beta\beta'}$ abgeschnitten wird. Machen wir nun $\overline{N\beta''} = \overline{\beta\beta'}$ und verbinden β'' mit K , so ist das Verhältnis

$$\frac{\overline{N\beta''}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{\beta\beta'}}{\overline{JJ'}} = \frac{\overline{s\beta}}{\overline{sJ}} = \frac{x_B}{\left(\frac{k}{\mu}\right)^2} = \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 \cdot x_B = \Delta\beta = \Delta\beta$$

also gleich der Winkeländerung in B . Projiziert man nun noch den Scheitel B auf eine beliebige Horizontale $A_1 D_1$, zieht durch die Projektion B_1

$$B_1 D_1 \parallel K\beta''$$

so ist

$$\frac{\overline{D_1 D_2}}{\overline{B_1 D_1}} = \frac{\overline{N\beta''}}{\overline{KN}} = \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 \cdot x_B$$

$$\text{also } \overline{D_1 D_2} = \left(\frac{\mu}{k}\right)^2 \cdot x_B \cdot \overline{B_1 D_1} \quad \checkmark$$

gleich der vertikalen Komponente der Verschiebung von D_1 , die durch die Winkeländerung in B verursacht worden ist. Ähnlicherweise stellt $C_1 C_2$ die entsprechende Verschiebung von C dar. *auch B E würde nun den selben z Verschiebung werden*

Ganz wie für B kann man die Konstruktion für jeden anderen Scheitel ausführen. So erhalten wir z. B. die von der Winkeländerung in A verursachten vertikalen Verschiebungen, indem wir $\overline{N\bar{1}} = \overline{\alpha\alpha'}$ machen und $A_1 D_2 \parallel K\bar{1}$ ziehen.

Für den Scheitel C schneiden wir ebenso $\overline{N\bar{\gamma}} = \overline{\gamma\gamma''}$ ab und ziehen $C_1 D_3 \parallel K\bar{\gamma''}$.

Um nun die von den Winkeländerungen in allen Scheiteln verursachte totale vertikale Verschiebungskomponente zu erhalten, müßte man z. B. für den Punkt D alle Partialverschiebungen $\overline{D_1 D_2}$, $\overline{D_1 D_3}$, $\overline{D_1 D_4}$ mit Berücksichtigung des Vorzeichens addieren. Dies kann man auf folgende Weise umgehen:

Die Längen $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$ usw. tragen wir nicht einzeln vom Punkte N aus auf, sondern addieren sie graphisch, indem wir $\overline{N\bar{1}} = \overline{\alpha\alpha'}$, $\overline{1\bar{2}} = \overline{\beta\beta'}$, $\overline{2\bar{3}} = \overline{\gamma\gamma'}$, $\overline{3\bar{N}} = \overline{\delta\delta'}$ machen, die erhaltenen Punkte mit K verbinden und die Seiten des Verschiebungspolygons parallel zu den Verbindungslinien ziehen, nämlich

$$A_1 B' \parallel K\bar{1} \quad B' C \parallel K\bar{2} \quad C D' \parallel K\bar{3}$$

*) Wird für die gewöhnlichen Fälle $m = \pm 0.005 \sqrt{l}$ und $\mu = \pm 25''$ angenommen, so ist $\left(\frac{k}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{0.005}{25''}\right)^2 = \text{rund } 1700 \text{ Meter, eine Größe, welche in der Skala der Zeichnung des Polygons aufgetragen wird.}$

Polygons aufgetragen wird.

Die Ordinaten B, B', C, C', D, D' stellen dann resp. für die Scheitel B, C, D die vertikalen Komponenten der totalen Verschiebungen dar. Die letzte Seite wird parallel zu $A_1 D_1$, also horizontal, da, wie wir bewiesen haben, der letzte Schenkel des Polygonzuges eine reine Verschiebung ohne Richtungsänderung erfährt. horizontal

Es bleibt noch zu zeigen, wie die zur Kraft senkrechten Komponenten der Verschiebungen erhalten werden können. Wir wollen zu dem Zwecke die Bewegungen des Systems vom kinematischen Standpunkte aus betrachten. Es läßt sich danach die Bewegung eines jeden Stabes als Drehung um eine bestimmte zur Polygonebene senkrechte Achse auffassen. Betrachten wir zwei benachbarte Stäbe des Polygons: Ihr gemeinsamer Scheitel bewegt sich, den Gesetzen der Kinematik gemäß, senkrecht zur Verbindungslinie des Scheitels mit dem Drehungsmittelpunkte sowohl des einen, wie des anderen Stabes. Es folgt daraus — wie leicht einzusehen ist — daß der gemeinsame Scheitel zweier benachbarter Stäbe und ihre Drehungsmittelpunkte auf einer Geraden liegen. Andererseits gehen wir von der Bemerkung aus, daß jeder Mittelpunkt als ein mit dem entsprechenden Stabe starr verbundener Punkt betrachtet, keine Verschiebung erfährt; verlängert man also diejenige Seite des Verschiebungspolygones, welche z. B. dem Stabe CD entspricht, also $C'D'$, bis zum Schnittpunkte M_1 mit der Geraden $A_1 D_1$, so ist dieser Punkt die Projektion desjenigen Mittelpunktes, um den sich der Stab CD bewegt. Verlängert man ähnlicherweise $B'C'$ bis zum Schnitte mit $A_1 D_1$, so erhält man die Projektion L_1 des Mittelpunktes, der dem Stabe BC entspricht.

Auf Grund der gefundenen Beziehungen lassen sich die Drehungsmittelpunkte aller Stäbe bestimmen. Derjenige des Stabes AB liegt selbstverständlich im Punkte A , da der Stab mit diesem Punkte drehbar verbunden ist. Der Mittelpunkt des nächsten Stabes BC muß auf der Verbindungslinie des gemeinsamen Scheitels B mit dem Mittelpunkte des Stabes BC liegen, also in die Gerade AB fallen, während seine Projektion L_1 auf $A_1 D_1$ bereits bestimmt wurde. Der Punkt L , um den sich der Stab BC dreht, ist also dadurch bestimmt. Ähnlicherweise muß der Mittelpunkt M des Stabes CD auf der Geraden LC liegen und auf $A_1 D_1$ die Projektion M_1 liefern, er ist also ebenso leicht zu erhalten. Indem man auf ähnliche Weise mit allen Stäben der Reihe nach verfährt, findet man alle Drehungsmittelpunkte. Um nun die totale Lagenänderung eines Scheitels zu erhalten, müssen wir beachten, daß die Vertikalkomponente und die Richtung der Verschiebung bekannt ist. Letztere ist nämlich zur Verbindungslinie des Scheitels mit dem entsprechenden Drehungsmittelpunkte senkrecht. Graphisch finden wir also die totale Verschiebung z. B. des Scheitels C , indem wir vom Punkte C' eine Senkrechte zur Geraden LC bis zum Schnittpunkte C'' mit der Basis $A_1 D_1$ ziehen. Es stellt dann $C'' C'$ die Totalverschiebung dar, sowohl der Größe, als auch der Richtung nach.

Wir haben im Vorangehenden gefunden, wie die Verschiebungen eines Stabsystems, hervorgerufen sowohl durch Dehnungen (Fig. 1) wie auch durch Winkeländerungen (Fig. 2), graphisch bestimmt werden können. Die Summe gibt dann die ganze Lagenänderung der Scheitel und es ist somit die Frage nach der Wirkungsart und -Größe der Kräfte erledigt. Es bleibt also nur noch zu zeigen,

welchen Nutzen man bei der Ausgleichung von Polygonzügen aus den gefundenen Beziehungen ziehen kann.

Denken wir uns das Stabsystem nach den gemessenen Größen zusammengestellt. Bringen wir vor allem an dem Schenkel des letzten Winkels ein Moment an, welches ihn in die wahre Richtung zwingt. Es ist diese Operation nach dem Vorhergehenden identisch mit einer gleichmäßigen Verteilung des Fehlers im Richtungsanschluß auf alle Winkel. Mit den verbesserten Werten der Winkel berechnen wir die Koordinaten der Polygonscheitel. Dieser Teil der Ausgleichung ist also mit dem gewöhnlichen Verfahren der genäherten Ausgleichung identisch. Wir finden nun, daß die Lage des letzten Scheitels von der bekannten richtigen Lage abweicht. Wir suchen also die Kraft zu bestimmen, welche auf den letzten Schenkel wirkend die Unstimmigkeit beseitigen würde. Zu dem Zwecke tragen wir das Polygon in entsprechendem Maßstab auf Millimeterpapier auf, und von seinem Endpunkte die Abweichung in größerer Skala, darauf bestimmen wir den Schwerpunkt der Scheitel. Es geschieht dies am besten auf die Art, daß man die Lage des Schwerpunktes ganz ungenau schätzt, ^{derselben} in der Nähe desselben einen Punkt wählt und mit den Scheiteln durch Radienvektoren verbindet. Wird dann die geometrische Summe letzterer, geteilt durch die Anzahl der Scheitel, vom gewählten Punkte aufgetragen, so fällt ihr Endpunkt in den gesuchten Schwerpunkt.

Wir schreiten nun zur Bestimmung der Kraft, die die Unstimmigkeit beseitigt, ihrer Richtung und Größe. Ersteres kann uns eine mechanische Betrachtung erleichtern: Das Stabsystem ist ein elastisches, dem Hooke'schen Gesetze unterliegendes Gebilde, man kann also darauf das Maxwell'sche Gesetz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen anwenden. Finden wir somit für eine zur Abweichung senkrechte Kraft $Q = 1$ die Verschiebung des Endscheitels, so muß die Projektion der letzteren auf die gesuchte Krafrichtung gleich sein der Projektion der Abweichung auf die Kraft Q . Da diese Projektion Null ist, muß die gesuchte Krafrichtung auf der von der Kraft Q bewirkten Verschiebung senkrecht stehen. Es ist also die Bestimmung dieser Richtung sehr einfach: Senkrecht zur gefundenen Abweichung lassen wir auf den Endschenkel eine Kraft $Q = 1$ wirken; wir finden die Verschiebung des Endpunktes, indem wir den durch Dehnung verursachten Teil zu dem von den Winkeländerungen herrührenden geometrisch addieren. Nun wissen wir, daß die gesuchte Kraft zu der gefundenen Verschiebung senkrecht stehen wird. Wir lassen also in der neuen Richtung nochmals eine Kraft $P = 1$ wirken und ermitteln die von ihr bewirkten Verschiebungen aller Scheitel. Es sei (Fig. 3) $abcde$ das nach Fig. 1 ermittelte Dehnungspolygon, b_2, c_3, d_4, e_5 die von den Winkeländerungen verursachten, also nach Fig. 2 bestimmten Verschiebungen. Es stellen dann die Radienvektoren a_2, a_3, a_4, a_5 die totalen, von der Kraft P herrührenden Lagenänderungen resp. der Scheitel B, C, D, E dar. Nun finden wir, daß die Verschiebung a_5 des Endscheitels zwar schon in die Richtung der Abweichung aw fällt, aber der Größe nach mit ihr nicht übereinstimmt. Wir müssen somit im Verhältnis, in dem diese Größen zueinander stehen, die Kraft P , also auch alle Verschiebungen,

70. 11. 1901
 allen Verschiebungen

vergrößern. Dies geschieht auf die Weise, daß man auf einer beliebigen Geraden aw' die Längen

$$a5' = a5 \quad aw' = aw$$

aufträgt und die Vergrößerung mittels Konstruktion durchführt. Ist z. B. die definitive Verschiebung des Scheitels B zu finden, so verlängern wir die Verschiebung $a2$, verbinden 2 mit $5'$ und ziehen $w'I \parallel 25'$. Es gibt dann aI die gesuchte Verschiebung und, wenn die Zeichnung auf Millimeterpapier ausgeführt wurde, kann man die Koordinatenverbesserungen ohne weiteres ablesen.

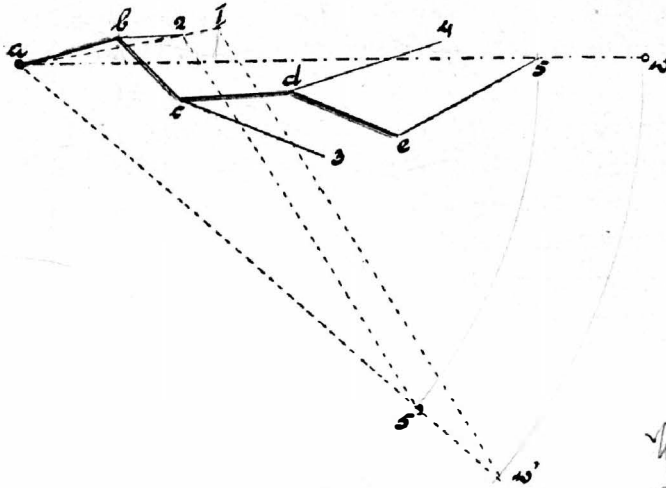


Fig. 3.

nachtragliche
A 3 ?

Besonders einfach gestaltet sich die Ausgleichung im Falle des geraden Polygonzuges. Hier kann man die auf den letzten Schenkel wirkende Kraft in zwei Komponenten zerlegen: Die eine, in der Polygonachse wirkend, wird nur Längenänderungen hervorrufen, die andere, hierzu senkrechte, nur Querverschiebungen. Die Komponente der Abweichung in der Richtung der Polygonachse wird man also auf die einzelnen Seiten proportional ihren Längen verteilen, während die Querverschiebungen leicht nach der oben beschriebenen graphischen Konstruktion (Fig. 2) ermittelt werden können, wobei aber die Bestimmung der Drehungsmittelpunkte wegfällt, da wir ja von den Verschiebungen wissen, daß sie senkrecht zur Polygonachse sind.

Die dargestellte Methode gibt mittels einiger graphischen Konstruktionen die streng ausgeglichenen Lagen der Scheitel eines Polygonzuges. Da diese Konstruktionen leicht und schnell auszuführen sind, wird die Methode wohl geeignet sein, in Fällen, wo besondere Genauigkeit verlangt wird, die gewöhnliche genäherte «Ausgleichung» zu vertreten, die doch eigentlich nur eine Fehlverteilung auf die einzelnen Seiten und Winkel ist. Wendet man sich in diesem Falle zu der strengen rechnerischen Ausgleichung, so ist man gezwungen, eine Rechenarbeit zu unternehmen, deren Größe und Langwierigkeit aus dem Beispiele in Prof. Jordans Vermessungskunde 1877 Bd. I, S. 300, leicht einzusehen ist.