Paper-ID: VGI_191212

Ein Beitrag zur stereographischen Horizontalprojektion

Joseph J. Adamczik [1]

[1] *Prag*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **10** (3), S. 69–73

1912

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

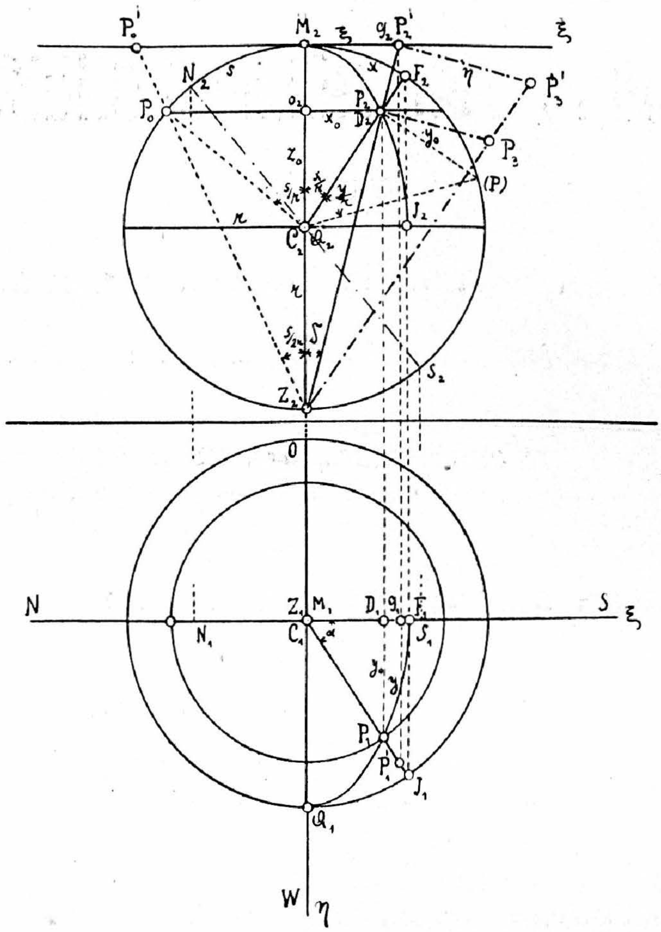
Nr. 3. **Wien, am 1. März 1912.** **X. Jahrgang.**

Ein Beitrag zur stereographischen Horizontalprojektion.

Von Professor **Jos. Adamczik** in Prag.

In dem in der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1911, Heft Nr. 7, erschienenen Aufsatze des Verfassers: «Über eine Beziehung zwischen den rechtwinkeligen, sphärischen Koordinaten und den ebenen Koordinaten einer zentralen Horizontalprojektion» wurde gezeigt, wie aus den, die Punkte auf der Kugel bestimmenden, rechtwinkeligen, sphärischen Koordinaten die ebenen Koordinaten der Bildpunkte einer zentralen Projektion direkt gerechnet und demnach ohne Zuhilfenahme eines Kartenlinien-Netzes aufgetragen werden können. Es ist dies eigentlich die allgemeinste, direkte Lösung des Problemes der Verebnung der Kugeloberfläche. Nun hat aber die zentrale Projektion infolge der auftretenden, sehr ungünstigen, großen Verzerrungsverhältnisse keine besondere praktische Bedeutung für die Kartenherstellungen. Daß diese Projektionsart nur für sehr kleine Gebiete verwendbar ist, geht schon daraus hervor, daß der Radius des Bildes des Großkreises, welcher durch die zur Bildebene parallele Ebene bestimmt wird, unendlich groß wird. Viel günstigere Verzerrungsverhältnisse ergibt dagegen die stereographische Projektion, welche deshalb auch mehr Bedeutung in der Karten-Entwurfslehre gewinnt.

Das Endziel dieser Abhandlung ist nun auch hier, zu zeigen, wie aus den gegebenen, die Punkte auf der Kugel bestimmenden, rechtwinkeligen, sphärischen Koordinaten die ebenen Koordinaten der Bildpunkte einer stereographischen Horizontalprojektion direkt gerechnet werden können. Es soll auch hier ohne jede Zuhilfenahme eines Kartenliniennetzes jeder Punkt für sich selbständig bestimmbar sein. Bevor jedoch in die mathematische Lösung dieser Aufgabe eingegangen wird, möge an der Hand der beigegebenen Figur die konstruktive Lösung besprochen werden.



Wir wählen eine zur Meridianebene des Karten-Mittelpunktes M parallele Ebene als vertikale Projektionsebene, so daß der Kartenentwurf sich in der horizontalen Projektion getreu darstellen läßt und zugleich die Nord-Südrichtung NS parallel zur Projektionsachse wird. Die Vertikal-Trasse der Bildebene wird durch die, den Punkt M_2 enthaltende, horizontale Gerade dargestellt, das Projektionszentrum Z liegt auf der Kugeloberfläche, dem Kartenmittelpunkt diametral gegenüber. Um einen auf der Kugeloberfläche gelegenen Punkt P darstellen zu können, wählen wir seine Vertikalprojektion P_2, ziehen den Parallelkreis senkrecht zu $M_2 Z_2$ in der Vertikalprojektion, zeichnen sodann mit der Strecke $o_2 P_0$ als Radius die Horizontalprojektion dieses Kleinkreises und finden P_1 als zugehörige erste Projektion des Punktes P. Der Projektionsstrahl $z_2 P_2$ trifft die Bildebene in P_2' und P_1' liegt auf dem Projektionsstrahl $Z_1 P_1$. Wählt man die Schnittgerade der Hauptmeridianebene von M mit der Bildebene als die Abszissenachse ξ eines ebenen Koordinatensystemes, so hat der Bildpunkt P' die Koordinaten $M_1 G_1 = \xi$ und $P_1' G_1 = \eta$, wobei naturgemäß der Kartenmittelpunkt M der Ursprung ist.

Wird der Hauptmeridian als Abszissenachse eines rechtwinkeligen, sphärischen Koordinatensystemes betrachtet, dessen Ursprung ebenfalls M ist, so ist der Bogen $M_2 F_2$ die sphärische Abszisse x des Punktes P auf der Kugel, während die sphärische Ordinate y in der Vertikalprojektion durch die Strecke $F_2 P_2$, dagegen in der Horizontalprojektion durch den Ellipsenbogen $F_1 P_1$ dargestellt erscheint.

Eine bekannte, aber eigentlich indirekte, mathematische Lösung ist folgende:

Bezeichnet man die sphärisch gemessene Entfernung des Punktes P vom Ursprung M, also den Bogen MP mit s und das Azimut in M mit α, so ist der, die Projektion P' mit M verbindende Strahl $MP' = 2r \operatorname{tg} \frac{s}{2r}$. Dies ergibt sich sofort, wenn man sich die Ebene des Großkreises MP um den vertikalen Durchmesser MZ in die, zur Vertikalebene parallele Hauptmeridianebene gedreht denkt. Der Punkt P gelangt dann nach P_0 und der Projektionsstrahl $Z_2 P_0$ trifft die Bildebene in P_0'. Der Bogen $M_2 P_0$ liefert s in wahrer Größe und aus dem Dreiecke $Z_2 M_2 P_0'$ folgt:

$$M_2 P_0' = 2r \operatorname{tg} \frac{s}{2r}, \quad \text{wobei } M_2 P_0' = M_1 P_1' = MP'$$

Sodann ist:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= M_1 G_1 = M_1 P_1' \,.\, \cos\alpha = 2r \operatorname{tg} \frac{s}{2r} \,.\, \cos\alpha \\ \eta &= P_1' G_1 = M_1 P_1' \,.\, \sin\alpha = 2r \operatorname{tg} \frac{s}{2r} \,.\, \sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

Wird $\frac{s}{r} = \frac{\pi}{2}$, so wird $\frac{s}{2r} = \frac{\pi}{4}$, also $\operatorname{tg} \frac{s}{2r} = 1$. Für den Kugelquadranten wird also der Konstruktionsradius $= 2r$, während derselbe bei der zentralen Projektion unendlich groß wird.

Diese Konstruktionsmethode erfordert sphärische Polarkoordinaten für sämtliche, abzubildende Punkte der Kugelfläche; sind diese sphärischen Polarkoordinaten aber von vornherein nicht gegeben, so müssen diese erst gerechnet werden. Sind die Punkte auf der Kugel durch ihre rechtwinkeligen, sphärischen Koordinaten gegeben, so müssen s und α erst unter Berücksichtigung sphärischer Korrektionen mühsam berechnet werden. Zur Umgehung dieser Berechnung von s und α wollen wir nun die ebenen Koordinaten ξ und η von P' direkt durch die rechtwinkeligen, sphärischen Koordinaten x und y von P ausdrücken. Die rechtwinkeligen Koordinaten sind immer vorteilhafter anzuwenden als die Polarkoordinaten.

Als einstweilige Hilfsgrößen führen wir in die Rechnung die räumlichen Koordinaten x_0, y_0 und z_0 von P ein, welche diesen Punkt auf ein räumliches Koordinatensystem beziehen, dessen Ursprung der Kugelmittelpunkt C, dessen Grundebene die Hauptmeridianebene von M ist und wobei die x_0-Achse der horizontale Kugelradius, die z_0-Achse der vertikale Kugelradius CM ist, so daß also die Hauptmeridianebene zur $x_0 z_0$-Ebenen wird. Die y_0-Achse steht sodann senkrecht zur Hauptmeridianebene.

Legt man den Ordinatenkreis QF um seine Spur $C_2 F_2$ in die Hauptmeridianebene um, so gelangt P nach (P) und der Bogen $F_2(P)$ gibt y in wahrer Größe, so daß aus $\triangle\, C_2 D_2 (P)$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} C_2 D_2 &= r \,.\, \cos \frac{y}{r} \text{ und } y_0 = r \,.\, \sin \frac{y}{r} \\ \text{Aus } \triangle\, C_2 o_2 D_2 \text{ folgt: } x_0 &= r \,.\, \cos \frac{y}{r} \,.\, \sin \frac{x}{r} \\ z_0 &= r \,.\, \cos \frac{y}{r} \,.\, \cos \frac{x}{r} \end{aligned}\right\}$$

Aus $\triangle\, Z_2 M_2 G_2$: $\xi = 2r \,.\, \operatorname{tg} \delta$ und aus $\triangle\, o_2 D_2 Z_2$: $\operatorname{tg} \delta = \dfrac{x_0}{r + z_0}$

$$\xi = \frac{2r\, x_0}{r + z_0} = \frac{2x_0}{1 + \frac{z_0}{r}} = \frac{2r \sin \frac{x}{r} \,.\, \cos \frac{y}{r}}{1 + \cos \frac{x}{r} \,.\, \cos \frac{y}{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

$$Z_2 D_2 = \frac{x_0}{\sin \delta} \text{ und } Z_2 G_2 = \frac{\xi}{\sin \delta}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $Z_2 P_3 D_2$ und $Z_2 P_3' G_2$, welche sich durch Umlegung des Projektionsstrahles ZP um $Z_2 G_2$ ergeben, folgt:

$$G_2 P_3' : D_2 P_3 = Z_2 G_2 : Z_2 D_2.$$

Nun ist aber $G_2 P_3' = G_1 P_1' = \eta$ und $D_2 P_3 = D_1 P_1 = y_0$, also:

$$\eta : y_0 = \frac{\xi}{\sin \delta} : \frac{x_0}{\sin \delta} = \xi : x_0, \quad \eta = \frac{y_0}{x_0} \,.\, \xi$$

$$\eta = \frac{r \,.\, \sin \frac{y}{r}}{r \,.\, \cos \frac{y}{r} \,.\, \sin \frac{x}{r}} \,.\, \xi = \frac{\operatorname{tg} \frac{y}{r}}{\sin \frac{x}{r}} \,.\, \xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

Damit wäre die gestellte Aufgabe gelöst, denn es erscheinen in 1) und 2) die ebenen Koordinaten ξ und η des Bildpunktes P' durch die rechtwinkeligen, sphärischen Koordinaten x und y von P ausgedrückt.

Da aber die Rechnung mit den Amplituden bekanntlich nicht praktisch ist, so gehen wir auf Reihenentwickelungen über, wobei wir des großen Erdradius r wegen, bei den Gliedern mit $\frac{1}{r^2}$ stehen bleiben können.

$$\xi = \frac{2r \sin \frac{x}{r}}{\frac{1}{\cos \frac{y}{r}} + \cos \frac{x}{r}} = \frac{2r\left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3}\right)}{1 + \frac{y^2}{2r^2} + 1 - \frac{x^2}{2r^2}} = \frac{2\left(x - \frac{x^3}{6r^2}\right)}{2 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{y^2}{2r^2}}$$

$$\xi = \frac{x - \frac{x^3}{6r^2}}{1 - \frac{x^2}{4r^2} + \frac{y^2}{4r^2}} = \frac{x - \frac{x^3}{6r^2}}{1 - \left(\frac{x^2}{4r^2} - \frac{y^2}{4r^2}\right)} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6r^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4r^2} - \frac{y^2}{4r^2}\right)$$

$$\underline{\underline{\xi}} = x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{x^3}{4r^2} - \frac{xy^2}{4r^2} = \underline{\underline{x + \frac{x^3}{12r^2} - \frac{xy^2}{4r^2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathrm{I})$$

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\frac{y}{r}}{\sin\frac{x}{r}} \, . \, \xi = \frac{\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3}}{\frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3}} \left(x + \frac{x^3}{12r^2} - \frac{xy^2}{4r^2}\right)$$

$$\eta = \frac{y + \frac{y^3}{2r^2}}{1 - \frac{x^2}{6r^2}} \left(1 + \frac{x^2}{12r^2} - \frac{y^2}{4r^2}\right)$$

$$\eta = \left(y + \frac{y^3}{3r^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6r^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{12r^2} - \frac{y^2}{4r^2}\right)$$

$$\eta = \left(y + \frac{y^3}{3r^2} + \frac{x^2}{6r^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{12r^2} - \frac{y^2}{4r^2}\right)$$

$$\eta = y + \frac{y^3}{3r^2} + \frac{x^2 y}{6r^2} + \frac{x^2 y}{12r^2} - \frac{y^3}{4r^2}$$

$$\eta = y + \frac{y^3}{12r^2} + \frac{x^2 y}{4r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

Analog würde sich die Aufgabe für jede externe Projektion rechnerisch behandeln lassen, da sich hiebei nur der Winkel δ ändert. Würde sich das Zentrum Z in der Entfernung e von der Kugelfläche, also in der Entfernung $(2r + e)$ von M befinden, so wäre $\operatorname{tg}\delta = \frac{x_0}{e + r + z_0}$

$$\xi = (2r + e) \, . \, \operatorname{tg}\delta, \quad \eta = \frac{y_0}{x_0} \, . \, \xi.$$

Lotverfahren.

Von Prof. **Karl Fuchs** in Preßburg.

(Schluß).

Kombinierte Strahlen.

Zwei Strahlen. Die Strahlen $S_1 \; S_2$, die von O ausgehen, bestimmen eine zweidimensionale Ebene E_{12}, in der sie liegen. Wir können die Strahlen $S_1 \; S_2$ als schiefe Koordinatenachsen in der Ebene E_{12} ansehen, und dann können wir jeden beliebigen Punkt q dieser Ebene mittelst zweier Koordinaten $t_1 \; t_2$:

$$t_1 = u \, h_1 \qquad t_2 = v \, h_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

bestimmen. Der Punkt q hat dann einen Vektor H und die Koordinaten

$$\xi = u \, a_1 + v \, b_1 \qquad \eta = u \, a_2 + v \, b_2 \qquad \zeta = \ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

Der Abstand des Ebenenpunktes q vom Fernpunkt P_0 ist durch die Koordinatendifferenz von q und P_0 bestimmt:

$$r^2 = (\xi - l_1)^2 + (\eta - l_2)^2 + \ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

Wir haben nun die Absicht, dem Wanderpunkte in O weder den Führungsstrahl S_1 noch den Führungsstrahl S_2, sondern die ganze Ebene E_{12} zur Führungsebene zu geben und ihn in den Ebenenpunkt q zu bringen, der zu P_0 am