



Tafeln zur Ermittlung der Verbesserung an geneigt gemessenen Entfernungen

H. Kaiser ¹

¹ *Geometer in Berlin-Friedenau*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **11** (6), S. 169–178

1913

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Kaiser_VGI_191321,  
  Title = {Tafeln zur Ermittlung der Verbesserung an geneigt gemessenen  
    Entfernungen},  
  Author = {Kaiser, H.},  
  Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {169--178},  
  Number = {6},  
  Year = {1913},  
  Volume = {11}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 6.

Wien, am 1. Juni 1913.

XI. Jahrgang.

Tafeln zur Ermittlung der Verbesserung an geneigt gemessenen Entfernungen.

Von H. Kaiser, Geometer in Berlin-Friedenau.

In der messenden Technik stellt sich vielfach die Notwendigkeit heraus, zahlreiche Rechnungen nach derselben Formel durchzuführen. Unter den verschiedenen Hilfsmitteln, die uns zur Verminderung dieser Unbequemlichkeit zur Verfügung stehen, werden die graphischen Tafeln anscheinend noch viel weniger benützt, als es ihrer Brauchbarkeit entspricht.

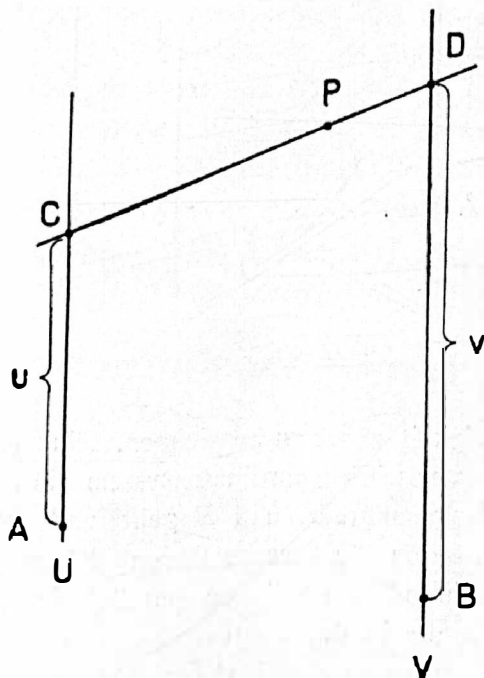


Fig. 1.

Es ist besonders das Verdienst französischer Mathematiker, die Theorie der graphischen Rechentafeln, welche sich in ihren ersten Anfängen bis ins Altertum verfolgen lassen, ganz wesentlich gefördert zu haben. In erster Linie kommt hierfür das Werk von d'Ocagne: «*Traité de Nomographie*» in Betracht. Eine für viele Fälle anwendbare, sehr übersichtliche Form der graphischen Rechentafel ist auf der «*Methode der fluchtrechten Punkte*» begründet. Dieselbe läßt sich im wesentlichen folgendermaßen definieren:

Trägt man auf zwei parallelen Achsen U und V (Fig. 1) von willkürlich gewählten Anfangspunkten A und B aus die Koordinaten u und v entsprechend ihrem Vorzeichen auf, so gilt die Gleichung

$$au + bv + c = 0 \quad \dots \dots \dots 1)$$

für alle diejenigen Geraden, welche durch die mittels der Parallelkoordinaten u und v auf den Achsen bestimmten Punkte C und D , sowie durch einen und denselben Punkt P gehen, dessen Lage in der Ebene der Achsen durch die Konstanten a , b und c näher bestimmt wird.

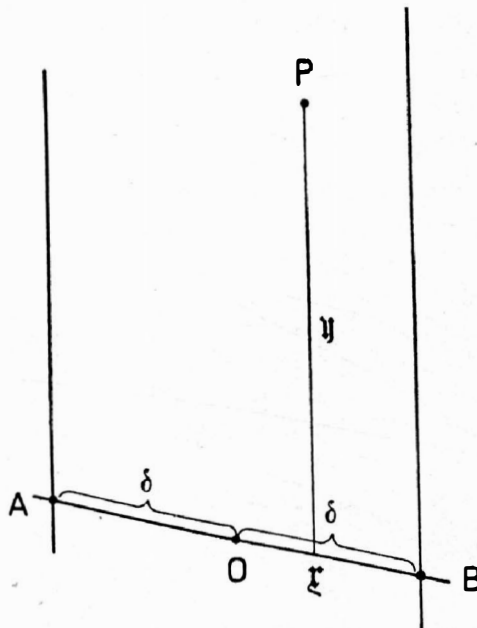


Fig. 2.

Um diese Abhängigkeit näher zu bezeichnen, führt man zur Festlegung des Punktes P noch ein kartesisches Koordinatensystem ein (Fig. 2), dessen x -Achse durch die beiden Anfangspunkte A und B geht und dessen Nullpunkt in der Mitte zwischen A und B um die Strecke δ von A bzw. B entfernt ist, derart daß $AB = 2\delta$ ist, während die y -Achse parallel den U , V -Achsen verläuft. Zum Unterschied gegen die in den darzustellenden Formeln häufig vorkommenden Größen x und y werden in diesem Koordinatensystem die Koordinaten des Punktes P mit ξ und η bezeichnet.

Die a. a. O. im einzelnen entwickelte Beziehung zwischen a , b , c und x und y ist dann folgende

$$x = \delta \cdot \frac{b - a}{b + a} \cdot \dots \dots \dots 2)$$

$$y = - \frac{c}{b + a} \cdot \dots \dots \dots 3)$$

Betrachtet man nun weiterhin die bisher als konstant angenommenen Größen a , b und c ihrerseits wieder als beliebige, aber stetige Funktionen ein und derselben Veränderlichen α , so geht die Liniengleichung (1) über in

$$f_1(\alpha) \cdot u + f_2(\alpha) \cdot v + f_3(\alpha) = 0 \dots \dots \dots 4)$$

und die Koordinatengleichungen 2) und 3) ändern sich dementsprechend in

$$x = \delta \frac{f_2(\alpha) - f_1(\alpha)}{f_2(\alpha) + f_1(\alpha)} \dots \dots \dots 5)$$

$$y = - \frac{f_3(\alpha)}{f_2(\alpha) + f_1(\alpha)} \dots \dots \dots 6)$$

woraus durch Elimination von α eine Gleichung zwischen x und y folgt von der Form

$$y = F(x).$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve ist der geometrische Ort sämtlicher Punkte P , welche als Schnittpunkte in Frage kommen für alle durch zwei zusammengehörige Werte (u , v) bestimmten Geraden. Es läßt sich somit einem jeden Punkte P ein bestimmter Wert von α zuordnen. Je drei zueinander gehörige Werte von u , v und α liegen daher auf einer geraden Linie; deshalb wird diese Darstellungsweise auch die Methode der fluchtrechten Punkte genannt. Es brauchen nun die Linienkoordinaten u und v selbst nicht die Veränderlichen darzustellen, sondern man kann noch die weitere Verallgemeinerung eintreten lassen, daß u und v wieder beliebige, stetige Funktionen der eigentlichen Variablen sind, etwa

$$u = \varphi_1(\beta); \quad v = \varphi_2(\gamma),$$

so daß man schließlich erhält

$$f_1(\alpha) \cdot \varphi_1(\beta) + f_2(\alpha) \cdot \varphi_2(\gamma) + f_3(\alpha) = 0 \dots \dots \dots 7)$$

als eine allgemeine Gleichungsform, welche sich auf diese Weise darstellen läßt. Die Möglichkeit, eine gegebene Formel mit Hilfe der geschilderten Methode darzustellen, ist also nur dann gegeben, wenn sich die vorliegende Gleichung mit Gleichung 7) identifizieren läßt. Andererseits muß eine graphische Tafel für die Praxis ausreichend genaue Resultate liefern, ihre Teilungen müssen ein leichtes,

schnelles und trotzdem sicheres Ablesen gestatten und ihre Gestalt und Größe müssen handlich sein.

Die im folgenden zu besprechenden, auf der angeführten Theorie beruhenden Tafeln dürften wohl geeignet sein, den Vermessungsbeamten umfangreicher Rechenarbeit zu entbinden, und sie erfüllen die soeben erwähnten Forderungen in jeder Hinsicht.

Beim Messen von Entfernungen auf geneigtem Terrain wird die Staffelmessung der Meßmethode mit aufgelegtem Band oder Latte vielfach vorgezogen, nicht zuletzt auch aus dem Grunde, weil das Reduzieren der schiefen Längen auf den Horizont einen großen Zeitaufwand erfordert, obwohl die zweite Meßart die genauere und schnellere ist. Die in Fig. 4 abgebildete Tafel ist dazu bestimmt, die an der geneigt gemessenen Länge anzubringende Verbesserung graphisch zu ermitteln, wenn das prozentuale Gefälle bekannt ist.

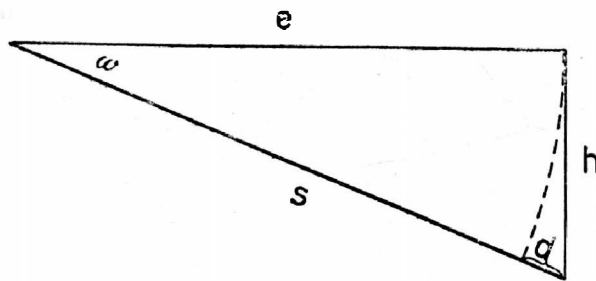


Fig. 3

Nach Figur 3 hat man für die Verbesserung d die Formel

$$d = s - e = s(1 - \cos \omega) = s \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}}\right)$$

und wenn man für $\operatorname{tg} \omega$ setzt $\frac{\varepsilon}{100}$, wobei ε die Zahl der Gefällprocente bedeutet, so ist

$$d = s \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{10.000}}}\right) \dots \dots \dots 8)$$

Diese Gleichung läßt sich mit Gleichung 4) identifizieren, indem man sie auf folgende Form bringt

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{10.000}}}\right) \cdot s - \varepsilon^0 \cdot d + 0 \cdot z = 0 \dots \dots \dots 9)$$

Es ist nun noch nötig, daß man beim Auftragen von s und d auf den Parallelen U und V geeignete Maßstäbe wählt, um die Ablesung an den Theilungen mit entsprechender Genauigkeit zu ermöglichen und bei Beachtung der

nötigen Handlichkeit alle in der Praxis vorkommenden Fälle auf der Tafel darstellen zu können. Bezeichnet man mit l_1 den Einheitsmaßstab der Teilung für s und mit l_2 den derjenigen für d , und setzt man ferner $l_1 s = u$ und $-l_2 d = v$, so geht Gleichung 9) über in

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}}\right) \cdot \frac{u}{l_1} + 1 \cdot \frac{v}{l_2} + 0 = 0$$

$$\text{oder } l_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}}\right) \cdot u + l_1 \cdot v + 0 = 0 \dots \dots \dots 10)$$

Nach Gleichung 1) ist jetzt $l_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}}\right) = a$, $l_1 = b$ und $0 = c$,

so daß man für die Koordinatengleichungen nach 2) und 3) erhält

$$\xi = \delta \cdot \frac{l_1 - l_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}}\right)}{l_1 + l_2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}}\right)} \dots 11) \text{ und } \eta = 0 \dots 12)$$

In der nachstehenden Tafel (Fig. 4) sind auf der linken vertikalen Linie die geneigt gemessenen Strecken s aufgetragen, während die rechte Vertikale zu beiden Seiten für die Verbesserungen d verschiedene Teilungen trägt. Es ist nun der Einheitsmaßstab für s , also $l_1 = 1$ und derjenige für d (Teilung rechte Seite), also $l_2 = 250$ gewählt worden und es berechnen sich die Koordinaten für die zu z gehörige Teilung nach Gleichung 11) und 12) zu

$$\xi = \delta \cdot \frac{1 - 250 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}}\right)}{1 + 250 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}}\right)} \dots 13) \text{ und } \eta = 0 \dots 14)$$

Wenn man diese Koordinaten aufträgt, so bekommt man eine Teilung, wie sie in der Tafel auf der oberen Seite der schrägen Verbindungslinie zur Darstellung gekommen ist.

Reduktionstafel.

Ermittlung der Verbesserung an geneigt gemessenen Längen aus dem Gefällverhältnis

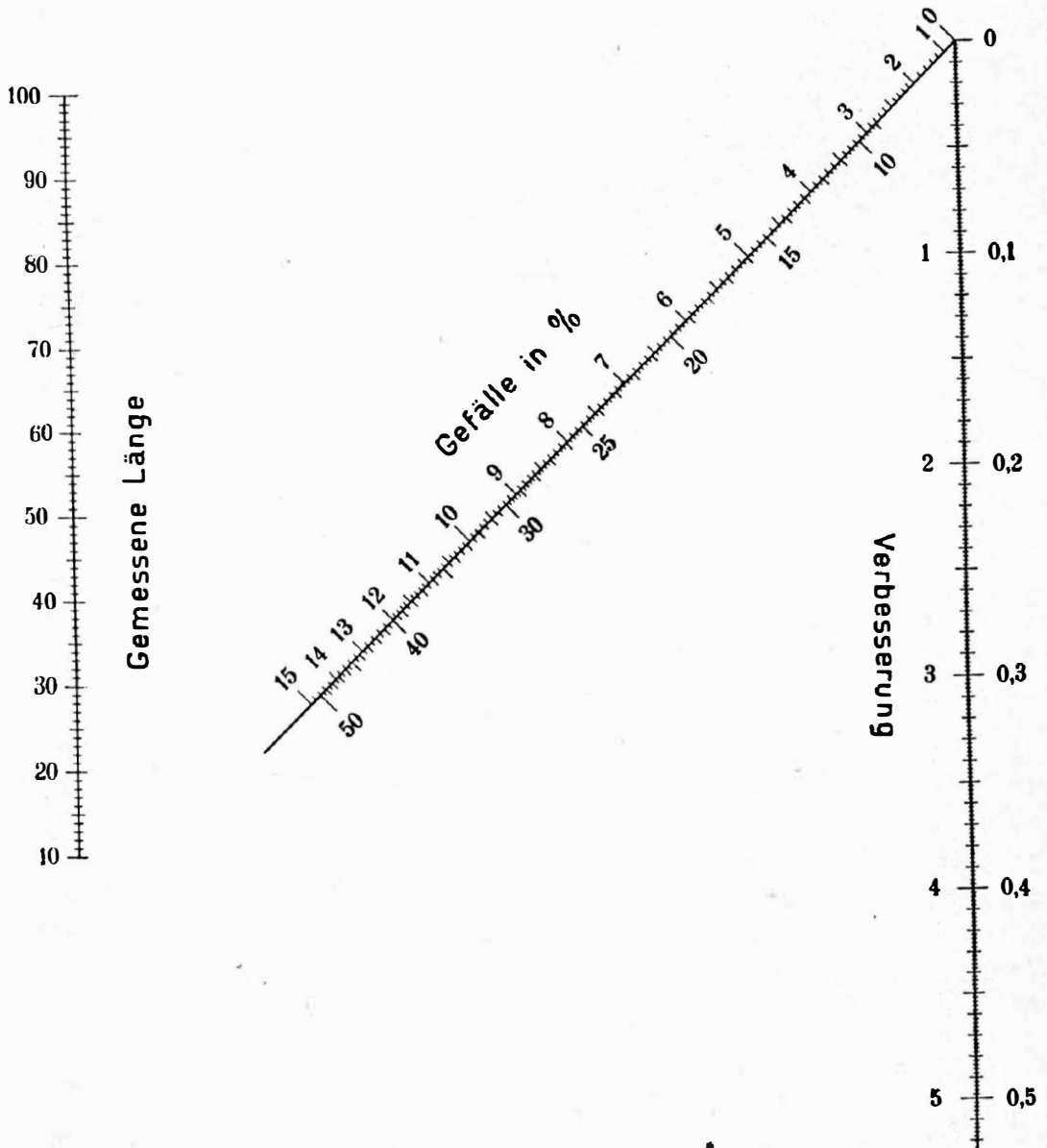


Fig. 4.

Auf der linken Seite der rechten Vertikalen ist der Einheitsmaßstab $\frac{1}{2}$ der Teilung für d zu 25 angenommen, und man erhält daher die Koordinatengleichungen

$$x = d \cdot \frac{1 - 25 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}} \right)}{1 + 25 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{10.000}}} \right)} \dots 15) \text{ und } y = 0 \dots 16)$$

Diese Koordinaten ergeben die an der unteren Seite der schrägen Verbindungslinie angebrachte Teilung. Es sind demnach einerseits die obere Teilung für das prozentuale Gefälle z und die rechte Seite an der rechten Vertikalen für die Verbesserung d und andererseits die untere und linke, oder kurz die äußeren und inneren Teilungen zusammen zu benutzen. Diese Anordnung ist getroffen, um bei den Ablesungen für z und d größere Genauigkeit zu erzielen.

Der Gebrauch ist der denkbar einfachste, wie nachstehendes Beispiel zeigen wird. Es sei die gemessene Strecke $s = 70,52$, das Gefälle $z = 10,9\%$. Mit Hilfe einer auf Pauspapier oder durchsichtigem Zelluloid gezogenen geraden Linie verbindet man $70,52$ bei «Gemessene Länge» mit $10,9$ der oberen Teilung bei «Gefälle in ‰» und liest den Schnittpunkt der Verlängerung mit der rechten vertikalen Linie an der rechten Teilung $= 0,415$ als Verbesserung ab. Diese ist dann von der gemessenen Länge s abzuziehen und man erhält für die horizontale Entfernung $e = 70,52 - 0,42 = 70,10$. Der Umstand, daß man s nicht bis auf die zweite Dezimale einstellen kann, hat auf das Resultat keinen merkbaren Einfluß, denn wenn man für $70,52$ nur $70,0$ setzte, so würde diese Abweichung, die beim Einstellen in der Tafel ja ganz ausgeschlossen ist, im Resultat eine Änderung von $0,003$ ausmachen, was jedoch praktisch nicht von Bedeutung ist. Hätte man bei Gefälle die untere Teilung benutzt, so müßte man die Verbesserung an der linken Seite der rechten Vertikalen ablesen, wobei man für das angeführte Beispiel ebenfalls $0,42$ erhält. Ist nun $s > 100$, so liest man erst die Verbesserung für 100 und dann für den Rest ab und addiert die Resultate. Es sei z. B. $s = 378,45$, $z = 9,7\%$. Für $s = 100$, $z = 9,7$ erhält man aus der graphischen Tafel d zu $0,468$, für $s = 78,45$ und $z = 9,7$ ist $d = 0,367$, die Gesamtverbesserung ist dann $(3 \times 0,468) + 0,367 = 1,77$ und die horizontale Entfernung $e = 376,68$. Ist dagegen $s < 10$, so ermittelt man d für $10 \cdot s$ und dividiert das Resultat durch 10 .

Wenn mit der Messung gleichzeitig eine Höhenaufnahme verbunden ist, kann es unterlassen werden, zum Zwecke der Reduzierung der geneigt gemessenen Strecke das Gefälle mit dem Gefällmesser zu ermitteln, da ja die Höhenaufnahme bereits die für die Reduktion nötige Bestimmungsgröße in Gestalt des Höhenunterschiedes liefert. Nach Figur 3 erhält man für die Verbesserung d die Formel

$$d = s - \sqrt{s^2 - h^2} \dots \dots \dots 17)$$

Um diese Gleichung mit Gleichung 4) zu identifizieren, ist es nötig, dieselbe auf die Normalform zu bringen, so daß man erhält

$$2 \cdot s \cdot d - h^2 \cdot l - d^2 = 0 \dots \dots \dots 18)$$

Der Faktor l von h^2 kann auch als eine Funktion von d aufgefaßt werden, nämlich als d^0 . Ist l_1 der Einheitsmaßstab der Teilung für s und l_2 derjenige für h^2 und setzt man nun $l_1 s = u$ und $-l_2 h^2 = v$, so ändert sich Gleichung 18) in

$$2 \cdot d \cdot \frac{u}{l_1} + \frac{v}{l_2} - d^2 = 0 \text{ oder}$$

$$l_2 \cdot 2 \cdot d \cdot u + l_1 \cdot v - l_1 l_2 \cdot d^2 = 0 \dots \dots \dots 19)$$

Nach Gleichung 1) ist jetzt $l_2 \cdot 2 \cdot d = a$, $l_1 = b$ und $-l_1 l_2 \cdot d^2 = c$ und für die Koordinatengleichungen bekommt man nach den Gleichungen 2) und 3)

$$\xi = \delta \cdot \frac{l_1 - l_2 \cdot 2 \cdot d}{l_1 + l_2 \cdot 2 \cdot d} \dots 20) \text{ und } \eta = \frac{l_1 l_2 d^2}{l_1 + l_2 \cdot 2 \cdot d} \dots 21)$$

In der in Figur 5 abgebildeten Tafel trägt die linke Vertikale wiederum die geneigt gemessenen Strecken s , während die rechte vertikale Linie auf ihrer rechten Seite die Höhenunterschiede h von 0 bis 12 aufweist. Die Einheitsmaßstäbe dieser beiden Teilungen sind gleich groß gewählt, sodaß also $l_1 = l_2 = 1$ ist und als Koordinatengleichungen für die Teilung der Verbesserung d erhält man

$$\xi = \delta \cdot \frac{1 - 2 \cdot d}{1 + 2 \cdot d} \dots 22) \text{ und } \eta = \frac{d^2}{1 + 2 \cdot d} \dots \dots \dots 23)$$

Trägt man die so erhaltenen Koordinaten auf, so bekommt man die untere der in der Tafel dargestellten Kurven mit der auf ihr angebrachten Teilung.

Die rechte Vertikale trägt auf ihrer linken Seite die Höhenunterschiede h bis 38. In diesem Falle verhält sich der Einheitsmaßstab von s zu dem von h wie 10:1, es ist also $l_1 = 10$ und $l_2 = 1$ und die Koordinaten für die d -Teilung sind daher

$$\xi = \delta \cdot \frac{5 - d}{5 + d} \dots 24 \text{ und } \eta = \frac{5d^2}{5 + d} \dots \dots \dots 25)$$

Dieselben ergeben, wenn man sie aufträgt, die obere Kurve mit ihrer Teilung. Beim Gebrauch sind daher für d die untere Kurve und für h die rechte Teilung oder entsprechend die obere Kurve und die linke Teilung zusammen zu benützen.

Es ist die Handhabung dieser Tafel ebenso einfach wie bei der zuerst beschriebenen. Es sei z. B. $s = 124,48$, $h = 22,86$. Man verbindet auf dieselbe Weise wie vorhin 124,48 bei «Gemessene Länge» mit 22,86 bei «Höhenunterschied» auf der linken Seite und liest am Schnittpunkt mit der oberen Kurve die Verbesserung d zu 2,12 ab; die horizontale Länge e ist dann $124,48 - 2,12 = 122,36$.

Reduktionstafel.

Ermittlung der Verbesserung an geneigt gemessenen Längen aus dem Höhenunterschied

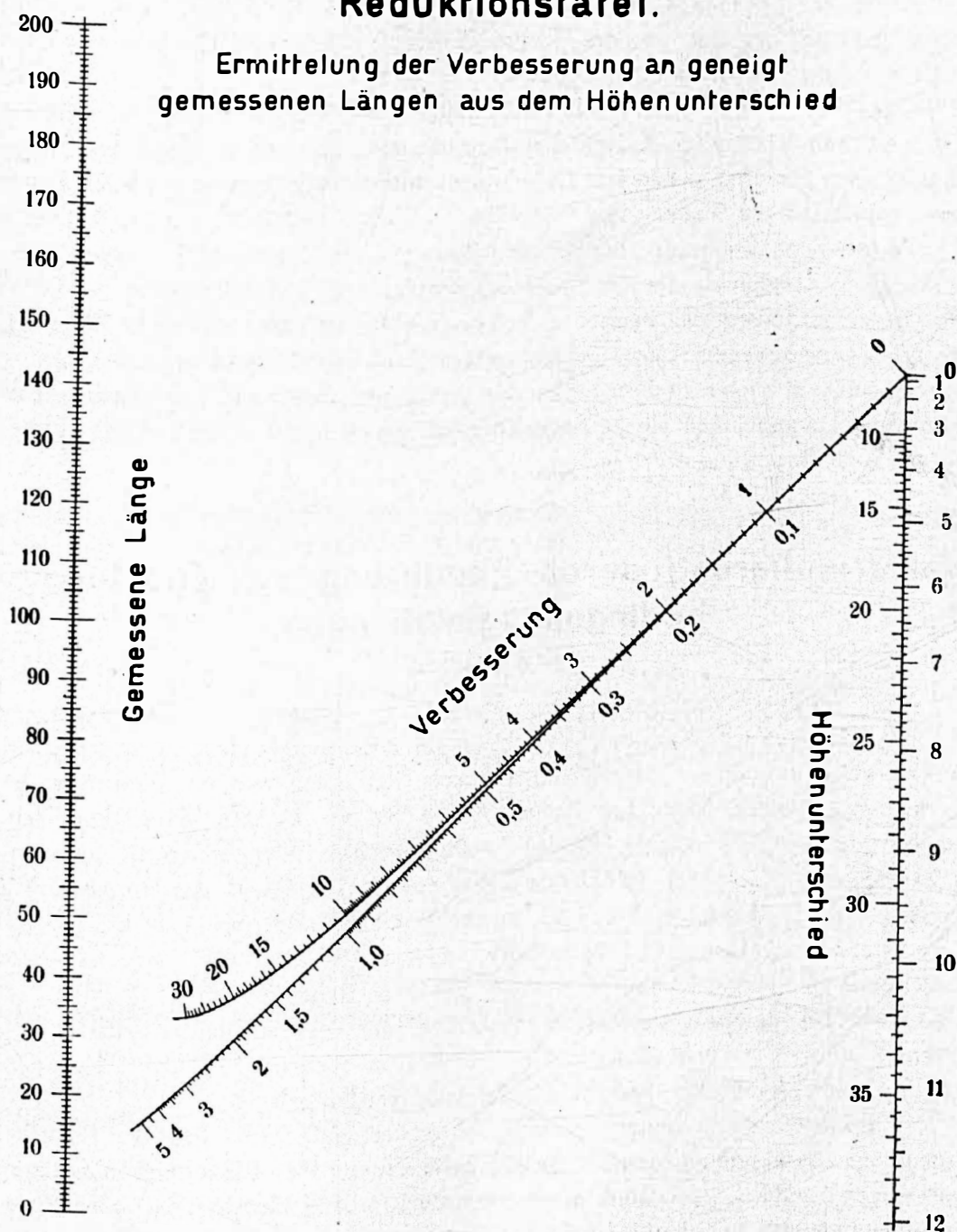


Fig. 5.

Ist $s > 200$ oder $h > 38$, so kann man von der Formel Gebrauch machen

$$d = k \left(\frac{s}{k} - \sqrt{\left(\frac{s}{k}\right)^2 - \left(\frac{h}{k}\right)^2} \right),$$

worin k eine beliebig gewählte Zahl ist. Man dividiert also s und h durch eine runde Zahl k , vermittelt damit die Verbesserung und multipliziert das Resultat

wieder mit k . Die in obigem Beispiel angeführte Aufgabe läßt sich demnach auch so lösen, daß man s und k halbiert, mit 62,24 für s und 11,43 für k (rechte Teilung) an der unteren Kurve d zu $2 \times 1,06 = 2,12$ abliest. Man erhält also dasselbe Resultat wie oben.

Die Tafeln würden natürlich zweckmäßig auf kräftigem Karton aufzuziehen sein, und zum Verbinden der Tafelwerte wird man, wie schon angedeutet, vorteilhaft einen Streifen glashellen Celluloides mit daraufgezogener gerader Linie benutzen, sodaß die Tafeln auch bequem im Felde gebraucht werden können.

Wenn man nun nach alledem den Aufwand an Zeit und geistiger Aufmerksamkeit vergleicht, der einerseits bei graphischer, und andererseits bei rechnerischer Ermittlung der horizontalen Länge nötig ist, so werden die Vorzüge der eben besprochenen Tafeln ohne weiteres einleuchten, und da die Nomenclographie auch in vielen andern Fällen ein geeignetes Mittel zur Verringerung der immerhin unangenehmen Rechenarbeiten bietet, so ist leicht ersichtlich, daß diese Theorie der Beachtung wert ist.

Netzorientierung durch Einführung von Richtungsbedingungsgleichungen.

Von S. Wellisch.

Bei Netzausgleichungen ist zur strengen Orientierung des Netzes die sogenannte Bessel'sche Nullpunktskorrektur oder Richtungsreduktion erforderlich. Die Heranziehung dieses Orientierungswinkels, der dort, wo nur Winkel in die Rechnung eingehen, allerdings bedeutungslos ist, wo es sich jedoch um Richtungsausgleichungen handelt, großen Einfluß besitzt, begegnet nicht geringen Schwierigkeiten, worüber in Jordan-Eggert: «Handbuch der Vermessungskunde», 1910, I. Band, §§ 79 und 82, manches erwähnt ist. (Siehe auch Bessel-Baeyer: «Gradmessung in Ostpreußen», 1834, S. 134, oder Wellisch: «Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung», 1910, II. Band, S. 72).

Hier sei nun ein Verfahren angegeben, das wesentliche Vereinfachungen mit sich bringt. Es ist dies die Methode der an Stelle der Winkelbedingungsgleichungen eingeführten Richtungsbedingungsgleichungen.

Zunächst sei an einem Beispiel über den einfachsten Fall der Punktbestimmung aus einem ebenen Dreieck die Bedeutung der Richtungsbedingungen vor Augen geführt. Gegeben seien zwei Punkte A, B durch ihre Koordinaten, zu bestimmen sei ein dritter Punkt C , zu welchem Behufe in den drei Eckpunkten die Winkel α, β, γ durch die Richtungen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gemessen werden. Die aus den gegebenen, unabänderlich feststehenden Koordinaten von A, B berechnete Richtung 1 und deren Gegenrichtung 2 müssen genau um 180° von einander abweichen; die aus dem Abriß für äußere und innere Richtungen entnommenen Richtungspaare 3, 4 und 5, 6 werden aber infolge von Messungsfehlern im allgemeinen nicht genau um 180° von einander differieren, wie folgendes, meinem Buche entnommene Beispiel zeigen soll.