Paper-ID: VGI_191406

Stabilitätstheorie der Gauß'schen Fehlerfunktion

G. Grigercsik [1]

[1] *k. u. Bergkommissär*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **12, 14** (4–5, 11), S. 65–69, 161–163

1914, 1916

BibTEX:

```
@ARTICLE{Grigercsik_VGI_191406,
Title = {Stabilit{\"a}tstheorie der Gau{\ss}'schen Fehlerfunktion},
Author = {Grigercsik, G.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {65--69, 161--163},
Number = {4--5, 11},
Year = {1914, 1916},
Volume = {12, 14}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN
DES
VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 4/5. Wien, April-Mai 1914. XII. Jahrgang.

Stabilitätstheorie der Gauß'schen Fehlerfunktion.

Von G. Grigercsik, k. u. Bergkommissär.

Nach der bekannten Analogie ist es gerechtfertigt, den Faktor q_r in der allgemeinen stabilen Ausgleichsformel unmittelbarer Beobachtungen*)

$$l_0 = \frac{[q l]}{[q]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

das Gewicht der Beobachtung l_r zu nennen. Je größer q_r, umsomehr nähert sich l_0 zu l_r. Die Ausgleichung hat aber nur dann einen Sinn, wenn sie möglichst gute Resultate zu erzielen sucht, es muß also zwischen q_r und dem Fehler ε_r von l_r eine gewisse reziproke Beziehung $q_r = \psi(\varepsilon_r)$ vorausgesetzt werden.

Wir nennen den mit dem Fehler ε_r der Beobachtung l_r in reziproker Beziehung stehenden Faktor $q_r = \psi(\varepsilon_r)$ das Urgewicht von l_r.

Schreiben wir $a + bl$ statt l, so geht ε in $b\varepsilon$ über und aus 1) wird

$$a + b l_0 = \frac{[\psi(b\varepsilon)(a + bl)]}{[\psi(b\varepsilon)]} = a + b\,\frac{[\psi(b\varepsilon)\, l]}{[\psi(b\varepsilon)]}$$

woraus mit Rücksicht auf

$$l_0 = \frac{[\psi(\varepsilon)\, l]}{[\psi(\varepsilon)]}$$

zunächst

$$\frac{[\psi(b\varepsilon)\,.\,l]}{[\psi(b\varepsilon)]} = \frac{[\psi(\varepsilon)\,.\,l]}{[\psi(\varepsilon)]}$$

dann aber, weil die Faktoren der l beiderseits gleich sein müssen,

$$\frac{\psi(b\varepsilon)}{[\psi(b\varepsilon)]} = \frac{\psi(\varepsilon)}{[\psi(\varepsilon)]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

folgt.

Die Bedingung 2) muß erfüllt werden, gleichgültig, ob wir unter ε den absoluten, oder den relativen Fehler von l verstehen, denn im letzteren Falle

*) Vgl. «Das Stabilitätsprinzip in der Ausgleichungsrechnung». Nr. 13, 1913.

ändern sich die Zahlenwerte je nach der Wahl des Einheitsfehlers ebenfalls um einen gemeinschaftlichen Faktor, obige Ableitung gilt somit auch für diesen Fall.

Die Bedingung 2) wird nur dann erfüllt, wenn

$$\psi(b\varepsilon) = \beta \cdot \psi(\varepsilon)$$

ist, wo β einen von ε unabhängigen Fehler bedeutet, und diese Eigenschaft besitzt nur die eingliedrige algebraische Funktion $\psi(\varepsilon) = \varepsilon_s$, wo wir den Koeffizienten der Einheit gleich setzen, weil andere Werte nach Formel 2) gleichgültig sind.

Soll aber $\psi(\varepsilon)$ mit ε reziprok zusammenhängen, so muß der Exponent negatives Vorzeichen haben, demnach ist

$$q_r = \varepsilon^{-s} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

mit dem Bereiche $s \gtreqless 0$ die allgemeine Formel eines rationellen stabilen Urgewichtes, d. h. eines solchen, welches die Stabilität der Ausgleichung ungestört bestehen und das Resultat nicht prinzipiell gegen die schlechteren Beobachtungen gravitieren läßt.

Vorausgesetzt nun, daß die Wahrscheinlichkeit (Häufigkeit bei unendlich wachsender Beobachtungszahl) eines Fehlers ε irgend ein analytisches Gesetz $W = \varphi(\varepsilon)$ befolgt und die Wahrscheinlichkeit der Koexistenz einer Fehlerreihe $\varepsilon_1; \varepsilon_2; \ldots \varepsilon_n$ durch das Produkt $W' = \varphi(\varepsilon_1) \cdot \varphi(\varepsilon_2) \ldots \varphi(\varepsilon_n)$ dargestellt wird, ergibt sich das Maximum von W' aus der Bedingungsgleichung

$$\left[\frac{d\, lg\, \varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right] = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4)$$

oder

$$F(\varepsilon_1; \varepsilon_2; \ldots \varepsilon_n) = 0,$$

welche auch in der Form

$$F(L - l_1; L - l_2; \ldots L - l_n) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

geschrieben werden kann, wo L den fehlerfreien Wert bedeutet.

Aus 5) erhalten wir den fehlerfreien Wert

$$L = f(l_1; l_2; \ldots l_n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

als eine gewisse Funktion der Beobachtungsdaten, u. zw., weil diese Beziehung unbedingt stabil sein muß, ganz allgemein

$$L = \frac{[q\, l]}{[q]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

analog zur Formel 1).

Wir müssen hier eine Bemerkung einschalten.

Die Gleichung 4) drückt eine exakte Wahrheit aus und (6) ist nur eine andere Form derselben. Diese Gleichungen sagen, daß, wenn eine Fehlerfunktion φ existiert, der wahrscheinlichste Wert immer der fehlerfreie Wert ist, gleichgültig, was für eine spezielle Form auch φ haben mag.

Wenn wir dagegen eine wirklich ausgeführte Beobachtungsreihe nach wahrscheinlichkeits-theorethischen Prinzipien a posteriori ausgleichen, ist es bloß eine Annahme, daß wir gerade diejenigen Fehler begangen haben, welche W' zu einem Maximum machen, deshalb gilt 6) bzw. 7) in diesem Falle nicht mehr streng genau, sondern bloß mit größter Wahrscheinlichkeit, und es führt dann f nicht notwendigerweise auf L, sondern auf irgend einen Wert l_p, für welchen aber $l_p = L$ mit größter Wahrscheinlichkeit a n g e n o m m e n werden darf.

Wir haben demnach zwischen dem a priori und dem a posteriori wahrscheinlichsten Werte zu unterscheiden. Der erstere ist der fehlerfreie Wert selbst, der zweite aber derjenige, welcher nach der theoretisch richtigen Formel unter der Voraussetzung berechnet wird, daß die gegebene Beobachtungsreihe dem Fehlergesetze φ entspricht, was jedoch in der Wirklichkeit wohl nie genau zutreffen wird.

Die Theorie stützt sich naturgemäß auf den Begriff des a priori wahrscheinlichsten Wertes.

Aus 7) folgt
$$[q\,(L-l)] = 0$$
oder
$$[q\,\varepsilon] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$
als die näher bestimmte Form von 5).

Die Koexistenz von 4) und 8) erfordert, daß
$$d\,lg\,\varphi\,(\varepsilon) = k\,.\,q\,.\,\varepsilon\,.\,d\varepsilon$$
sei, wo k einen konstanten Faktor bedeutet. Die Integration liefert die a l l g e m e i n e F o r m e i n e r s t a b i l e n A u s g l e i c h u n g s f u n k t i o n
$$\varphi\,(\varepsilon) = A\,.\,e^{k\int q\varepsilon\,d\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$
wo A konstant ist.

Die Integration kann erst ausgeführt werden, wenn q als Funktion von ε gegeben wird. Wir haben für q die allgemeine Form
$$q = \varepsilon^{-s}$$
abgeleitet, mit dieser erhalten wir
$$\varphi\,(\varepsilon) = B\,.\,e^{\frac{k}{2-s}\,.\,\varepsilon^{2-s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

Die weitere Diskussion gründet sich auf folgende Grundeigenschaften von φ

1. $\varphi\,(+\,\varepsilon) = \varphi\,(-\,\varepsilon)$,
2. $\varphi\,(\pm\,\infty) = 0$,
3. $\varphi\,(\varepsilon)$ kann nie unendlich groß werden.

Aus der ersten Bedingung folgt, daß $2-s$ eine gerade Zahl sein muß, dann ist aber auch s eine gerade Zahl $s = 2\,t$, mithin
$$q_{+\varepsilon} = q_{-\varepsilon} = \varepsilon^{-2t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Wenn also die Fehlerwahrscheinlichkeit unabhängig ist von dem Vorzeichen des Fehlers, so gilt dies auch von den Urgewichten, so daß man auch $q_{+\varepsilon} = q_{-\varepsilon}$ postulieren und hieraus $\varphi_{+\varepsilon} = \varphi_{-\varepsilon}$ ableiten könnte.

Mit $s = 2\,t$ geht 10) über in
$$\varphi\,(\varepsilon) = B\,.\,e^{\frac{k}{2(1-t)}\,.\,\varepsilon^{2(1-t)}}$$
welchen Ausdruck wir hinsichtlich der zweiten und dritten Grundbedingung untersuchen wollen, u. zw. für die Fälle $t = 0$; $t = 1$; $t > 1$.

a) Für $t = 0$ wird

$$\varphi(\varepsilon) = B \cdot e^{\frac{k}{2} \cdot \varepsilon^2}$$

Ist $k > 0$, so wird $\varphi(\infty) = \infty$, es muß demnach k negativ sein. Wir setzen $k = -\frac{h^2}{2}$ und erhalten die Formel von Gauß

$$\varphi(\varepsilon) = B \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

welche die Bedingungen 1 bis 3 erfüllt.

b) Für $t = 1$ wird $q = \varepsilon^{-2}$, somit

$$\varphi(\varepsilon) = A \cdot e^{k \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}} = A \cdot e^{lg(c \cdot \varepsilon)^k} = C \cdot \varepsilon^k$$

Ist $k > 0$, so wird $\varphi(\infty) = \infty$; ist dagegen $k > 0$, so wird $\varphi(o) = \infty$, demnach ist die Annahme $t = 1$ unzulässig.

c) Ist $t > 1$, so wird mit $1 - t = -\frac{u^2}{2}$

$$\varphi(\varepsilon) = B \cdot e^{-\frac{k}{u^2} \cdot \varepsilon^{-u^2}}$$

Für $k \gtrless 0$ ist $\varphi(\infty) = B$, also müßte wegen der Bedingung $\varphi(\infty) = 0$ auch $B = 0$ sein, woraus die Unzulässigkeit der Annahme $t > 1$ erhellt.

Die Gauß'sche Funktion repräsentiert somit das einzige Fehlergesetz, welches einen stabilen wahrscheinlichsten Ausgleichungswert liefert, auf stabilen, rationellen Urgewichten beruht und die Grundeigenschaften eines Fehlergesetzes besitzt.

Hieraus folgt aber, daß es gleichgültig ist, ob wir die konkrete Existenz von $\varphi(\varepsilon)$ anerkennen, oder diese Funktion bloß zur Grundlage einer analytischen Behandlung, zur Idealisierung der niemals streng gesetzmäßigen Erfahrungsdaten wählen — in beiden Fällen bildet die Gauß'sche Funktion die einzige Grundlage einer widerspruchlosen Theorie.

Vom praktischen Gesichtspunkte betrachtet verdanken wir dieser Theorie vor allem die Feststellung der Tatsache, daß $q =$ konstant die wahrscheinlich besten Werte der Urgewichte repräsentiert, was durchaus nicht a priori einleuchtend ist. Bedenkt man jedoch, daß, wenn kleine Fehler häufiger sind als große, die ersteren auch bei $q =$ konstant überwiegend auf das Resultat einwirken, so erkennt man jene Konsequenz der Theorie für vollkommen einwandfrei.

Das Stabilitätsprinzip gibt auch hinsichtlich der Dimension von h einen Aufschluß.

Werden nämlich die Beobachtungsdaten l in ein anderes System $\lambda = a + b \cdot l$ transformiert, also ε in $b\varepsilon$ verwandelt, so darf die relative Häufigkeit hiedurch keine Änderung erleiden, es muß also

$$\frac{\varphi(\varepsilon_1)}{\varphi(\varepsilon_2)} = \frac{\varphi(\varepsilon_1)}{\varphi(\varepsilon_2)}$$

oder

$$\frac{e^{-h^2 \varepsilon_1^2}}{e^{-h^2 \varepsilon_2^2}} = \frac{e^{-H^2 b^2 \varepsilon_1^2}}{e^{-H^2 b^2 \varepsilon_2^2}}$$

sein, was nur möglich ist, wenn $H = \frac{h}{b}$, wenn also h durch die Transformation umgekehrt beeinflußt wird, als ein Beobachtungsfehler, d. h. wenn h die reziproke Dimension eines Fehlers besitzt.

Die Theorie führt tatsächlich auf eine Relation

$$h = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{n}{2\,[\varepsilon^2]}}$$

welche die gewünschte Eigenschaft besitzt, und es ist dann

$$H = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{n}{2\,[(b\varepsilon)^2]}} = \frac{1}{b} \cdot \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{n}{2\,[\varepsilon^2]}} = \frac{h}{b},$$

es wird somit obige Forderung der Stabilität erfüllt.

Praktische Winke für Messungen zur Ergänzung der Katastralmappen.

Von **Julius Hanisch,** k. k. Obergeometer in Römerstadt.

(Fortsetzung.)

Wir kommen nun zu einem schwierigen Kapitel jeder derartigen Aufnahme, d. i. zur Orientierung und Transformierung des Netzes. Wenn wir auch aus den vorhin angegebenen Gründen auf eine genaue Einfügung in die Landestriangulierung verzichten müssen, so müssen wir doch trachten, das ganze starre System von Punkten in eine derartige Lage zu bringen, daß es eine möglichst wahrscheinliche Lage zur Landestriangulierung, aber auch zur bestehenden Mappendarstellung bekommt, oder mit anderen Worten, die Sektionslinien der Beimappe sollen von den Sektionslinien der alten Mappe möglichst wenig abweichen.

Wir wählen uns daher teils am Rande des Neuaufnahmegebietes, teils an anderen günstigen Punkten, z. B. in der Nähe von ehemaligen graphischen Triangulierungspunkten liegende sogenannte «Orientierungspunkte» aus, das sind solche Punkte, deren Lage möglichst gut eingemessen werden kann, die wir hierauf in die Mappe sorgfältigst einzeichnen und deren Koordinaten wir aus der Mappe entnehmen und selbstverständlich auf die Sektionslängen (1896,48 × 1517,19) ausgleichen. Auf diese Punkte werden wir unser starres Punktsystem möglichst einschwenken. Solche «Orientierungspunkte» sind hier: P_1, P_3, P_4, P_5, S, E, p_5, p_{11} und p_{12}. Von den Punkten P_3 und L sehen wir hier ab, weil deren Mappenblätter gegen die zwei Mappenblätter 3 und 5, auf welchen übrigens der größte Teil der Neuaufnahme liegt, eine zu große Verschiebung aufweisen, wie wir aus dem Beispiele 5 wissen. Der Punkt P_5 liegt in der Nähe eines ehemaligen graphischen Triangulierungspunktes. Ihn an der (übrigens natürlich unsicheren) Stelle des alten Triangulierungspunktes anzunehmen, war aus dem Grunde untunlich, weil von dort die Aussicht zu den Basispunkten I und K nicht möglich gewesen wäre.

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Baurat S. Wellisch.

Nr. 11. **Wien, 1. November 1916.** XIV. Jahrgang.

Stabilitätstheorie der Gauß'schen Fehlerfunktion.

Von **G. Grigercsik,** kgl. ung. Bergkommissär.

Aus der bekannten Formel für die Wahrscheinlichkeit der Koexistenz einer Fehlerreihe $\varepsilon_1; \varepsilon_2; \ldots \varepsilon_n$

$$W = \varphi(\varepsilon_1) \,.\, \varphi(\varepsilon_2) \ldots\ldots \varphi(\varepsilon_n)$$

bezw. aus der Bedingung

$$\left[\frac{d\, lg\, \varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

folgt eine gewisse Funktion

$$F(\varepsilon_1; \varepsilon_2; \ldots \varepsilon_n) = 0$$

oder

$$F(L - l_1; L - l_2; \ldots L - l_n) = 0$$

für W_{max} und die Entwicklung nach L soll

$$L = f(l_1; l_2; \ldots l_n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

geben.

Der wahre Wert ist an sich stabil, die analytischen Ausgleichungswerte sind nur dann verwendbar, wenn sie stabil sind. Soll also die nach 2) zu berechnende Größe L den wahren Wert oder überhaupt einen analytischen Ausgleichungswert bedeuten, so muß die allgemeine Form der Funktion f

$$L = \frac{[gl]}{[g]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

sein,*) woraus

$$[g(L - l)] = 0$$

oder

$$[g\varepsilon] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

folgt.

Aus 1) und 4) erhält man, wenn k eine Konstante bedeutet

$$d\, lg\, \varphi(\varepsilon) = k \,.\, g \,.\, \varepsilon \,.\, d\varepsilon$$

*) Vergl. «Das Stabilitätsprinzip in der Ausgleichungsrechnung.» XI. Jahrgang 1913. Nr. 8. der Ö. Z. f. V.

oder

$$\varphi(\varepsilon) = A \, . \, e^{k \int g \varepsilon d \varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

wo A konstant ist.

Die Ausführung der Integration bedingt die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen g und ε, welche wir vorläufig mit

$$g = \psi(\varepsilon) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

bezeichnen wollen und das Urgewicht der Beobachtung l nennen.

Um ψ näher zu bestimmen, transformieren wir l in $a + bl$, also ε in $b\varepsilon$. Es muß dann

$$\frac{[\psi(b\varepsilon) \, . \, (a + bl)]}{[\psi(b\varepsilon)]} = a + b \frac{[\psi(\varepsilon) \, l]}{[\psi(\varepsilon)]}$$

oder

$$a + b \frac{[\psi(b\varepsilon) \, . \, l]}{[\psi(b\varepsilon)]} = a + b \frac{[\psi(\varepsilon) \, l]}{[\psi(\varepsilon)]}$$

sein, woraus zunächst

$$\frac{[\psi(b\varepsilon) \, . \, l]}{[\psi(b\varepsilon)]} = \frac{[\psi(\varepsilon) \, l]}{[\psi(\varepsilon)]}$$

ferner, weil die Koeffizienten der l beiderseits gleich sein müssen,

$$\frac{\psi(b\varepsilon)}{[\psi(b\varepsilon)]} = \frac{\psi(\varepsilon)}{[\psi(\varepsilon)]}$$

folgt.

Diese Bedingung muß erfüllt werden, gleichgültig, ob man unter ε den absoluten oder den relativen Fehler von l versteht, denn im letzteren Falle ändern sich die Zahlenwerte ebenfalls um einen gemeinschaftlichen Faktor, wenn man den Einheitsfehler verändert. Es muß also

$$\psi(b\varepsilon) = c \, . \, \psi(\varepsilon)$$

sein, wo c eine von ε unabhängige Größe bedeutet, und diese Eigenschaft besitzt nur die eingliedrige algebraische Funktion

$$g = \psi(\varepsilon) = \varepsilon^m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

Setzen wir den erhaltenen Wert von g in 4), so wird

$$[\varepsilon^{m+1}] = 0$$

In einer ungezwungenen, analytisch konsequenten Theorie können nur reelle Lösungen in Betracht kommen, es muß also $m + 1$ eine ungerade bezw. m eine gerade Zahl sein. Wir setzen $m = 2r$, gleichzeitig $L - l$ statt ε und erhalten

$$[(L - l)^{2r+1}] = 0$$

Es sei die Lösung dieser Gleichung

$$L = f(l_1; l_2; \ldots l_n)$$

dann muß die analoge Gleichung, bezogen auf ein anderes Maßsystem mit den Parametern a, b,

$$[\{x - (a + bl)\}^{2r+1}] = 0$$

für x einen Wert liefern, welcher der Bedingung

$$x = a + bL = a + bf(l_1; l_2; \ldots l_n)$$

entspricht, was jedoch nur bei $r = 0$ der Fall ist.

Mit $r = 0$ wird $g = 1$ und aus 5) ergibt sich die Gauß'sche Formel.

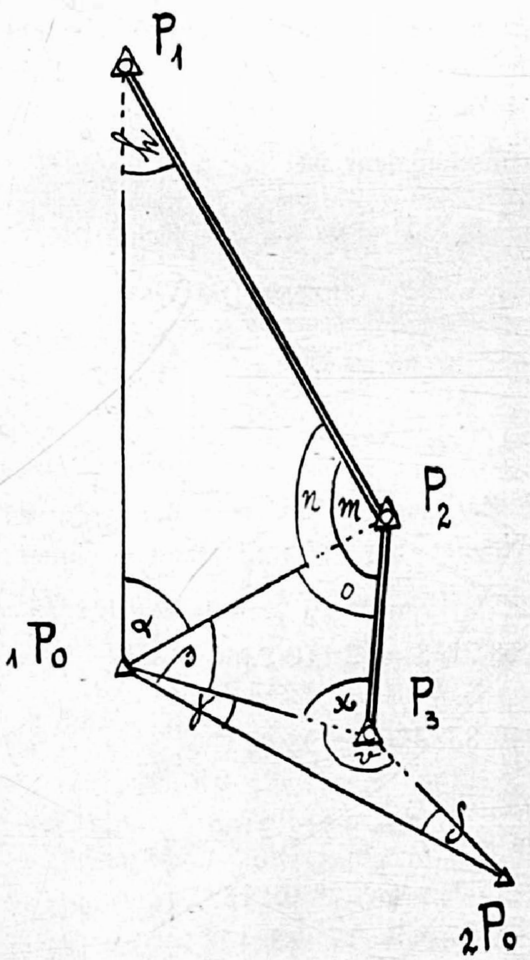
Wir können das Wesentliche dieser Deduktion in dem Folgenden zusammenfassen:

Man hat die Frage nach der Existenz eines Fehlergesetzes von der Frage: welche analytische Form ein Fehlergesetz überhaupt haben kann, zu trennen. Die erste Frage, wie jede Existenzfrage, läßt sich bloß durch die Erfahrung beantworten. Die zweite läßt sich dagegen a priori untersuchen und führt zu dem Ergebnis, daß die Gauß'sche Form die einzige ist, welche dem Stabilitätsprinzip entspricht, also die einzige, welche die Grundlage einer exakten Fehlertheorie bilden kann, gleichgültig, ob eine gesetzmäßige Fehlerwahrscheinlichkeit wirklich existiert, oder die Gesetzmäßigkeit nur eine unvollkommene ist und die analytische Theorie bloß zur Idealisierung der Erfahrungen dienen soll.

Kombiniertes Rückwärtseinschneiden.

Von **Koloman v. Mateóczy-Fleischer**, k. u. Obertrigonometer.

Unter diesem Titel hat Herr k. k. Agrar-Geometer Anton Tranquillini in den Heften Nr. 9 und 10 des Jahrganges XIII (1915) der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen die Lösung einer kombinierten Pothenot'schen Aufgabe abgeleitet und gerechnet.



Ausgehend von der allgemeinen Meinung, daß die Rechnungen der trigonometrischen Punkte einfach sein sollen und doch gute Resultate geben sollen, erlaube ich mir die beschriebene trigonometrische Aufgabe, das »Kombinierte Rückwärtseinschneiden«, auf kürzerem Wege zu lösen und mit einigen Bemerkungen niederzuschreiben. Die Aufgabe ist die folgende:

Gegeben sind die Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3 und die gemessenen Winkel α, β, γ und δ.

$P_1: y_1 = + 8724{\cdot}73 \quad x_1 = - 8622{\cdot}94$

$P_2: y_2 = + 7665{\cdot}47 \quad x_2 = - 6715{\cdot}25$

$P_3: y_3 = + 7745{\cdot}49 \quad x_3 = - 5796{\cdot}26$

$\alpha = 60^0\ 46'\ 03'' \quad \gamma = 12^0\ 08'\ 02''$

$\beta = 45\ \ 41\ \ 54 \quad \delta = 17\ \ 45\ \ 30$

Zuerst werden aus den gegebenen Koordinaten die Richtungswinkel und Seiten gerechnet, die zur weiteren Rechnung als Basis dienen.

$$y_2 - y_1 = - 1059{\cdot}26$$
$$x_2 - x_1 = + 1907{\cdot}69$$