Paper-ID: VGI_191420

# Ableitung der Fehlergleichungen bei trigonometrischer Punktbestimmung durch Einschneiden

Paul Werkmeister [1]

[1] *Straßburg im Elsaß*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **12** (10), S. 209–210

1914

BibTeX:

```
@ARTICLE{Werkmeister_VGI_191420,
Title = {Ableitung der Fehlergleichungen bei trigonometrischer Punktbestimmung
    durch Einschneiden},
Author = {Werkmeister, Paul},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {209--210},
Number = {10},
Year = {1914},
Volume = {12}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

# ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

**Nr. 10.** **Wien, 1. Oktober 1914.** **XII. Jahrgang.**

## Ableitung der Fehlergleichungen bei trigonometrischer Punktbestimmung durch Einschneiden.

Im III. Jahrgange dieser Zeitschrift wurden von Professor Dr. W. Láska und Bauinspektor S. Wellisch Ableitungen für die «Differentialformel der Azimute» und damit der Fehlergleichungen bei trigonometrischer Punktbestimmung durch Einschneiden angegeben; beide Ableitungen gehen von Beziehungen aus, die aus einer den geometrischen Zusammenhang der auftretenden kleinen Größen zeigenden Figur abgelesen werden. Im Folgenden soll eine analytische Ableitung der besagten Fehlergleichungen mitgeteilt werden, die von der sonst üblichen*) abweicht.

In der Form des Vorwärtseinschneidens lautet die vorliegende Aufgabe: In einem Festpunkte $P_i$ mit den Koordinaten $(x_i, y_i)$ wurde nach einem Neupunkt $P$ mit den endgiltigen Koordinaten $(x, y)$ der Richtungswinkel $\alpha_i$ gemessen; man soll eine lineare Gleichung zwischen der im Sinne der Ausgleichungsrechnung an der Beobachtung $\alpha_i$ anzubringenden Verbesserung $v_i$ einerseits und den Unbekannten $x$ und $y$ andererseits aufstellen.

Zwischen den angegebenen Größen besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + v_i) = \frac{y - y_i}{x - x_i}.$$

Führt man in dieser Gleichung an Stelle der endgiltigen Koordinaten $x$ und $y$ Näherungswerte $x_0$ und $y_0$ ein, indem man jetzt

$$x = x_0 + \triangle x \text{ und } y = y_0 + \triangle y,$$

so geht sie über in

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + v_i) = \frac{y_0 + \triangle y - y_i}{x_0 + \triangle x - x_i}.$$

*) Vgl. z. B. S. Wellisch: «Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung». II. Band. § 22 und § 23.

Wendet man jetzt auf beide Seiten der Gleichung den Taylor'schen Satz an, so erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha_i + \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} \frac{v_i}{\varrho} = \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} - \frac{y_0 - y_i}{(x_0 - x_i)^2} \triangle x + \frac{1}{x_0 - x_i} \triangle y.$$

Bezeichnet man den dem Näherungspunkt $P_0$ mit den Koordinaten $(x_0, y_0)$ entsprechenden Richtungswinkel mit $\alpha_{0,i}$ und die Entfernung zwischen $P_0$ und $P_i$ mit $s_{0,i}$, so bestehen die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha_{0,i} = \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}$$

und $x_0 - x_i = s_{0,i} \cos \alpha_{0,i}$ bezw. $y_0 - y_i = s_{0,i} \sin \alpha_{0,i}$; damit ergibt sich aus der oben angeschriebenen Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_i + \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} \frac{v_i}{\varrho} = \operatorname{tg} \alpha_{0,i} - \frac{\sin \alpha_{0,i}}{s_{0,i} \cos^2 \alpha_{0,i}} \triangle x + \frac{1}{s_{0,i} \cos \alpha_{0,i}} \triangle y.$$

Löst man diese Gleichung nach $v_i$ auf, so findet man

$$v_i = -\frac{\sin \alpha_{0,i}}{s_{0,i}} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_i}{\cos^2 \alpha_{0,i}} \varrho \triangle x + \frac{\cos \alpha_i}{s_{0,i}} \cdot \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_{0,i}} \varrho \triangle y + \varrho (\operatorname{tg} \alpha_{0,i} - \operatorname{tg} \alpha_i) \cos^2 \alpha_i.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_{0,i} - \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\sin (\alpha_{0,i} - \alpha_i)}{\cos \alpha_{0,i} \cos \alpha_i}$$

oder mit Rücksicht darauf, daß $(\alpha_{0,i} - \alpha_i)$ ein kleiner Winkel ist,

$$\operatorname{tg} \alpha_{0,i} - \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{1}{\cos \alpha_{0,i} \cos \alpha_i} \cdot \frac{\alpha_{0,i} - \alpha_i}{\varrho},$$

so geht sie über in

$$v_i = -\frac{\sin \alpha_{0,i}}{s_{0,i}} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_i}{\cos^2 \alpha_{0,i}} \varrho \triangle x + \frac{\cos \alpha_i}{s_{0,i}} \cdot \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_{0,i}} \varrho \triangle y + (\alpha_{0,i} - \alpha_i) \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_{0,i}}.$$

Beachtet man noch, daß der «gemessene Richtungswinkel» $\alpha_i$ und der «genäherte Richtungswinkel» $\alpha_{0,i}$ wenig verschieden sind, und setzt man dementsprechend $\cos \alpha_i = \cos \alpha_{0,i}$, so erhält man an Stelle der zuletzt angeschriebenen Gleichung:

$$v_i = -\frac{\sin \alpha_{0,i}}{s_{0,i}} \varrho \triangle x + \frac{\cos \alpha_{0,i}}{s_{0,i}} \varrho \triangle y + (\alpha_{0,i} - \alpha_i).$$

Dies ist die übliche Form der Fehlergleichungen bei trigonometrischer Punktbestimmung durch Einschneiden.

Straßburg i. E. P. Werkmeister.