Die Verbesserungsgleichung beim trigonometrischen Einschneiden von Punkten

Ernst Hammer

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **13** (1), S. 11–17

1915

BibTeX:

```
@ARTICLE{Hammer_VGI_191503,
Title = {Die Verbesserungsgleichung beim trigonometrischen Einschneiden von
   Punkten},
Author = {Hammer, Ernst},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {11--17},
Number = {1},
Year = {1915},
Volume = {13}
}
```

Die Verbesserungsgleichung beim trigonometrischen Einschneiden von Punkten.

Didaktische Bemerkungen.

Von **E. Hammer.**

Die Notiz von Werkmeister in dem mir soeben in die Hand kommenden Heft dieser Zeitschrift, 1914 (Bd. XII) S. 209—210, gibt mir Veranlassung zu folgenden Bemerkungen, die ich nicht im Sinn einer bei dem einfachen Gegenstand gewiß nicht mehr erforderlichen theoretischen, sondern im Sinn einer didaktischen Betrachtung anzusehen bitte, die auch auf die Bezeichnungen und dergl. eingehen soll.

1. Es sei vorausgesetzt, daß es sich um das Vorwärtseinschneiden des Neupunkts $\overline{P}$ handle, wobei die Koordinaten des ausgeglichenen Punkts $\overline{P}$ mit $(\overline{X}, \overline{Y})$ und die des Näherungspunkts P_0 mit (x_0, y_0) bezeichnet sein mögen. An x_0 und y_0 sind die durch die Ausgleichungsrechnung zu bestimmenden Korrektionen ξ und η anzubringen (— ich sage hier konsequent Korrektionen der Näherungswerte, nicht Verbesserungen, um die v den Messungen vorzubehalten —) um sie auf die endgiltigen Koordinaten von $\overline{P}$ zu bringen, d. h. es ist

$$\begin{aligned} \overline{X} &= x_0 + \xi \\ \overline{Y} &= y_0 + \eta \end{aligned} \qquad \text{1)}$$

gesetzt und anzunehmen, daß der Punkt P_0 der endgiltigen Lage $\overline{P}$ des zu bestimmenden Punkts schon sehr nahekommt, nämlich ξ und η so klein sind, daß sie im Vergleich zu den Koordinatendifferenzen und Strecken zwischen dem gesuchten Punkt und den Standpunkten der Winkelmessung als Differentiale angesehen werden dürfen.

Auf den fest gegebenen Winkelmessungsstandpunkten A, B, . . . mit den Koordinaten (x_a, y_a), (x_b, y_b) . . . sind Winkel oder Richtungen gemessen, aus denen, durch (positives oder negatives) Hinzufügen zu fest gegebenen Richtungswinkeln die «gemessenen» Richtungswinkel gebildet sind. Manchmal drücke ich im Unterricht das «fest gegeben» für A usw. durch $\underline{\underline{A}}$ usw. aus. Es bedeute ferner $(A\overline{P})$ den Richtungswinkel von A nach $\overline{P}$, $(B\overline{P})$ den von B nach $\overline{P}$ usw.; der Richtungswinkel von A nach dem Näherungspunkt P_0 ist (AP_0) usf. Diese Richtungswinkel $(A\overline{P})$, (AP_0) usf. werden, wie es der Praxis der trigonometrischen Punktbestimmung entspricht, stets im Gradmaß verstanden. Diese schöne, bequeme, leicht lesbare und jedes Mißverständnis ausschließende Jordan'sche Bezeichnungsweise $(P_1 P_2)$ für den Richtungswinkel der Geraden von P_1 nach P_2, nach der sich z. B. $(P_2 P_1) = (P_1 P_2) \pm 180^0$ von selbst versteht, ist in der trigonometrischen Praxis andern Bezeichnungen des Richtungswinkels, mit einem Buchstaben wie sonst in der Trigonometrie für Winkel üblich, z. B. α (von Azimut) oder ν (von Neigungswinkel, wie in der preußischen Katasterinstruktion) oder σ (von Südwinkel in Oesterreich) vorzuziehen. Auch diese letzte Bezeichnung hat ja Vorteile, vor allem den, daß man sich dabei α nach Wahl und Bedarf im «analytischen» Maß (arcus), als «reine Größe» im Sinn der Analysis, oder im «Gradmaß» der Winkel als benannte Zahl vorstellen kann, während der Richtungswinkel (Ab) stets nur im Gradmaß, nicht als unbenannte Zahl verstanden werden sollte.

Bezeichnet man nach dem Gebrauch der preußischen Katasterinstruktion den Richtungswinkel (AB) mit ν_A^a oder ν_a^b, so darf aus

$$\operatorname{tg} \nu_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

ohne weiteres gefolgert werden

$$\nu_a^b = \operatorname{arc\,tang} \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

wobei man sich nur ν_a^b als arcus, reine Zahl vorzustellen hat; dagegen ist aus

$$\operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

zu folgern

$$(AB) = \operatorname{arc\,tang} \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \cdot \varrho, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

wenn

$$\varrho^0 = \frac{180^0}{\pi} \text{ oder } \varrho^g = \frac{200^g}{\pi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

bedeutet, je nachdem man in alter oder in neuer Teilung rechnet. Aehnlich bei Reihenentwicklungen, bei Differentiationen usf. Doch ist mathematisch kaum zu beanstanden, didaktisch sogar zu befürworten, z. B. durch $\delta\,(AP_0)''_\xi$ auszudrücken: Veränderung (in Sekunden), die an dem Richtungswinkel (AP_0) eintritt, wenn bei festgehaltenen (x_a, y_a) die Abszisse x_0 von P_0 die kleine Korrektion ξ erfährt, u. a. Die Bezeichnung ν_a^b hat für die Praxis vor allem gegen sich, daß z. B. für den Richtungswinkel der Richtung vom Punkt P_1 zum Punkt P_2, der so einfach und sicher mit $(P_1 P_2)$ bezeichnet ist, ν_1^2 aus Gründen der allgemein gebräuchlichen mathematischen Symbolik nicht angeht und der Aufbau $\nu_{P_1}^{P_2}$ zu umständlich und wenig übersichtlich ist; auch ν_{P_1, P_2} oder $\nu_{1,2}$ ist umständlich und im Druck und in der Schrift meist nicht deutlich genug. Vergl. dazu auch Hammer, Trigonometrie, 3. Aufl., 1907, S. 623/624.

2. Bei unserer im Anfang von **1.** angedeuteten Aufgabe handelt es sich bekanntlich vor allem darum, in linearer Form die Veränderung des Richtungswinkels (AP_0) anzugeben, die dieser erfährt, wenn dem Punkt P_0 mit den Koordinaten $(x_0\, y_0)$ die kleinen Verschiebungen (Korrektionen seiner Koordinaten x_0, y_0) ξ und η in der Richtung der x- und der y-Achse gegeben werden, durch die der Punkt P aus der Lage P_0 in die Lage P mit den Koordinaten $\underline{X} = x_0 + \xi$, $\underline{Y} = y_0 + \eta$ übergeht; d. h. es ist eine Gleichung von der Form

$$(A\underline{P}) = (AP_0) + \delta\,(AP_0)_\xi + \delta\,(AP_0)_\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

aufzustellen, deren zwei letzte Glieder rechter Hand in ξ und η linear sind. Schließt man die sehr einfache Benützung einer Figur aus, die den Vorzug der Anschaulichkeit, aber den Mangel des fehlenden Nachweises allgemeiner Giltigkeit der Formel hat, so ist analytisch auszugehen von der Gleichung

$$\operatorname{tang}(\underline{AP}) = \frac{Y - y_n}{\underline{X} - x_n} = \frac{y_0 + \eta - y_n}{x_0 + \xi - x_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 8)$$

Es bestehen aber drei Möglichkeiten der Herleitung von 1) aus 8), nämlich entweder für 8) zu setzen

$$(\underline{AP}) = \operatorname{arc\,tang} \frac{Y - y_n}{\underline{X} - x_n} \cdot \varrho = \operatorname{arc\,tang} \frac{y_0 + \eta - y_n}{x_0 + \xi - x_n} \cdot \varrho \quad . \; . \; . \; 9)$$

oder unmittelbar von 8) auszugehen, oder endlich die Gleichung 8) zunächst zu logarithmieren, nämlich so zu schreiben:

$$\log \operatorname{tang}(\underline{AP}) = \log \frac{y_0 + \eta - y_n}{x_0 + \xi - x_n} = \log(y_0 + \eta - y_n) - \log(x_0 + \xi - x_n). \quad 10)$$

In den drei Formen 8) bis 10) dieser grundlegenden Gleichung ist zu beachten, daß $(x_0 y_0)$ und $(x_n y_n)$ fest gegebene Zahlen sind und daß (ξ, η) kleine, als Differentiale anzusehende Korrektionen sind, deren Feststellung eben der Hauptzweck der Ausgleichung ist.

Alle drei Wege müssen selbstverständlich zu demselben Ergebnis führen. Es ist aber nicht ohne Interesse, ihre Vorzüge und Nachteile gegen einander abzuwägen. Der erste Weg, von 9) aus, ist der meist benützte und insofern der natürlichste, als man bei der Ausgleichung «vermittelnder» Beobachtungen am einfachsten die mathematische Beziehung zwischen den Beobachtungen selbst, nicht Funktionen der Beobachtungen, und den Funktionen der Unbekannten zugrundlegt. Sind allgemein, unter Voraussetzung zweier unabhängiger Unbekannter X und Y, und die Beobachtungen sich auf beliebige Funktionen dieser Unbekannten beziehend, $L_1, L_2 \ldots L_n$ $(n > 2)$ die Messungsergebnisse für die Funktionen $F_1, F_2 \ldots F_n$ der zwei Unbekannten, d. h. bestehen, wenn $v_1, v_2 \ldots v_n$ die Verbesserungen bedeuten, die zum Zweck der «Ausgleichung» der L, ihrer rationellsten Verträglichmachung durch die Bedingung $[gvv] = $ Min., an diesen L anzubringen sind, die Verbesserungsgleichungen (— der Ausdruck Fehlergleichungen ist nicht gut, weil v keine Fehler sind, auch der Ausdruck «scheinbare» Fehler für die v ist nicht gut —)

$$\left.\begin{aligned} L_1 + v_1 &= F_1(X\,Y) \\ L_2 + v_2 &= F_2(X\,Y) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ L_n + v_n &= F_n(X\,Y) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 11)$$

und wird, um diese Gleichungen linear machen zu können,

$$\left.\begin{aligned} X &= x_0 + \xi \\ Y &= y_0 + \eta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 12)$$

gesetzt, mit den bereits angegebenen Voraussetzungen über ξ und η, so gibt der Taylor'sche Satz, wenn κ der Reihe nach jeden der Indizes $1, 2, \ldots n$ bedeutet, für die Verbesserungsgleichungen die Form:

$$L_\kappa + v_\kappa = F_\kappa(X\,Y) = F_\kappa(x_0 y_0) + \xi \cdot \left.\frac{\partial F_\kappa(X\,Y)}{\partial X}\right|_{\substack{X = x_0 \\ Y = y_0}} + \eta \cdot \left.\frac{\partial F_\kappa(X\,Y)}{\partial Y}\right|_{\substack{X = x_0 \\ Y = y_0}} \quad . \; . \; . \; 13)$$

oder mit bekannten Abkürzungen:

$$v_\kappa = a_\kappa \,.\, \xi + b_\kappa \,.\, \eta + l_\kappa \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

Die Koeffizienten a_κ, b_κ sind die Werte der partiellen Differentialquotienten nach der 1. und nach der 2. «Veränderlichen», l_κ ist der Wert, den man erhält, wenn von dem Betrag $F_\kappa\,(x_0 y_0)$, den die Funktion F_κ mit Einsetzung der Näherungswerte $x_0 y_0$ annimmt und der offenbar mit der Schärfe zu berechnen ist, die der Schärfe der Messungen entspricht, der Messungsbetrag L_κ abgezogen wird.

Alles das ist bekannt und in den Lehrbüchern zu finden; nur wird dort der Zusatz $X = x_0$, $Y = y_0$ in den zwei letzten Gliedern rechts in der Gleichung 13) weggelassen, er ist aber, zumal für den Anfänger, wichtig, denn er besagt: die numerischen Werte der Differentialquotienten dürfen mit Hilfe der Näherungswerte der Unbekannten berechnet werden.

Mit Rücksicht darauf wird nun in unserem Fall für die Differentialquotienten in der Gleichung 9) erhalten, wenn absichtlich alle einzelnen Faktoren bei der Differentiation angeschrieben werden und vorläufig der konstante Faktor ϱ wegbleibt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{arc\,tg} \dfrac{Y-y_a}{X-x_a}}{\partial X}\Bigg|_{\substack{Y=y_0\\ X=x_0}} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y_0-y_a}{x_0-x_a}\right)^2} \,.\, -1 \,.\, \frac{1}{(x_0-x_a)^2} \,.\, (y-y_a) = -\frac{y_0-y_a}{(x_0-x_a)^2+(y_0-y_a)^2} \\ \frac{\partial \operatorname{arc\,tg} \dfrac{Y-y_a}{X-x_a}}{\partial Y}\Bigg|_{\substack{Y=y_0\\ X=x_0}} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y_0-y_a}{x_0-x_a}\right)^2} \,.\, 1 \,.\, \frac{1}{x_0-x_a} \quad = +\frac{x_0-x_a}{(x_0-x_a)^2+(y_0-y_a)^2} \end{aligned}\right\} 15)$$

Die nach dem ersten Anschreiben der Differentialquotienten sich anscheinend ergebende nicht symmetrische Form beider verschwindet also sofort wieder, sobald sie nur auf gleiche Benennung gebracht werden. Beachtet man, daß im Nenner der letzten Form rechter Hand von 15) das Quadrat der Entfernung der Punkte A und P_0 steht, so wird also, wenn diese Entfernung mit s_a bezeichnet wird

$$\frac{\partial \operatorname{arc\,tang} \ldots}{\partial X}\Bigg|_{\ldots}^{\ldots} = -\frac{y_0-y_a}{s_a^{\,2}}; \qquad \frac{\partial \operatorname{arc\,tang} \ldots}{\partial Y}\Bigg|_{\ldots}^{\ldots} = +\frac{x_0-x_a}{s_a^{\,2}}, \; . \; . \quad 16)$$

wobei diesen Werten noch mit Rücksicht auf

$$s_a \,.\, \cos(AP_0) = x_0 - x_a; \qquad s_a \,.\, \sin(AP_0) = y_0 - y_a \; . \; . \; . \quad 17)$$

die bekannten andern Formen gegeben werden können, insbesondere die meist benützte

$$-\frac{\sin(AP_0)}{s_a}, \qquad +\frac{\cos(AP_0)}{s_a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 18)$$

Es wird also, da ferner

$$(AP_0) = \operatorname{arc\,tang} \frac{y_0-y_a}{x_0-x_a} \,.\, \varrho \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 19)$$

ist, aus der Gleichung 9) gemäß 13) und nach Einsetzen von 19) und 18):

$$(A\underline{P}) = (AP_0) - \xi \,.\, \frac{\sin(AP_0)}{s_a} \,.\, \varrho'' + \eta \,.\, \frac{\cos(AP_0)}{s_a} \,.\, \varrho'' \; . \; . \; . \quad 20)$$

Bezeichnen demnach endlich $(AP)_{\text{gemess.}}$ den «beobachteten» Richtungswinkel $(\overline{AP})$, vergl. den Eingang von **1**., und v_a die zu seiner «Ausgleichung» erforderliche Verbesserung, so daß also

$$(\overline{AP}) = (AP)_{\text{gemess.}} + v_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

ist, so erhält man die «Verbesserungsgleichung» in der bekannten Form, wobei rechts ξ, η und s_a im gleichen Maß zu nehmen und alle Glieder in $''$ ausgedrückt sind:

$$v_a'' = -\frac{\sin(AP_0)}{s_a}\varrho'' \cdot \xi + \frac{\cos(AP_0)}{s_a}\varrho'' \cdot \eta + [(AP_0) - (AP)_{\text{gemess.}}]'' \quad . \quad . \quad 22)$$

3. Gegen diese meist gewählte und auf wenigen Zeilen ausführlich zu gebende Herleitung der Gleichung 22) ist kaum etwas einzuwenden in Beziehung auf Einfachheit und Durchsichtigkeit auch für den Anfänger. Auch ist wichtig der unmittelbare Zusammenhang mit den in jedem Fall der vermittelnden Messungen brauchbaren und am natürlichsten sich darbietenden Gleichungen 11) und 14). Will man trotzdem andere Wege versuchen, so kann dazu Veranlassung geben die zuerst sich zeigende (freilich sofort wieder zu beseitigende) Asymmetrie der ersten rechten Seiten von 15) oder auch die Befürchtung, es möge dem Anfänger bei der Differentiation des arc tang in 9) nach 15) überhaupt leichter ein Versehen zustoßen, als bei anderen ihm vielleicht geläufigeren Funktionen. Auf solche, nämlich die Potenzen 1 und -1 der Variabeln, kommt man, wenn man mit W e r k m e i s t e r von der Gleichung 8) ausgeht. Erreicht man damit nun Vorteile? Denn darauf kommt es an, nicht darauf, daß die Ableitung «von der sonst üblichen abweicht». Die zuerst sich zeigende Asymmetrie tritt selbstverständlich auch hier auf, vergl. die Gleichung S. 210, Z. 3 von oben, ist nicht sofort mit gutem Grund zu beseitigen wie oben in 15), und verschärft sich sogar auf dem weitern W e r k m e i s t e r'schen Wege immer mehr, siehe die Gleichungen S. 210, Z. 9 und 15 von unten (die Gleichungen sind dort nicht numeriert). Der Anfänger wird sich auch bei der einfachen Annahme, es könne in der vorletzten Gleichung S. 210 $\cos\alpha_i = \cos\alpha_{o,i}$ und damit auch $\cos^2\alpha_i = \cos^2\alpha_{o,i}$ gesetzt werden, nicht ohne weiteres beruhigen, da beide Annahmen bei gewissen Werten von α sehr verschiedene Rechenschärfen in den Koeffizienten von $\triangle x$ und $\triangle y$ andeuten. Verschiebungen des Näherungspunkts P_0 um mehrere Dezimeter, um ihn nach P zu bringen, sind ja leicht möglich; beträgt die Verschiebung 0,3 *m* quer zu $\overline{AP}_0$ und ist s_a ziemlich klein, z. B. 600 *m*, so sind die Richtungswinkel (AP_0) und $(\overline{AP})$ um rund 2′ verschieden. Ist nun z. B. $\alpha_i = 89^0\,00'$, $\alpha_{o,i} = 89^0\,02'$, so ist (im zweiten Glied rechter Hand, S. 210, Z. 9 v. u.) $\cos\alpha_i : \cos\alpha_{o,i} = 1{,}03$, dagegen (im ersten Glied rechts) $\cos^2\alpha_i : \cos^2\alpha_{o,i} = 1{,}07$; wie genau ist demnach in den Koeffizienten von $\triangle x$ und $\triangle y$ zu rechnen, auf 3 v. H. oder auf 7 v. H? Ist gar $\alpha_i = 269^0\,55'$, $\alpha_{o,i} = 269^0\,57'$, so ist $\cos\alpha_i : \cos\alpha_{o,i} = 1{,}667$ (um $^2/_3$ von der Einheit verschieden), $\cos^2\alpha_i : \cos^2\alpha_{o,i} = 2{,}778$ (um $1^7/_9$ von der Einheit verschieden), beide werden einander gleich, $= 1$ gesetzt, wobei (im ersten Glied) dann ferner allerdings $\sin\alpha_{o,i}$ sehr klein ist, (im zweiten Glied) aber $\cos\alpha_{o,i}$ absolut $= 1$. Es ist ja leicht zu sehen, wie dieser Zweifel zu heben wäre.

Es soll aber jetzt hierauf nicht weiter eingegangen, sondern erst am Schluß von **5.** noch ein Wort über diesen Weg gesagt werden.

4. Versuchen wir zunächst noch die dritte Möglichkeit, nämlich von der Gleichung 10) auszugehen. Ich darf hier wohl daran erinnern, daß ich schon oft, nicht nur im Unterricht stets, sondern auch in Veröffentlichungen (s. z. B. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Bd. 31, S. 203 bis 207, 1902) darauf aufmerksam gemacht habe, daß in der Ausgleichungsrechnung, einer praktischen Differentialrechnung, Rechnungsabkürzungen dadurch zu erreichen sind, daß vor der Differentiation kompliziert in Produkt- und Quotientform gebauter Funktionen zuerst logarithmiert wird. Aus 10)

$$\log \operatorname{tang} (A\underline{P}) = \log (y_0 + \eta - y_a) - \log (x_0 + \xi - x_a)$$

folgt, wenn wir uns die Logarithmen im natürlichen System genommen denken,

$$\log \operatorname{tang} (A\underline{P}) = \log (y_0 - y_a) + \frac{\eta}{y_0 - y_a} - \log (x_0 - x_a) - \frac{\xi}{x_0 - x_a}$$

$$= \log \frac{y_0 - y_a}{x_0 - x_a} - \frac{\xi}{x_0 - x_a} + \frac{\eta}{y_0 - y_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 23)$$

oder

$$\log \operatorname{tang} (A\underline{P}) = \log \operatorname{tang} (AP_0) - \frac{\xi}{x_0 - x_a} + \frac{\eta}{y_0 - y_a} \quad \ldots\ldots 24)$$

Hier ist also von Anfang an keinerlei Unsymmetrie vorhanden. Höchstens wird der folgende Schritt dem Anfänger vielleicht etwas ungewohnt vorkommen; es ist nämlich, wenn $(A\underline{P})$ und (AP_0) genügend wenig von einander verschieden sind, gemäß dem Differential von log tang zu setzen:

$$\overset{e}{\log} \operatorname{tang} (A\underline{P}) - \overset{e}{\log} \operatorname{tang} (AP_0) = \frac{[(A\underline{P}) - (AP_0)]''}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang} (AP_0)} \cdot \frac{1}{\cos^2 (AP_0)}$$

$$= \frac{[(A\underline{P}) - (AP_0)]''}{\varrho''} \cdot \frac{1}{\sin (AP_0) \cdot \cos (AP_0)} \quad \ldots 25)$$

Damit wird aus 24)

$$(A\underline{P}) - (AP_0) = -\frac{\xi}{x_0 - x_a} \sin (AP_0) \cos (AP_0) \cdot \varrho'' + \frac{\eta}{y_0 - y_a} \sin (AP_0) \cos (AP_0) \cdot \varrho'', \quad \ldots 26)$$

oder da, vergl. 21):

$$(A\underline{P}) = (AP)_{\text{gemess.}} + v_a$$

zu setzen ist und mit Rücksicht auf 17):

$$v_a'' = -\frac{\sin (AP_0)}{s_a} \varrho'' \cdot \xi + \frac{\cos (AP_0)}{s_a} \varrho'' \cdot \eta + [(AP_0) - (AP)_{\text{gemess.}}]''. \quad 27)$$

5. Diese Ableitung in **4.** ist ebenso einfach und ungekünstelt, wie die in **2.** angegebene nächstliegende und verdient als die vielleicht kürzeste jedenfalls nicht, wie es in den Lehrbüchern geschieht, übergangen zu werden. Die einzige kleine Schwierigkeit besteht für den Anfänger, wie schon angedeutet, in der Gleichung 25), in der zudem wegen des Nenners des letzten Bruchs rechts eine ähnliche Bemerkung gemacht werden kann, wie am Schluß von **3.**, die sich freilich ebenfalls einfach erledigt. Ich möchte hier darauf aufmerksam machen, daß die Schlußweise von Gleichung 25), die in allen ähnlichen Fällen ja nichts anderes vorstellt als die gewöhnlichen Differentialformeln, mit Rücksicht auf vielerlei Anwendungen allgemeiner geübt werden sollte, als es der Fall ist. Z. B. was ist, wenn α_1 und α in Gradmaß genommen werden und genügend wenig von einander abweichen (d. h. für die angestrebte Genauigkeit genügend wenig), $\cos\alpha_1 - \cos\alpha$? Antwort: $-\frac{(\alpha_1-\alpha)''}{\varrho''}\cdot\sin\alpha$, wobei rechts statt $\sin\alpha$ natürlich gleich berechtigt wäre $\sin\alpha_1$. Es ist hier auch didaktisch der Hinweis geboten, daß sich der Bereich dieser Differentialformeln oft dadurch bedeutend erweitern läßt, daß in unserem Beispiel geschrieben wird $\sin\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$; z. B. sei $\alpha_1 = 52^0$, $\alpha = 53^0$, dann ist auf 5 Dez. genau $\cos 52^0 - \cos 53^0 = + 0{,}01385$, ferner ist $\frac{1^0}{\varrho^0}\cdot\sin 52^0 = 0{,}01375$, $\frac{1^0}{\varrho^0}\cdot\sin 53^0 = 0{,}01394$, dagegen $\frac{1^0}{\varrho^0}\sin 52{^\prime}{_2}{^0}$ $= 0{,}01385$. Oder, was ist $\overset{10}{\log} 102 - \overset{10}{\log} 100$? Antwort: $\frac{2}{100}\cdot M_{10}$ oder $\frac{2}{102}\cdot M_{10}$, noch besser $\frac{2}{101}\cdot M_{10}$; die drei Zahlen geben bis auf die 6. Dezimale genau 0,008686, 0,008516 und 0,008600 und es ist richtig 6stellig $\overset{10}{\log} 102 = 2{\cdot}008600$. Solche Dinge sollten im elementaren Unterricht in der Infinitesimalrechnung z a h l e n m ä ß i g geübt werden; ihr Nutzen für die P r a x i s und selbst für die mathematische A n s c h a u u n g ist nicht zu unterschätzen.

Um jetzt nochmals zu **3.** zurückzukehren: die rechte Seite der Gleichung 8) in **2.** liefert durch Entwicklung:

$$\operatorname{tang}(\underline{AP}) = \frac{y_0 - y_a}{x_0 - x_a} + \eta\cdot\frac{1}{x_0 - x_a} - \xi\cdot\frac{y_0 - y_a}{(x_0 - x_a)^2} \quad . \; . \; . \; . \; 28)$$

oder

$$\operatorname{tang}(\underline{AP}) = \operatorname{tang}(AP_0) - \xi\cdot\frac{y_0 - y_a}{(x_0 - x_a)^2} + \eta\cdot\frac{1}{x_0 - x_a} \quad . \; . \; . \; 29)$$

Die hier wieder vorhandene Unsymmetrie auf der rechten Seite der letzten Gleichung ließe sich dadurch verringern (aber nicht beseitigen), daß im letzten Glied gesetzt würde $\eta\cdot\frac{x_0 - x_a}{(x_0 - x_a)^2}$. Wichtiger ist, daß in 28) wieder geschlossen wird: bei genügend geringer Verschiedenheit der zwei Richtungswinkel $(\underline{AP})$ und (AP_0) kann man, gemäß dem Differential von tang, setzen:

$$\operatorname{tang}(\underline{AP}) - \operatorname{tang}(AP_0) = \frac{[(\underline{AP}) - (AP_0)]''}{\varrho''}\cdot\frac{1}{\cos^2(AP_0)}, \quad . \; . \; 30)$$

womit man, wenn noch gleich mit $\cos^2(AP_0)$ und mit ϱ'' durchmultipliziert wird, erhält:

$$(\underline{AP}) - (AP_0) = -\xi\cdot\frac{(y_0 - y_a)\cos^2(AP_0)}{(x_0 - x_a)^2}\cdot\varrho'' + \eta\cdot\frac{\cos^2(AP_0)}{x_0 - x_a}\cdot\varrho'' \quad 31)$$

oder mit Rücksicht auf 21): $(\underline{AP}) = (AP)_{\text{gemess.}} + v_a$ und auf die Gleichung 17) abermals

$$v_a'' = -\frac{\sin(AP_0)}{s_a}\varrho''\cdot\xi + \frac{\cos(AP_0)}{s_a}\varrho''\cdot\eta + [(AP_0) - (AP)_{\text{gemess.}}]'', \quad . \; . \; 32)$$

wie in 22) und 27); mehrere der wenig übersichtlichen Umformungen von S. 210 sind damit vermieden.