

Paper-ID: VGI_191515



Einfluß von Fehlern in den Koordinaten der Festpunkte auf die Koordinaten des Neupunktes bei trigonometrischer Punktbestimmung durch Einschneiden

Paul Werkmeister ¹

¹ *Straßburg im Elsaß*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **13** (11), S. 165–171

1915

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Werkmeister_VGI_191515,  
Title = {Einflu{\ss} von Fehlern in den Koordinaten der Festpunkte auf die  
Koordinaten des Neupunktes bei trigonometrischer Punktbestimmung durch  
Einschneiden},  
Author = {Werkmeister, Paul},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {165--171},  
Number = {11},  
Year = {1915},  
Volume = {13}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 11.

Wien, 1. November 1915.

XIII. Jahrgang.

Einfluß von Fehlern in den Koordinaten der Festpunkte auf die Koordinaten des Neupunktes bei trigonometrischer Punktbestimmung durch Einschneiden.

Von Dr. Ing. P. Werkmeister in Straßburg i. E.

Bei trigonometrischen Punktbestimmungen werden die Koordinaten der Festpunkte im allgemeinen als fehlerfrei angenommen; gelegentlich kann es aber auch von Interesse sein, den Einfluß von Fehlern in den Koordinaten der Festpunkte auf die Koordinaten des Neupunktes kennen zu lernen. Die rechnerische Bestimmung eines solchen Fehlereinflusses ist umständlich und wenig übersichtlich; an ihre Stelle tritt besser eine im Grundgedanken graphische Lösung der vorliegenden Aufgabe.

Bedeutet (x, y) die Koordinaten des Neupunktes und $(x_a, y_a), (x_b, y_b) \dots$ diejenigen der Festpunkte, so sind x und y Funktionen der Festpunktkoordinaten und man kann setzen

$$x = F_x(x_a, y_a; x_b, y_b; \dots) \quad y = F_y(x_a, y_a; x_b, y_b; \dots) \quad (1)$$

Bezeichnet man die mittleren Fehler der Festpunktkoordinaten mit $M_a', M_a'', M_b', M_b'', \dots$, so erhält man für die entsprechenden mittleren Fehler M_x und M_y von x und y auf Grund des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$M_x = \sqrt{\left(\frac{\partial F_x}{\partial x_a} M_a'\right)^2 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y_a} M_a''\right)^2 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x_b} M_b'\right)^2 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y_b} M_b''\right)^2 + \dots}$$

$$M_y = \sqrt{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x_a} M_a'\right)^2 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y_a} M_a''\right)^2 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x_b} M_b'\right)^2 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y_b} M_b''\right)^2 + \dots}$$

oder nach Einführung von entsprechenden Abkürzungen

$$M_x = \sqrt{\Delta x_a'^2 + \Delta x_a''^2 + \Delta x_b'^2 + \Delta x_b''^2 + \dots}$$

$$M_y = \sqrt{\Delta y_a'^2 + \Delta y_a''^2 + \Delta y_b'^2 + \Delta y_b''^2 + \dots}$$

dabei bedeutet $\left\{ \begin{matrix} \Delta x_i' \text{ und } \Delta y_i' \\ \Delta x_i'' \text{ und } \Delta y_i'' \end{matrix} \right\}$ die mittleren Fehler von x und y für den

Fall, daß nur $\left\{ \begin{matrix} x_i \\ y_i \end{matrix} \right\}$ mit dem mittleren Fehler $\left\{ \begin{matrix} M_i' \\ M_i'' \end{matrix} \right\}$ behaftet ist.

Die Ermittlung der Fehler M_x und M_y geschieht in der Weise, daß man die mittleren Fehler $\Delta x_1', \Delta y_1'; \Delta x_1'', \Delta y_1''$ unter Beachtung gewisser graphischer Näherungen auf Grund einer maßstäblich gezeichneten Figur getrennt bestimmt, und sodann den Gleichungen (2) entsprechend zusammenfaßt; die Gleichungen (1) werden dabei nicht benützt, so daß man sie nicht zu kennen braucht.*)

Im Folgenden soll die Bestimmung der mittleren Fehler M_x und M_y bei den Aufgaben des Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens gezeigt werden.

Vorwärtseinschneiden.

In ihrer einfachsten Form lautet die Aufgabe des Vorwärtseinschneidens folgendermaßen: Zur Festlegung eines Neupunktes P wurden in den Festpunkten A und B (Figur 1) die Winkel $PAB = \alpha$ und $ABP = \beta$ gemessen.

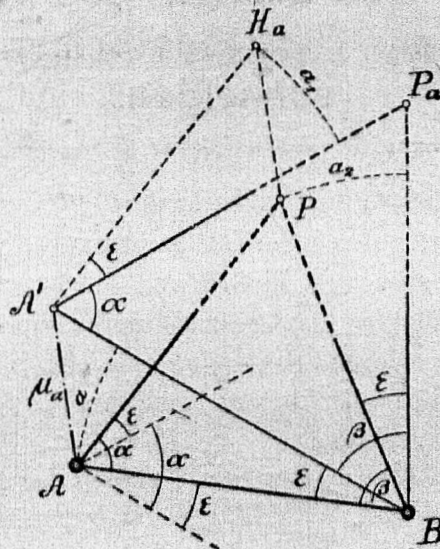


Fig. 1.

Wird der eine der beiden Festpunkte — z. B. A — einem in einer gegebenen Richtung wirkenden Fehler μ_a entsprechend nach A' verlegt, so erhält man unter Festhaltung der beiden Winkel α und β an Stelle des Punktes P den Punkt P_a ; dabei ergeben sich die Punkte A' und P_a aus den Punkten A und P durch Drehung der Schenkel des Winkels β um einen Winkel ϵ , dessen Größe von der Richtung und der Größe des Fehlers μ_a abhängig ist. Zieht man durch A' und P die Parallelen zu AP und AA' , so ergibt sich der Punkt H_a ; dieser Punkt liegt so, daß einerseits die Strecke PH_a gleich dem Fehler μ_a und der Winkel $H_a A' P_a$ gleich dem Winkel ϵ ist. Beachtet man, daß die Strecke μ und damit der Winkel ϵ klein sind, so darf man in der Nähe der Punkte A , H_a und P die Schenkel des Winkels ϵ parallel zu einander annehmen; dabei

*) Vgl. Werkmeister. Graphische Ermittlung des mittleren Fehlers einer Funktion von Beobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1915. Seite 113.

stellen a , a_1 und a_2 die Abstände der betreffenden Parallelen vor. Den Abstand a kann man der Figur entnehmen, wenn man unter Anwendung eines genügend großen Maßstabes den Punkt A um die Strecke μ_a nach A' verschiebt*), und durch A' die Parallele zu AB zieht. Die Abstände a_1 und a_2 erhält man nach Ermittlung von a aus den Gleichungen

$$a_1 = a \frac{AP}{AB} \text{ und } a_2 = a \frac{BP}{AB}$$

mit Hilfe des Rechenschiebers. Die Richtungen für die auf die Abstände a_1 und a_2 sich beziehenden Parallelverschiebungen ergeben sich in jedem Fall auf Grund der durch die Figur 1 angedeuteten Überlegung.

Bestimmt man in der angegebenen Weise die den Koordinatenfehlern μ_a' , μ_a'' , μ_b' und μ_b'' entsprechenden Lagen des Punktes P , so erhält man die Punkte P_a' , P_a'' , P_b' und P_b'' ; die Koordinatenunterschiede dieser Punkte in Bezug auf den Punkt P stellen dann die in den Gleichungen (2) mit $\Delta x_a'$, $\Delta x_a''$, $\Delta x_b'$, $\Delta x_b''$ und $\Delta y_a'$, $\Delta y_a''$, $\Delta y_b'$, $\Delta y_b''$ bezeichneten Fehler vor.

In der Figur 2 ist die Bestimmung der mittleren Koordinatenfehler μ_x und μ_y des Neupunktes P für das durch die Figur gegebene Zahlenbeispiel durch-

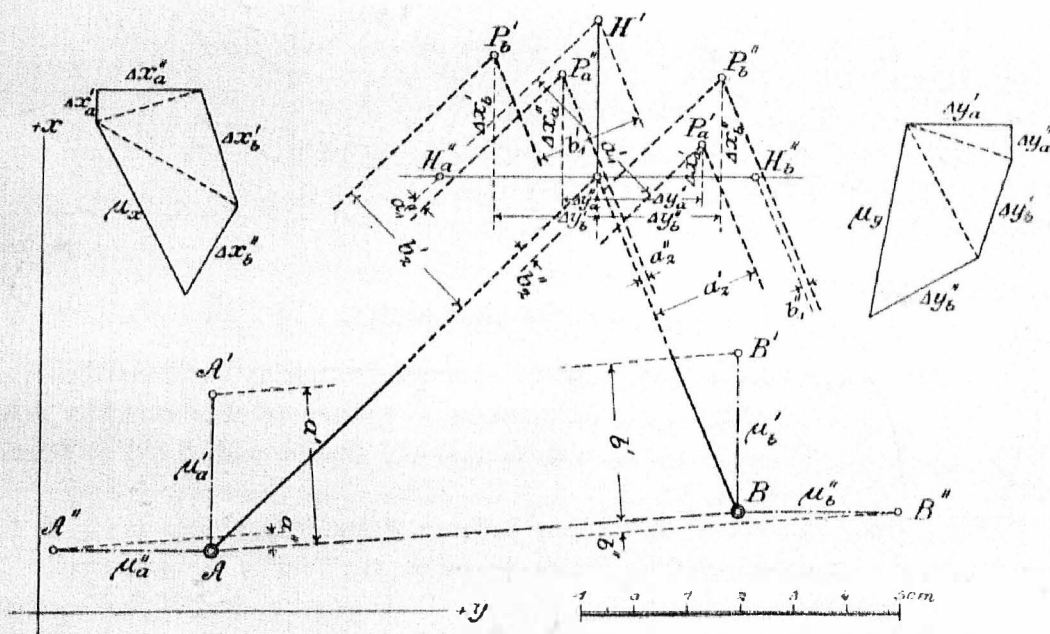


Fig. 2 .

geführt für den Fall, daß die Koordinaten der Festpunkte A und B je mit dem mittleren Fehler $\pm 3 \text{ cm}$ behaftet sind; der Gang der Lösung ergibt sich aus der folgenden Zusammenstellung der in Betracht kommenden Werte.

Bestimmung des dem mittleren Fehler $\mu_a' = \pm 3 \text{ cm}$ entsprechenden Punktes P_a' :

$$a' = 3,0 \text{ cm}$$

*) Bei dieser Verschiebung ist es gleichgültig, ob man sie in positivem oder negativem Sinn vornimmt.

$$a_1' = a' \frac{AP}{AB} = 3,1 \text{ cm} \quad a_2' = a' \frac{BP}{AB} = 2,1 \text{ cm}$$

$$\Delta x_a' = 0,6 \text{ cm} \quad \Delta y_a' = 2,0 \text{ cm}$$

Bestimmung des dem mittleren Fehler $\mu_a'' = \pm 3 \text{ cm}$ entsprechenden Punktes P_a'' :

$$a'' = 0,2 \text{ cm}$$

$$a_1'' = a'' \frac{AP}{AB} = 0,2 \text{ cm} \quad a_2'' = a'' \frac{BP}{AB} = 0,1 \text{ cm}$$

$$\Delta x_a'' = 2,0 \text{ cm} \quad \Delta y_a'' = 0,7 \text{ cm}$$

Bestimmung des dem mittleren Fehler $\mu_b' = \pm 3 \text{ cm}$ entsprechenden Punktes P_b' :

$$b' = 3,0 \text{ cm}$$

$$b_1' = b' \frac{BP}{AB} = 2,1 \text{ cm} \quad b_2' = b' \frac{AP}{AB} = 3,1 \text{ cm}$$

$$\Delta x_b' = 2,3 \text{ cm} \quad \Delta y_b' = 2,0 \text{ cm}$$

Bestimmung des dem mittleren Fehler $\mu_b'' = \pm 3 \text{ cm}$ entsprechenden Punktes

$$b'' = 0,2 \text{ cm}$$

$$b_1'' = b'' \frac{BP}{AB} = 0,1 \text{ cm} \quad b_2'' = b'' \frac{AP}{AB} = 0,2 \text{ cm}$$

$$\Delta x_b'' = 1,9 \text{ cm} \quad \Delta y_b'' = 2,3 \text{ cm}$$

Auf Grund der Gleichungen (2) ergibt sich graphisch — in der in der Figur angegebenen Weise — oder rechnerisch

$$\mu_x = \pm 3,6 \text{ cm} \quad \mu_y = \pm 3,7 \text{ cm}$$

Rückwärtseinschneiden.

Im einfachsten Fall hat die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens die folgende Form: Zur Festlegung eines Neupunktes P wurden in ihm zwischen den Festpunkten A , B und C (Figur 3) die Winkel $APC = \alpha$ und $BPC = \beta$ gemessen.

Verlegt man den einen der beiden äußeren Festpunkte A und B — z. B. A — einem in einer gegebenen Richtung wirkenden Fehler μ_a entsprechend nach A' , so wird dadurch der Neupunkt unter Beibehaltung der Winkel α und β nach P_a verschoben. Zieht man durch A' die Parallele zu AP , so erhält man auf der Verlängerung von CP den auf dem Umkreis des Dreiecks $P_a A' C$ liegenden Punkt H_a . Mit Rücksicht darauf, daß mit der Strecke μ_a der Winkel PCP_a klein ist, kann man an die Stelle der Sehne PP_a die Tangente in P und an die Stelle der Sehne $H_a P_a$ die Tangente in H_a treten lassen. Da die Tangenten-sehnenwinkel TPC und $T_a H_a C$ gleich den Peripheriewinkeln PAC bzw. $H_a A' C$ sind und diese nur um den kleinen, von μ_a abhängigen Winkel ACA' von einander abweichen, so darf man die Tangenten T und T_a für ein kurzes Stück parallel zu einander annehmen. Der Punkt P_a läßt sich demnach bestimmen als Schnitt der Tangente in P an den Kreis über BC mit der Parallelen durch den Punkt H_a zur Tangente in P an den Kreis über AB .

In ähnlicher Weise gestaltet sich die Bestimmung des einem Fehler μ_c bei dem mittleren Punkt C entsprechenden Punktes P_c (Figur 4). Wird durch die Einwirkung des Fehlers μ_c der Punkt C nach C' verschoben und zieht man

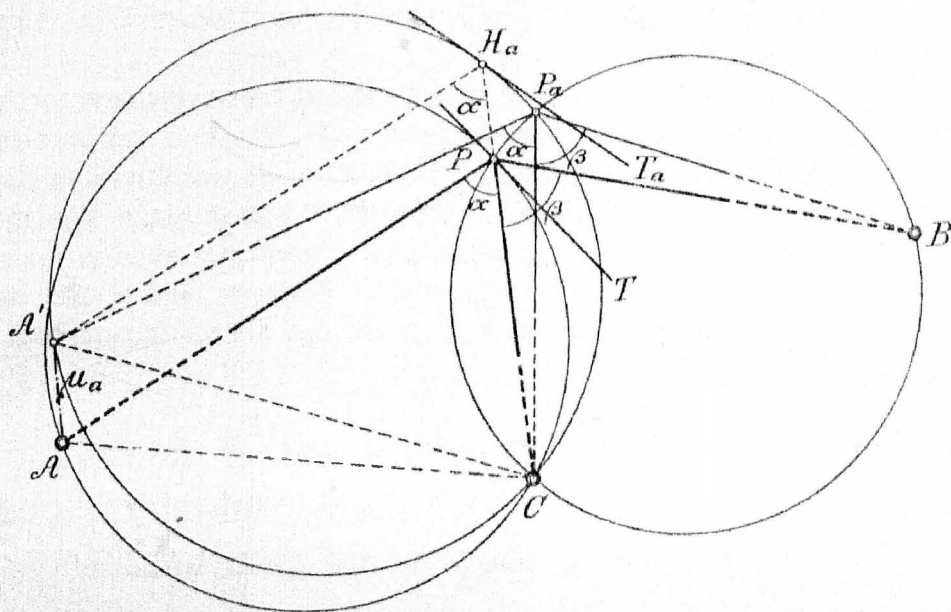


Fig. 3.

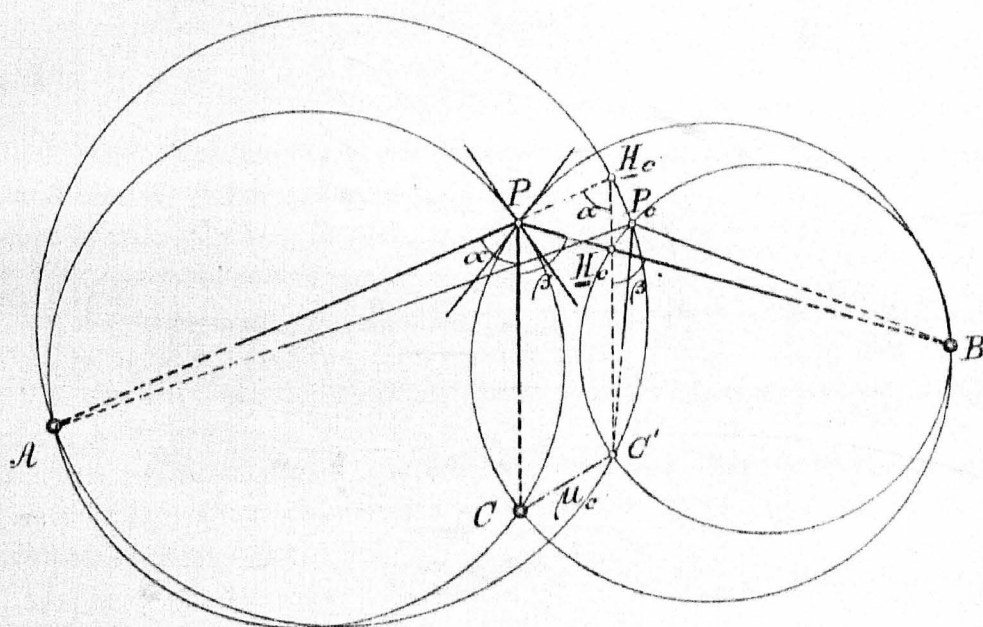


Fig. 4.

durch C' die Parallele zu CP , so bestimmt diese auf AP und BP zwei Punkte \underline{H}_c und \underline{H}_c , die auf den Umkreisen der Dreiecke $P_c AC'$ bzw. $P_c BC'$ liegen. Da die Sehnen $\underline{H}_c P_c$ und $\underline{H}_c C'$ klein sind, so darf man an ihre Stelle die Tangenten in \underline{H}_c und \underline{H}_c treten lassen; mit Rücksicht auf die ebenfalls mit μ_c

kleinen Strecken $P\overline{H}_a$ und $P\overline{H}_b$ darf man von diesen Tangenten annehmen, daß sie für die kurzen in Betracht kommenden Stücke parallel sind zu den beiden Tangenten im Punkt P an die Umkreise der Dreiecke PAC und PBC . Man erhält demgemäß den Punkt P_0 nach Bestimmung der Punkte \overline{H}_a und \overline{H}_b als Schnittpunkt der Parallelen durch diese Punkte zu den Tangenten in P an die Kreise über AC und BC .

Bestimmt man in dieser Weise die den Koordinatenfehlern $\mu_a', \mu_a''; \mu_b', \mu_b''$ und μ_c', μ_c'' entsprechenden Lagen des Punktes P , so ergeben sich die Punkte $P_a', P_a''; P_b', P_b''$ und P_c', P_c'' ; die Unterschiede zwischen den Koordinaten dieser Punkte und denjenigen des Punktes P stellen dann die in den Gleichungen (2) mit Δx_i und Δy_i bezeichneten Einzelfehler vor.

Führt man die Bestimmung der mittleren Fehler μ_x und μ_y für das in der Figur 5 gegebene Beispiel für den Fall durch, daß die Koordinaten der drei

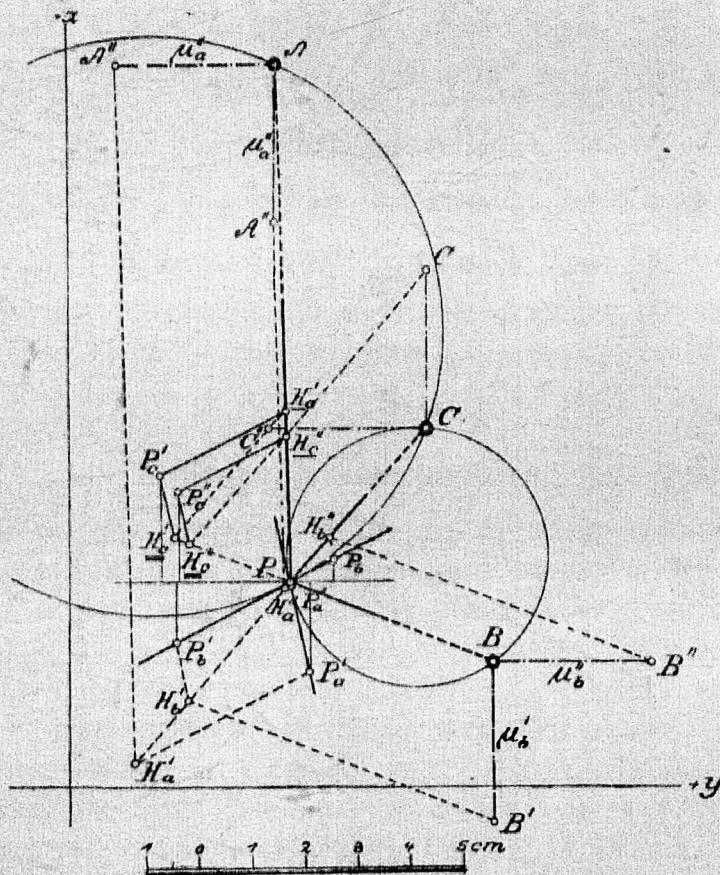


Fig. 5.

Festpunkte je mit dem mittleren Fehler $\pm 3 \text{ cm}$ behaftet sind, so erhält man unter Verwendung eines genügend großen Maßstabes die der Figur 4 entsprechend bezeichneten Punkte; dabei ergeben sich für die Koordinatenunterschiede des Punktes P in Bezug auf die Punkte $P_a', P_a''; P_b', P_b''$ und P_c', P_c'' die Werte

$\Delta x_a' = 1,7$	$\Delta y_a' = 0,4$	$\Delta x_a'' = 0,1$	$\Delta y_a'' = 0,0 \text{ cm}$
$\Delta x_b' = 1,1$	$\Delta y_b' = 2,2$	$\Delta x_b'' = 0,4$	$\Delta y_b'' = 0,8 \text{ cm}$
$\Delta x_c' = 2,0$	$\Delta y_c' = 2,4$	$\Delta x_c'' = 1,7$	$\Delta y_c'' = 2,1 \text{ cm}$

Faßt man diese Werte in der durch die Gleichungen (2) bestimmten Weise zusammen, so findet man

$$\mu_x = \pm 3,3 \text{ cm} \qquad \mu_y = \pm 4,0 \text{ cm}$$

Sowohl beim Vorwärtseinschneiden als auch beim Rückwärtseinschneiden kann man die zur Berechnung der Fehler μ_x und μ_y graphisch ermittelten Einzelfehler $\Delta x_1'$, $\Delta y_1'$ und $\Delta x_1''$, $\Delta y_1''$ in einfacher Weise einer Probe unterwerfen; man entnimmt zu diesem Zwecke der Figur die Koordinaten der Punkte P_1' und P_1'' und berechnet aus ihnen und den um μ_1' bzw. μ_1'' veränderten Koordinaten der Festpunkte mit Hilfe der betreffenden Richtungswinkel die den gemessenen Winkeln α und β entsprechenden Winkel, die dann mit jenen übereinstimmen müssen.

Theoretische Betrachtungen über die Orientierung photographischer Ballonaufnahmen nebst der Behandlung eines speziellen Falles.

Von Dr. K. Wolgel, Professor an der k. k. Technischen Hochschule in Lemberg.

(Schluß.)

$$a). H_1 = H_2$$

Die Orientierung der dritten Aufnahmekategorie bedingt bei zwei identifizierten Kartenpunkten — außer der im Strahlenbüschel vorhandenen — noch zwei unabh. Bestimmungsstücke. Diese sind hier die horizontale Entfernung der beiden Punkte d und ihr Höhenunterschied $\Delta H = 0$. Um die Formeln in möglichst einfacher Form erhalten zu können, wurde folgende Lage des Koordinatensystems (siehe Fig. 1.) angenommen.

Der Koordinatenursprung befindet sich im Aufnahmepunkte (Ballonorte), die X -Achse ergibt sich als Schnitt der durch den Hauptstrahl der Aufnahme gelegten vertikalen und der durch den Ursprung gelegten Horizontalebene (die $+$ Richtung gegen die aufgenommenen Punkte gerichtet), die Y -Achse befindet sich in der oberwähnten Horizontalebene senkrecht zur X -Achse (die $+$ Richtung rechts vom Aufnahmeapparate), die h -Achse geht lotrecht vom Aufnahmepunkte (die $+$ Richtung nach unten).

Aus der Figur ist weiter ersichtlich:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ und } h = (x_2 - x_1) \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin (\beta_1 - \beta_2)} = (y_2 - y_1) \frac{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2}{\sin (\gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$\text{folglich } \operatorname{tg} \sigma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin (\gamma_1 - \gamma_2)}{\sin (\beta_1 - \beta_2) \sin \gamma_1 \sin \gamma_2}$$

Alle in dieser Formel vorkommenden Winkelwerte sind bekannt, da ω der Neigungswinkel des Hauptstrahles gegen den Horizont bekannt ist.