

Paper-ID: VGI_191603



Messtechnik und Fehlertheorie

Alfred Basch ¹

¹ *k. k. Adjunkt der Normal-Eichungs-Kommission in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **14** (2, 3, 4), S. 17–20, 33–42, 53–59

1916

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Basch_VGI_191603,  
  Title = {Messtechnik und Fehlertheorie},  
  Author = {Basch, Alfred},  
  Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {17--20, 33--42, 53--59},  
  Number = {2, 3, 4},  
  Year = {1916},  
  Volume = {14}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 2.

Wien, 1. Februar 1916.

XIV. Jahrgang.

Messtechnik und Fehlertheorie.

Von Ing. Dr. Alfred Basch, k. k. Adjunkt der Normal-Eichungs-Kommission in Wien.

(Nach einem am 28. Jänner 1913 im Oesterreichischen Verbands des Vereines deutscher Ingenieure gehaltenen Vortrage.)

Der unmittelbare Zweck einer einzelnen Messung ist die Feststellung einer Zahl, durch welche entweder eine in möglichst bestimmter Weise definierte Größe oder der unter möglichst bestimmten Umständen vorhandene Grad irgend einer Eigenschaft eines Körpers in einer eindeutigen Weise charakterisiert wird. Der unmittelbare Zweck einer Reihe zusammengehöriger Messungen kann ein verschiedenartiger sein. Es kann sich darum handeln, ein Bild über die gegenseitige Lage verschiedener Körper zu gewinnen, eine Aufgabe, die in der Geodäsie und in der Astronomie im Vordergrund steht. Ein anderer Zweck von Messungsreihen ist die experimentelle Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit zweier oder mehrerer veränderlicher Größen oder Graden von Körpereigenschaften. Die Aufgabe ist in diesem Fall die Aufstellung eines empirischen Gesetzes oder die Bestimmung einer oder mehrerer Konstanten in einem Gesetze, das bis auf den Zahlenwert dieser Konstanten auf deduktivem Wege abgeleitet oder wenigstens plausibel gemacht werden konnte.

Bei jeder einigermaßen wichtigen Messung werden mehrere Beobachtungen vorgenommen, wodurch von Vorneherein ein Schutz gegen ausgesprochene Irrtümer, sogenannte »grobe Fehler« gegeben ist. Da die meisten Messungen in letzter Linie auf Längenmessungen, also Ablesungen auf einer Skala zurückgeführt werden, wird das Resultat der einzelnen Beobachtung auch als »Lesung« bezeichnet.

Jede Beobachtung ist mit Fehlern behaftet. Wenn man von den »groben Fehlern« absieht, kann man zwei Hauptgruppen von Fehlern unterscheiden: die systematischen oder gesetzmäßigen und die regellosen oder zufälligen Fehler.

Zu der ersten dieser beiden Hauptgruppen gehören Fehler, welche durch eine bewußte Vernachlässigung entstehen. Es wird z. B. bei der Gauß'schen Spiegelablesung die Drehung des Spiegels proportional der Bewegung des Fernrohrfadenskreuzes auf dem Spiegelbild der Skala oder der Bewegung des

Lichtstreifens auf der Skala selbst angenommen, während in Wirklichkeit diese Wegstrecke der Tangente des doppelten Drehungswinkels proportional ist. Dieser Fehler hat streng genommen nicht den Charakter eines Meßfehlers; er ist ein Rechenfehler, der vermieden werden kann und vermieden werden wird, sobald sein Betrag bei der angestellten Messung überhaupt in Betracht kommt.

Eine zweite Gruppe von Fehlern kann dadurch vermieden werden, daß die Messung derart zweimal wiederholt wird, daß dieselbe Ursache die beiden Male dem Absolutbetrage nach gleich große Fehler von entgegengesetztem Sinne hervorruft. Ein typisches Beispiel für Fehler dieser Art sind die Exzentrizitätsfehler der Winkelmeßinstrumente.

Eine dritte Fehlergruppe rührt von der Unrichtigkeit der Skala des verwendeten Instrumentes her. Die einzelnen Teilstriche werden niemals vollständig genau an der ihrer Anschreibung entsprechenden Stelle angebracht sein. Nun kann vor dem Gebrauche des Instrumentes durch ein besonders genaues Verfahren die Größe des Fehlers jedes einzelnen Teilstriches festgestellt, mit anderen Worten, die Skala einer »Eichung« unterzogen werden. Ist einmal der Fehler jedes einzelnen Teilstriches bekannt, so kann er durch Anbringen einer seinem Negativwerte gleichen Korrektur an dem Beobachtungsergebnis behoben werden.

Eine vierte Art von Fehlern entsteht dadurch, daß nicht die Nebenumstände herrschen unter deren Voraussetzung das Instrument richtig zeigt. Ein Normalmaßstab zeigt bei der Temperatur des schmelzenden Eises richtig. Im Raume, in dem gemessen wird, herrscht aber eine andere Temperatur, z. B. $+15^{\circ} C$. Ist das Ausdehnungsgesetz des Maßstabmaterials bekannt, so kann auch die Größe der Strecke zwischen zwei bestimmten Teilstrichen bei $+15^{\circ}$ berechnet, der Fehler also vermieden werden. Der Luftdruck wird durch die Quecksilbersäule von 0° gemessen, der er das Gleichgewicht hält. das Quecksilber hat aber die Lufttemperatur; es muß die Höhe der Säule erst auf 0° reduziert werden.

Eine weitere Gruppe von Fehlern, deren Ausmerzung schon schwerer fällt, rührt von den Veränderungen her, die das Instrument oder ein wesentlicher Bestandteil desselben seit der letzten Eichung durchgemacht hat, den sogenannten »Alterungsprozessen«. In besonderen Fällen ist auch ihre Berücksichtigung und Ausbesserung durchführbar, so z. B. bei den Temperaturmessungen mit dem Quecksilberthermometer. Quecksilber und Glas dehnen sich bei der Erwärmung aus. Das Quecksilber nimmt bei der Wiederabkühlung sein früheres Volumen an, während die Dehnung des Glases, sofern die Erwärmung längere Zeit gedauert hat, einen zurückbleibenden Teil besitzt. Die Kuppe des Quecksilberfadens steht nach einiger Zeit, wenn inzwischen mehrere Erwärmungen vorgenommen worden sind, tiefer als sie früher bei der gleichen Temperatur stand. Diese für alle Temperaturen gleiche Erniedrigung der Anzeige wird durch die Vornahme der Eispunktsbestimmung festgestellt. Die Erscheinung selbst wird als »Eispunktsdepression« bezeichnet.

Sämtliche bisher erwähnten Fehler sind durch bestimmte Ursachen bedingt, die nach bekannten physikalischen und teilweise auch geometrischen Gesetzen

Fehler als Wirkungen hervorrufen. Ich kenne diese Gesetze und bin dadurch in die Lage versetzt, die Fehler bestimmen und daher auch ausmerzen zu können. Eine besondere Theorie ist hiezu nicht erforderlich. Die Behandlung der bisher besprochenen Fehler bildet daher keinen Gegenstand der Fehlertheorie. —

Den Gegenstand der Fehlertheorie bilden vielmehr die unregelmäßigen oder zufälligen Fehler, das sind jene Fehler, deren Ursachen zu durchblicken wir nicht in der Lage sind. Hieher gehören vor allem die sogenannten »Ablesefehler«. Die meisten Messungen von Größen oder Eigenschaftsgraden werden, wie bereits erwähnt, auf Längenmessungen zurückgeführt. Selbst die Gewichtsbestimmung erfolgt, sofern nur einigermaßen exakt vorgegangen werden soll, durch Ablesung von Skalenausschlägen, also durch Längenmessungen. Bei jeder genauen Längenmessung tritt die Notwendigkeit ein, Teile, die kleiner sind als die kleinsten Maßstabteile, zu schätzen und bei dieser Schätzung unterlaufen Fehler, die gar keiner Kontrolle unterliegen. Es wäre statistisch wohl sicher die Neigung einzelner Beobachter nachweisbar, beim Einschätzen solcher kleinen Teile gewisse Werte zu bevorzugen. Außerdem hat die Schätzungsmöglichkeit nach unten hin eine gewisse Grenze und von einander verschiedene Größen werden als gleich bezeichnet werden müssen, wenn ihr Unterschied innerhalb des Schwellenwertes der Wahrnehmung liegt. Derartige subjektive Schätzungsfehler, deren Ursache in der Unvollkommenheit der menschlichen Sinneswahrnehmung liegt, kommen besonders bei Messungen in Betracht, bei denen es auf die Beurteilungen physiologischer Wirkungen ankommt, z. B. bei den Helligkeitsmessungen in der Photometrie.

Eine weitere Ursache zufälliger Fehler sind die fehlerhaften Einstellungen. Es sei z. B. eine zu messende Strecke durch zwei feine Querstriche und einen feinen Längsstrich auf einer polierten Metallplatte definiert. Die Messung geschieht dadurch, daß das Fadenkreuz eines Mikroskops nacheinander mit den beiden durch die Schnitte der Striche definierten Endpunkten der Strecke in Koïnzidenz gebracht und die Größe der Parallelverschiebung des Mikroskops auf irgend eine Art mit Hilfe des Normalmaßstabes oder einer anderen geeichten Meßeinrichtung (z. B. einer Schraube) bestimmt wird. Wiederholte Einstellungen auf dasselbe Ende der zu messenden Strecke werden untereinander niemals identisch sein; denn unter dem Mikroskop erweisen sich die Gebilde, die dem freien Auge als feine kaum sichtbare Linien erschienen, als von Wällen begrenzte Gräben.

Unkontrollierbare Fehler werden auch durch während der Messung unmerkliche Veränderung von Nebenumständen hervorgerufen, die selbst wieder als Resultierende der Wirkungen vieler verschiedener Ursachen anzusehen sind. Die verschiedenen Teilfehler haben wohl durchwegs ihre Ursache, diese können aber nicht festgestellt werden; teilweise ist auch der Zusammenhang mit ihren Wirkungen ungeklärt. Diese Fehler unterliegen den Gesetzen des Zufalls und bilden den eigentlichen Gegenstand der »Fehlertheorie.«

Die Fehlertheorie verfolgt zweierlei praktische Ziele: Erstens soll sie Kriterien für die Beurteilung der Genauigkeit und Verlässlichkeit von Messungen geben; zweitens: Rechnungsregeln begründen, die bei überschüssiger Anzahl von Be-

obachtungen die Ausgleichung zwischen den einander widersprechenden Beobachtungsergebnissen bewerkstelligen. Sie bildet die wissenschaftliche Grundlage der »Ausgleichsrechnung.« Die Fehlertheorie hat nicht die Aufgabe die zufälligen Fehler zu beseitigen. Sie kann ihre Wirkung im besten Fall um wenigstens vermindern.

(Fortsetzung folgt.)

Das Aufforderungsverfahren zur grundbücherlichen Darstellung von für das öffentliche Gut erworbenen Grundteilen (Straßen, Wasserlaufanlagen . . .).

Von **Emil Nickerl von Ragenfeld**, k. k. Obergemeter in Graz.

(Fortsetzung.)

Aber wann trifft man überhaupt einen tadellosen alten Katastralmappenstand an? Überlegen wir, daß alte, nicht gebaute, beinahe nie berainte Gemeindegewege im Kleinen sich alle Jahrzehnte etwas geändert durch Wald und Flur schlängeln; bedenken wir dazu noch die Detailrohheit der Mappen, stellenweise auch die Fehlerhaftigkeit der alten Katastralmappen, dann werden wir die Ursachen der meist schlechten Resultate dieser Vorgangsweise klar erkennen; Resultate, ähnlich wie bei der früher erwähnten, nur versuchten Grundeinlöschungsmethode beim Bahnbau südlich Zeltweg.

Diese Ergebnisse werden verwirrend wirken. Die Pläne werden stellenweise Trennflächen von anrainenden Parzellen ausweisen, von denen in der Natur gar kein Grund beansprucht wurde, und umgekehrt; oder auch in Größe und Form der Wirklichkeit zu sehr widersprechen.

Tatsächlich ist die Durchführung solcher Grundablösungspläne, die den rohen alten Stand der Grundbuchsmappen und nicht zuletzt die vor dem Straßeneubau bestandenen Verhältnisse der Natur zur Ausgangsbasis haben, äußerst erschwert.

In Untersteiermark waren die durch einen solchen Fall unangenehm berührten Sassen einer Gemeinde derart aufgebracht, daß endloser Streit und Hader entstand. Sie glaubten, der Gemeindevorstand oder durch die Fehler bezüglich der Grundablösungspreise begünstigte Besitzer hätten den Geometer irreführt.

Treffend kennzeichnet ein sehr erfahrener Landesbauingenieur diese Schwierigkeiten: »Wir bauen die neue Kunststraße oft in einem Jahre. Die dagegen nichtige grundbücherliche Durchführung ist nur mühevoll erst nach Jahren erreicht.« Und eigentlich sind diese durch Jahre sich hinziehenden Schwierigkeiten nichts anderes als ein Kampf gegen die Rohheit und Unzulänglichkeit unserer Grundbuchsmappen: die Grundlage zur zeichnerischen Festlegung und Flächenrechnung kleinerer, schmalstreifiger Grundteile abzugeben.

In den meisten Fällen müssen bei den grundbücherlichen Durchführungen die Folgen dieser Schwierigkeiten, dieser Widersprüche des alten rohen Mappenstandes mit dem faktisch in der Natur bestehenden Stande durch Kniffe bewältigt werden, die zur sonstigen strengen Amtsordnung und Klarheit in seltsamen Gegensatz stehen. Da nämlich die Vertragsobjekte in solchen Ablösungsplänen ganz

ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Bauinspektor S. Wellisch.

Nr. 3.

Wien, 1. März 1916.

XIV. Jahrgang.

Messtechnik und Fehlertheorie.

Von Ing. Dr. Alfred Basch, k. k. Adjunkt der Normal-Eichungs-Kommission in Wien.

(Nach einem am 28. Jänner 1913 im Oesterreichischen Verbands des Vereines deutscher Ingenieure gehaltenen Vortrage.)

(Fortsetzung.)

Es mögen nun an einem einfachen Beispiel die Gesetze des Zufalls studiert und dann durch eine Analogie versucht werden, dieselben auf das Entstehen der zufälligen Fehler anzuwenden. Wir denken uns eine Urne, in der sich in gleicher Anzahl weiße und schwarze Kugeln befinden, die sich weder durch ihr Gewicht noch durch die Oberflächenbeschaffenheit, also durch nichts anderes als durch ihre Farbe unterscheiden. Wird aus dieser Urne eine Ziehung vorgenommen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis »Weiß« eintritt, d. h. daß eine weiße Kugel gezogen wird $\frac{1}{2}$. Die gleiche Wahrscheinlichkeit besteht für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Es mögen nun nach einander s Ziehungen vorgenommen werden, wobei jede gezogene Kugel vor der nächsten Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt wird. Es sind im ganzen $s + 1$ verschiedene Erfolge möglich, je nachdem das Ereignis »Weiß« 0, 1, 2, . . . m . . . s mal eintritt. Allgemein werde die Zahl der gezogenen weißen Kugeln m , die Zahl der gezogenen schwarzen Kugeln n genannt. Es ist dann $m + n = s$. Ein bestimmter durch die Wiederholungszahl m der weißen Ziehungen charakterisierter Erfolg kann durch so viele von einander verschiedene Anordnungen herbeigeführt werden, als man aus s verschiedenen Elementen Gruppen von m verschiedenen Elementen bilden kann. Die Zahl dieser Möglichkeiten ist demnach durch die Kombinationszahl von s Elementen zur Klasse m

$$C_s^{(m)} = \frac{s (s-1) (s-2) \dots (s-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \frac{s!}{m! n!} = C_s^{(n)} \dots \dots (1)$$

gegeben. Die Wahrscheinlichkeit einer jeden beliebigen aber von vorneherein bestimmten Anordnung ist, wie sich aus dem multiplikativen Prinzip der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt,

$$\frac{1}{2^s},$$

dem additiven Prinzip der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge ist die Wahr-

scheinlichkeit des durch die Wiederholungszahl m charakterisierten Erfolges gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der diesen Erfolg herbeiführenden Anordnungen, also

$$P_{m,s} = \frac{s!}{m! n!} \frac{1}{2^s} \dots \dots \dots (2)$$

Bei gerader Versuchszahl besitzt der Erfolg $\frac{s}{2}$, d. h. das Ziehen von gleich viel weißen und schwarzen Kugeln die größte Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$P_{\frac{s}{2}, s} = \frac{s!}{(\frac{s}{2}!)^2} \frac{1}{2^s}, \dots \dots \dots (3)$$

bei ungerader Versuchszahl sind die durch die Wiederholungszahlen $\frac{s+1}{2}$ und $\frac{s-1}{2}$ charakterisierten Erfolge gleich wahrscheinlich und wahrscheinlicher als alle anderen Erfolge. Bei ein und derselben Versuchszahl (s) stehen die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen aufeinanderfolgenden Wiederholungszahlen im Verhältnis der zum Exponenten s gehörigen Binomial-Koeffizienten.

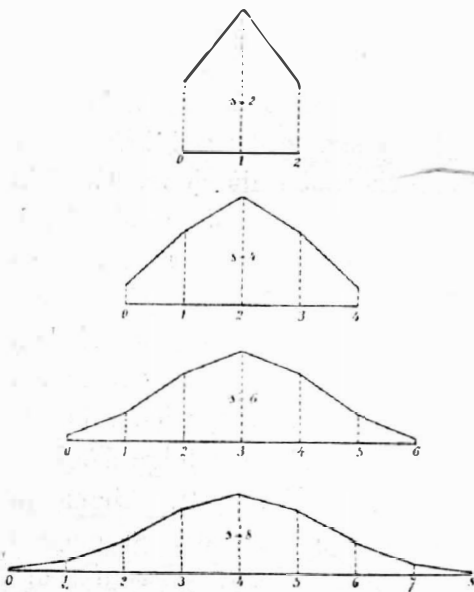


Abb. 1 a.

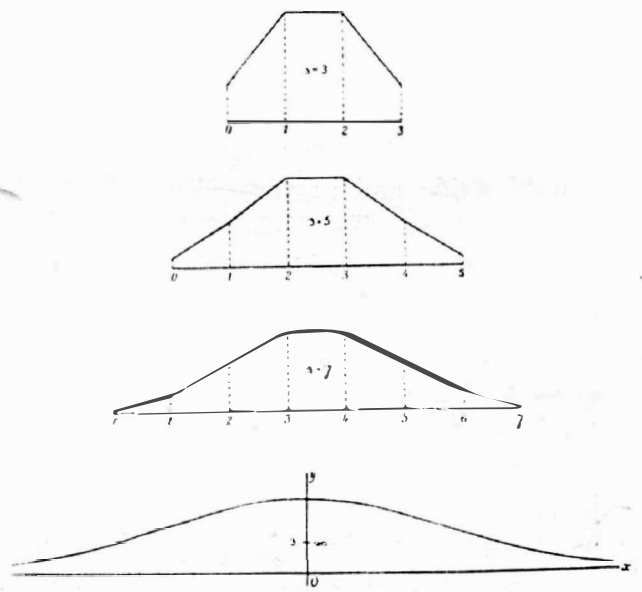


Abb. 1 b.

In Abb. 1 a und b sind in den ersten 7 Figuren die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Erfolge $P_{m,s}$ für die Versuchszahlen 2 bis 8 durch Lote versinnlicht. Die betreffenden Wiederholungszahlen (m) sind bei den Fußpunkten dieser Lote angeschrieben. Die äußersten Fälle, nämlich daß gar keine oder daß lauter weiße Kugeln gezogen werden, besitzen immer die kleinste Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{2^s}$. Die Endpunkte der Lote sind durch Gerade verbunden, die einen Linienzug bilden, der mit größer werdender Versuchszahl immer mehr den Charakter einer Kurve annimmt, die in der letzten Figur dargestellt ist. Die Summe der Lote ist in allen Figuren naturgemäß die Einheit, der Wahrscheinlichkeitstheoretische Ausdruck für die Sicherheit eines Ereignisses.

Nun denke man sich den Fehler einer Beobachtung durch eine unendlich große Anzahl von Elementarfehlerursachen hervorgerufen. Es sei gleich wahrscheinlich, daß jede dieser einzelnen Fehlerursachen einen positiven oder negativen Elementarfehler von der Größe k hervorruft, wobei unter k eine beliebig kleine Größe zu verstehen ist. Die Beziehung zu der früher behandelten Urnenaufgabe ist dadurch gegeben, daß man sich nun an Stelle jeder Ziehung eine Fehlerursache und an Stelle jeder schwarzen Kugel einen negativen Elementarfehler zu denken hat. Der resultierende Fehler der Beobachtung wird dann

$$\varepsilon = (m - n) k. \dots \dots \dots (4)$$

Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von bestimmter Größe hätte keinen Sinn. Dagegen könnte man die Frage aufwerfen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Fehler in dem Intervall zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt. Jedenfalls ist diese Wahrscheinlichkeit geringer als die, daß der Fehler zwischen 0 und $d\varepsilon$ liegt. Bei der früher behandelten Urnenaufgabe war ja auch das Verhältnis

$$V = \frac{P_{m,s}}{P_{\frac{s}{2},s}} = \frac{\left(\frac{s}{2}!\right)^2}{m! n!} < 1, \dots \dots \dots (5)$$

soferne m und n von $\frac{s}{2}$ verschieden waren. In diesem Ausdruck könnte man die Zahl der positiven Elementarfehler m und die Zahl der negativen Elementarfehler n durch die Größe des resultierenden Fehlers ε ausdrücken. Will man aber das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler in einem bestimmten sehr kleinen Intervall um den Wert ε liegt, zu der Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler in dem gleichen sehr kleinen Intervall um den Wert Null liegt, als Funktion des Fehlers ε ausdrücken, der ja jeden beliebigen Wert annehmen kann, so stößt man auf eine mathematische Schwierigkeit, da in dem Ausdrucke für V Permutationszahlen, also Funktionen ganzer Zahlen vorkommen. Diese Schwierigkeit wird mit Hilfe der von John Stirling aufgestellten Formel

$$z! = \Pi(z) = 1. 2. 3. \dots z \doteq z^z e^{-z} \sqrt{2\pi z} \dots \dots \dots (6)$$

überwunden, die eine praktische Methode für die Berechnung der Permutationszahlen großer Argumente liefert und dadurch ermöglicht die Infinitesimalrechnung den Wahrscheinlichkeitsproblemen dienstbar zu machen. Durch Einsetzen der Stirling'schen Formel ergibt sich, wenn man s , das ist die Gesamtzahl der Elementarfehler, als sehr groß ansieht,

$$V = e^{-h^2 \varepsilon^2} \dots \dots \dots (7)$$

Hiebei bedeutet h eine in ihrer Bedeutung noch zu erörternde Konstante.

Zeichnet man die Kurve

$$y = y_0 e^{-h^2 \varepsilon^2}, \dots \dots \dots (8)$$

so stellen die Ordinaten Dichtemaße für das Auftreten von Beobachtungsfehlern bei einer sehr großen Zahl von Beobachtungen dar, keineswegs aber Wahrscheinlichkeiten. Die Kurve wird »Fehlerverteilungskurve« genannt. Erst der Flächenstreifen $y d\varepsilon$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß ein Beobachtungsfehler zwischen die Beträge ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ fällt. Die Gleichung (8) der Fehler-

verteilungskurve wird heute allgemein als das Gauß'sche Fehlerverteilungsgesetz bezeichnet. Es ist dies eine Gleichung, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in deren Sonderzweigen der mathematischen Statistik, der Kollektivmaßelehre, der Fehlertheorie und deren Anwendung im Schießwesen die größte Rolle spielt, die ferner als Maxwell'sches Geschwindigkeitsverteilungsgesetz eines der Fundamente der kinetischen Gastheorie bildet.

Die hier angedeutete Ableitung des Fehlerverteilungsgesetzes wird als die Herleitung aus der »Hypothese der Elementarfehler« bezeichnet und rührt von Hagen*) her. Es wurde vorausgesetzt, daß positive und negative Elementarfehler gleich wahrscheinlich sind. Schon Bessel hat auf Fälle aufmerksam gemacht, in denen diese Voraussetzung nicht zutrifft und in denen daher das Fehlerverteilungsgesetz keineswegs kritiklos hingenommen werden darf. Hier sei nur ein in der technischen Praxis wichtiger Fall erwähnt, bei dem positive und negative Fehler als von wesentlich anderen Ursachen herrührend anderen Gesetzen gehorchen: die Bestimmung von Außen- oder Innendurchmessern von Zylindern.

A. von Obermayer hat einen Apparat zur Veranschaulichung des Fehler-

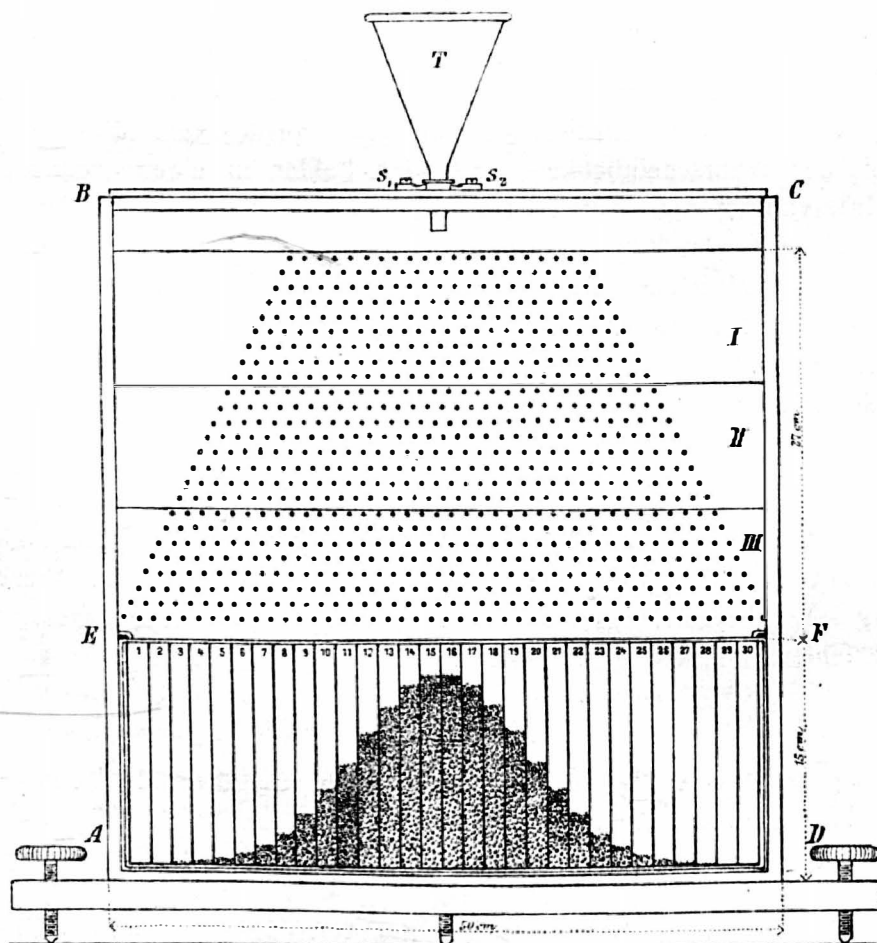


Abb. 2.

*) Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1. Aufl. 1837, 3. Aufl. 1882. Vergl. auch Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

verteilungsgesetzes konstruiert.**) Dieser Apparat (Abb. 2) besteht im Wesentlichen aus einem Rahmen $A B C D$, der als Rückwand im untern Teile eine feste Metallplatte besitzt, während dieselbe im oberen Teile aus drei aufgeschraubten Zinkplatten I, II und III gebildet wird, in welche 825 gleich lange Zinkdrahtstifte in 25 Reihen eingesetzt sind. Die Anordnung ist symmetrisch zur Mitte. Im unteren Teile des Apparates läßt sich ein durch dünne Querwände in 30 Zellen geteiltes Kästchen $E F D A$ einschieben, das ebenso wie der obere Teil des Apparates vorne durch eine Glaswand geschlossen ist. Durch eine Öffnung der oberen Rahmenleiste $B C$ ist ein Trichter T eingeschoben. In diesen Trichter werden Hirsekörner eingegossen, die beim Herabfallen an den Stiften abprallen, dadurch mehr oder minder große Seitenabweichungen erlangen und je nach deren Größe in eine der Zellen des Kästchens fallen. Durch die Drahtstifte sind hier die Elementarfehlerursachen, durch die Abweichungen die Fehler materialisiert. Die größte Zahl von Körnern wird sich in den mittleren Zellen ansammeln; es sind das jene Körner, die angenähert ebenso oft nach der einen wie nach der anderen Seite reflektiert worden sind. In den von der Mitte entfernteren Zellen nimmt die Zahl der angesammelten Körner gleichmäßig ab; in den äußersten Zellen liegen nur mehr einzelne Körner, diejenigen, welche zumeist nach einer Seite reflektiert worden sind. Die Höhen der in den einzelnen Zellen angesammelten Körnergruppen sind den Wahrscheinlichkeiten der in die verschiedenen Zellen fallenden Seitenabweichungen proportional. Das von den niedergefallenen Körnern in ihrer Gesamtheit gebotene Bild (vergl. Abb. 2) ähnelt der Fehlerverteilungskurve.

Es mögen nun in Kürze einige geometrische Eigenschaften der Fehlerverteilungskurve abgeleitet werden, da sich aus ihnen mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in einfacher Weise für die Fehlertheorie wichtige Folgerungen ziehen lassen. Durch Differentiation der Gl. 8 nach ε erhält man die für die Kurvenneigung charakteristische Funktion

$$y' = -2 h^2 \varepsilon y e^{-h^2 \varepsilon^2} = -2 h^2 \varepsilon y \dots \dots \dots (9)$$

Die durch nochmalige Differentiation sich ergebende Gleichung

$$y'' = -2 h^2 (y + \varepsilon y') = -2 h^2 (1 - 2 h^2 \varepsilon^2) \dots \dots \dots (10)$$

läßt erkennen, daß die Kurve in den Abszissen

$$\varepsilon_w = \pm \frac{1}{h \sqrt{2}} \dots \dots \dots (11)$$

(in Abb. 3: OA_0 bezh. OA_0') Wendepunkte besitzt, (W_1 und W_1') in denen die Neigung der Kurve die durch die Tangente des Neigungswinkels

$$y'_w = -2 h^2 \varepsilon_w y_w = -\frac{y_w}{\varepsilon_w} \dots \dots \dots (12)$$

gegebenen Extremwerte annimmt. Mit Hilfe der Gleichung (12) läßt sich in einfacher Weise zeigen, daß das zwischen den beiden Koordinatenachsen liegende

**) A. v. Obermayer, Ein Apparat zur Veranschaulichung des Fehlerverteilungsgesetzes. Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. 1899.

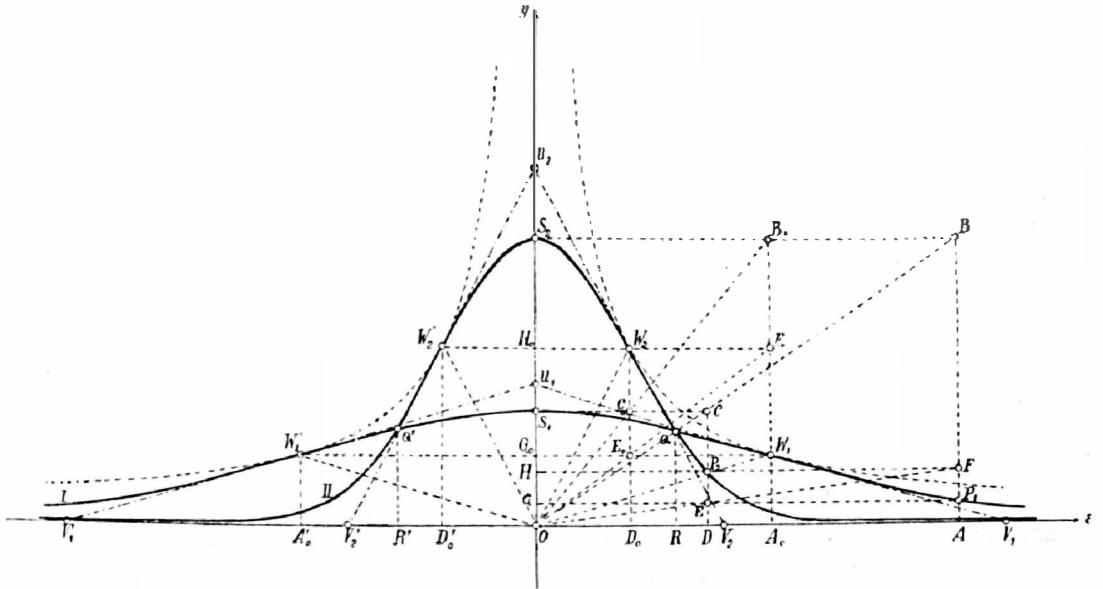


Abb. 3.

Stück einer jeden der beiden Wendepunktstangenten ($U_1 V_1$ bezh. $U_1 V_1'$) durch den betreffenden Wendepunkt W_1 bezh. W_1' halbiert wird. — Die Fehlerverteilungskurve besitzt in der Abszisse $\varepsilon = 0$ die größte Ordinate $y_0 = OS_1$ und nähert sich für $\varepsilon = \pm \infty$ asymptotisch der Abszissenachse.

Die beiden Konstanten in der Gleichung (8) der Fehlerverteilungskurve h und y_0 sind von einander keineswegs unabhängig. Es ist $y d\varepsilon$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler einer Beobachtung zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, $\int_a^b y d\varepsilon$ die Wahrscheinlichkeit, daß er zwischen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ liegt. Für das sichere Ereignis, daß der Beobachtungsfehler zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y d\varepsilon = y_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{y_0}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h\varepsilon)^2} d(h\varepsilon) = \frac{y_0}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1. \quad (13)$$

Laplace hat zuerst gezeigt, daß das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad \dots \dots \dots (14)$$

Somit erhält man

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad \dots \dots \dots (15)$$

und als Gleichung sämtlicher Fehlerverteilungskurven

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}, \quad \dots \dots \dots (16)$$

also die Gleichung einer einfach unendlichen Schar mit dem variablen Parameter h , der für die Genauigkeit der Beobachtungen charakteristisch ist. Liegen zwei

verschiedene Fehlerverteilungen

$$y_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon^2},$$

$$y_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon^2}$$

vor, (wobei $h_2 > h_1$) so besitzen die ihnen entsprechenden Kurven (I und II in Abb. 3) zwei Schnittpunkte (Q und Q') mit den Abszissen

$$\varepsilon_Q = \pm \sqrt{\frac{l h_2 - l h_1}{h_2^2 - h_1^2}} \dots \dots \dots (17)$$

Fehler vom Absolutbetrage $\varepsilon_Q = \overline{OR}$ sind bei beiden Verteilungen gleich wahrscheinlich. Fehler mit kleineren Absolutbeträgen sind bei der Verteilung II, Fehler mit größeren Absolutbeträgen bei der Verteilung I wahrscheinlicher. Fehlerverteilungen, die durch den größeren Parameter h charakterisiert sind, bei denen, wie gezeigt, den kleineren Fehlern die größeren Wahrscheinlichkeiten zukommen, entsprechen den genaueren Beobachtungen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Beobachtungsfehler unterhalb einer bestimmten, beliebig kleinen Grenze liegt ist dem Parameter h direkt proportional. Gauß hat h als das »Genauigkeits- oder Präzisionsmaß« der Beobachtungen bezeichnet.

Es läßt sich leicht eine geometrische Beziehung zwischen allen Fehlerverteilungskurven nachweisen. Ist P_1 (ε_1, y_1) in Abb. 3 ein beliebiger Punkt der Fehlerverteilungskurve I, also

$$y_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon_1^2},$$

und verkleinert man seine Abszisse im Verhältnis

$$\lambda = \frac{h_2}{h_1},$$

während man seine Ordinaten im selben Verhältnis vergrößert, so gelangt man zu einem Punkt P_2 der Fehlerverteilungskurve II, denn es ist

$$y_2 = \lambda y_1 = \frac{\lambda h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\lambda h_1)^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda}\right)^2} = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon_2^2}.$$

Man kann demnach durch eine affine Transformationen um eine der beiden Koordinatenachsen als Affinitätsachse und darauffolgende affine Transformation mit dem reziproken Umwandlungsverhältnis um die andere Koordinatenachse als Affinitätsachse von einer gegebenen Fehlerverteilungskurve zu einer beliebigen anderen gelangen. Aus dieser geometrischen Beziehung folgt auch die ebenfalls wahrscheinlichkeitstheoretisch begründete Flächengleichheit aller Fehlerverteilungskurven.

In Abb. 3 sind $\overline{OS_1}$ und $\overline{OS_2}$ die den Parametern h_1 und h_2 proportionalen Scheitelordinaten der Fehlerverteilungskurven I und II. Die Kurve I liege gezeichnet vor. Ihr beliebiger Punkt P_1 hat die Koordinaten $\varepsilon_1 = \overline{OA}$, $y_1 = \overline{AP_1}$.

Zunächst wird durch Ähnlichkeit der Dreiecke OAB und ODC die Abszisse des P_1 entsprechenden Punktes P_2 die Kurve II $\varepsilon_2 = \overline{OD}$ gewonnen. Die Ordinate $y_2 = \overline{DP_2}$ ergibt sich mit Hilfe der durch die Beziehung $\varepsilon_1 y_1 = \varepsilon_2 y_2$ vorgeschriebenen Rechteckumwandlung, ($OAP_1G = ODP_2H$, konstruktiv als eine Folge der Ähnlichkeit der Dreiecke ODE und AF). In analoger Weise gelangt man von dem Wendepunkte W_1 der Kurve I zum Wendepunkte W_2 der Kurve II durch die Konstruktion A_0 bis H_0 .

Unter Berücksichtigung der Gleichung (11) ergibt sich

$$\varepsilon_w y_w = \varepsilon_w \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_w^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \quad (18)$$

Die Rechteckfläche $\varepsilon_w y_w$ ist somit vom Parameter h unabhängig und für sämtliche Fehlerverteilungskurven von gleicher Größe. Die beiden Wendepunkte sämtlicher Fehlerverteilungskurven liegen daher auf den oberhalb der Abszissenachse befindlichen Ästen von zwei gleichseitigen, in Abb. 3 gestrichelt eingezeichneten Hyperbeln, die gleichzeitig die einhüllende Kurve der gesamten Schar bilden.

Es tritt nun die Frage auf, wie bei wirklich vorgenommenen Beobachtungen die praktische Bestimmung des Präzisionsmaßes h vor sich zu gehen hätte. Es möge zunächst angenommen werden, daß der wahre Wert der zu messenden Größe bereits bekannt ist. Die Messung hätte in diesem Falle nur den Zweck die Genauigkeit der Apparate oder der Meßmethode zu prüfen. (Die Winkelsumme in einem Dreieck stellt eine in aller Strenge bekannte Größe dar, die Summe der drei durch Messung erhaltenen Winkelgrößen wird aber von 180° abweichen. Der Flächeninhalt der kreisförmigen Eichfläche eines Polarplanimeters kann aus dem mit großer Genauigkeit gemessenen Durchmesser gerechnet und dann als bekannt angesehen werden, die Angaben des Planimeters bei mehreren Umfahrungen werden aber in der Regel unter einander und von dem errechneten Werte abweichen.) Naturgemäß kann nur eine endliche Anzahl (n) von Beobachtungen gemacht werden und es wird angestrebt, aus der Verteilung der n Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ der gemachten Beobachtungen auf jene Fehlerverteilung zu schließen, die vorhanden wäre, wenn unendlich viele Beobachtungen angestellt worden wären.

Daß bei der i -ten Beobachtung sich ein Fehler ergab, der zwischen $\varepsilon_i - \frac{\Delta \varepsilon}{2}$ und $\varepsilon_i + \frac{\Delta \varepsilon}{2}$ liegt, (wobei $\Delta \varepsilon$ einen beliebig kleinen Wert bedeutet) ist ein Ereignis von der kleinen Wahrscheinlichkeit

$$\Delta \omega_i = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_i^2} \cdot \Delta \varepsilon \quad (19)$$

Für jede andere Beobachtung läßt sich eine analoge Gleichung aufstellen. Daß die tatsächliche Fehlerverteilung eingetreten ist, kann als Zusammentreffen von n von einander unabhängigen Ereignissen angesehen werden und hat darum dem multiplikativen Prinzip zufolge die Wahrscheinlichkeit

$$\Omega = \Delta \omega_1 \cdot \Delta \omega_2 \cdot \dots \cdot \Delta \omega_1 \cdot \dots \cdot \Delta \omega_n = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^n e^{-h^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2)} (\Delta \varepsilon)_n = \\ = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \Delta \varepsilon \right)^n e^{-h^2 [\varepsilon \varepsilon]} \dots \dots \dots (20)$$

Das Präzisionsmaß h ist die unbekannte konstante Ursache der Ereignisse. Ist uns aber die Ursache eines eingetretenen Ereignisses unbekannt, so sind wir geneigt unter den verschiedenen möglichen Ursachen, diejenige als die wahrscheinlichste anzusehen, welche dem tatsächlich eingetretenen Ereignis die größte Wahrscheinlichkeit verleiht. Es ist daher h derart zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit Ω zu einem Maximum wird, folglich

$$\frac{d}{dh} [h^n e^{-h^2 [\varepsilon \varepsilon]}] = h^{n-1} (n - 2 h^2 [\varepsilon \varepsilon]) e^{-h^2 [\varepsilon \varepsilon]} = 0 \dots \dots (21)$$

Da $h=0$ keinen Sinn hätte, ergibt sich bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Gleichung (11)

$$\frac{1}{2 h^2} = \varepsilon_w^2 \Rightarrow \frac{[\varepsilon \varepsilon]}{n} = \mu^2 \dots \dots \dots (22)$$

und

$$h = \sqrt{\frac{n}{2 [\varepsilon \varepsilon]}} \dots \dots \dots (23)$$

Das mittlere Fehlerquadrat, das mit dem Präzisionsmaß in so einfachem Zusammenhange steht, ist demnach gleich dem Quadrat der Wendepunktsabzisse. Die Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat, also jenen Fehler, der durch die Wendepunktsabzisse dargestellt ist, hat Gauß als den »mittleren Fehler« bezeichnet. Er kann ebenso wie das »Präzisionsmaß« h die Genauigkeit der Beobachtungen charakterisieren; er ist ein »charakteristisches Fehlermaß«, das direkt aus den Fehlern gewonnen werden kann und selbst eine Fehlergröße ist.

Ein anderes bei Empirikern der überaus einfachen Errechnungsmöglichkeit wegen beliebtes »charakteristisches Fehlermaß« ist der sogenannte »durchschnittliche Fehler« (δ), das ist der Durchschnitt aus den Absolutwerten aller Fehler

$$\delta = \frac{1}{n} [|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \dots + |\varepsilon_n|] = \frac{[|\varepsilon|]}{n} \dots \dots \dots (24)$$

Bei einer sehr großen Anzahl von Beobachtungen würde dieser Durchschnitt gegen

$$\delta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon y d\varepsilon}{\int_{-\infty}^{+\infty} y d\varepsilon} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{h \sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu \dots \dots (25)$$

konvergieren. Ein drittes »charakteristisches Fehlermaß« ist der »wahrscheinliche Fehler« (ρ), das ist jener Betrag, der von der gleichen Anzahl von Beobachtungsfehlern dem Absolutwerte nach unter- wie überschritten wird. Bei einer unendlich großen Zahl von Beobachtungen, deren Fehler nach dem Gauß'schen Gesetz verteilt sind, wäre

$$\frac{1}{2} = \int_{-\varrho}^{+\varrho} y \, d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho} e^{-h^2 \varepsilon^2} \, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho h} e^{-t^2} \, dt \dots \dots (26)$$

Hiebei ist

$$h \varepsilon = t \dots \dots \dots (27)$$

gesetzt. Die numerische Auflösung der Gleichung (26) ergibt

$$\varrho h = 0.47694 \dots \dots \dots (28)$$

und daher als »wahrscheinlichen Fehler«

$$\varrho = \frac{0.47694 \dots}{h} \dots \dots \dots (29)$$

In Abb. 4 stellt

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \dots \dots \dots (30)$$

die Fehlerverteilungskurve für das »Präzisionsmaß« $h = 1$ dar. Gezeichnet ist nur der positive Ast der Kurve. Die Wendepunktsabszisse, die gleichzeitig den »mittleren Fehler« darstellt ist $\varepsilon_w = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70711$ und ergibt sich konstruktiv als halbe Diagonale des Quadrats, dessen Seite die Einheit ist, die Ordinate ist $\frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon}} = 0.34220$. Mechanisch interpretiert ist der mittlere Fehler der Trägheitsradius der zwischen der Kurve $\varphi(t)$ und der Abszissenachse eingeschlossenen Fläche in Bezug auf die Ordinatenachse. Der durchschnittliche Fehler (δ) ist die Abszisse des Schwerpunktes S des rechts von der Ordinatenachse liegenden Teiles dieser Fläche. Es ist für $h = 1$, $\delta = y_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.56419$.

(Schluß folgt.)

Das Aufforderungsverfahren

zur grundbücherlichen Darstellung von für das öffentliche Gut erworbenen Grundteilen (Straßen, Wasserlaufanlagen . . .).

Von **Emil Nickerl von Ragenfeld**, k. k. Obergemeter in Graz.

(Schluß.)

Damit sind auch die amtswegigen Ergänzungsarbeiten beschrieben, welche die im zweiten Kapitel besprochenen großmaßstabigen Vertragspläne zur Einzeichnung in die Grundbuchsmappe bringen, soweit solche von Bauämtern oder Zivilgeometern als Urkundenbeilagen zu den Grundbuchsgesuchen in den Fällen verfaßt werden mußten, in welchen die Grundbuchsmappen für die genaue Darstellung kleiner Vertragsobjekte nicht ausreichten.

Die Behandlung solcher Fälle in zwei Anmeldungsbogen, diese Scheidung, ist durchaus nicht im Gegensatze zum Erlaß der Generaldirektion des Grund-

welche Formel »Zerlegung von Zahlen in die Summen von vier Quadraten« in der Zahlentheorie eine große Rolle spielt.

Durch die obigen Ausführungen findet die Behauptung des Spezialisten der Ausgleichsrechnung Helmert⁶⁾ »da man alle Ausgleichsaufgaben in solche nach vermittelnden Beobachtungen umwandeln kann, so läßt sich alles auf das Prinzip des arithmetischen Mittels zurückführen« eine Bestätigung.

Was die praktische Anwendbarkeit anbelangt, so liefert die neue Formel (10), deren Bau, wie übrigens auch aus den Relationen (16) und (17) zu ersehen ist, sehr elegant ist, zumindest eine wertvolle Kontrolle der Berechnung der Unbekannten nach der Gauß'schen Methode.

Für die Algebra und die Zahlentheorie erschließen sie, wie bereits bei der Gleichung (25) angedeutet wurde, eine Reihe von Problemen, deren Gebiet durch Abstrahierung von der Ausgleichsbedingung $[v v] = \text{Min.}$ und Akzeptierung anderer Voraussetzungen, z. B. $[v^p] = \text{Min.}$, beliebig ausgedehnt werden kann.

Messtechnik und Fehlertheorie.

Von Ing. Dr. Alfred Basch, k. k. Adjunkt der Normal-Eichungs-Kommission in Wien.

(Nach einem am 28. Jänner 1913 im Oesterreichischen Verbands des Vereines deutscher Ingenieure gehaltenen Vortrage.)

(Schluß.)

Die Kurve

$$\Phi(t) = 2 \int_0^t \varphi(t) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt \dots \dots (31)$$

stellt die Wahrscheinlichkeiten dar, daß der Absolutwert eines Fehlers unterhalb des Betrages t bleibt. Die Ordinaten dieser Kurve enthalten immer doppelt so viel Längeneinheiten, als Flächeneinheiten unter der Kurve $\varphi(t)$ bis zu dieser Ordinate liegen. Naturgemäß bildet die Gerade $y = 1$ eine Asymptote der Kurve $\Phi(t)$. Die Abszisse des Schnittpunktes der Kurve $\Phi(t)$ und der Geraden $y = \frac{1}{2}$ gibt den »wahrscheinlichen Fehler« $q = 0.47694$.

Zur Kennzeichnung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Stellung der drei Fehlermaße liegt eine Analogie mit Glücksspielen nahe. Die Bedeutung des »wahrscheinlichen Fehlers« q ist leicht verständlich. Man kann 1:1 wetten daß sein Betrag von dem Absolutwerte eines Beobachtungsfehlers unter- oder überschritten wird. Bestimmt man ihn aber direkt aus der Fehlerreihe als »zentralen Wert«, so ist der erhaltene Betrag zu sehr von den zufälligen Werten der ihrer absoluten Größe nach in der Mitte liegenden Fehler abhängig. Der Begriff des »wahrscheinlichen Fehlers« wurde zuerst 1815 von Bessel aufgestellt. Als Genauigkeitskriterium erfreute er sich weder bei Theoretikern noch bei Praktikern großer Beliebtheit; wünschte ihn ja schon Gauß aus der Fehlertheorie und Aus-

⁶⁾ Ausgleichsrechnung S. 102.

gleichungsrechnung völlig verbannt zu wissen. Wellisch*) hat dieses so arg vernachlässigte Fehlermaß wieder zu Ehren gebracht.

Der »durchschnittliche Fehler« δ ist der Fehler von mittlerem Hoffungswert. Der von den Glücksspielen übernommene Begriff des »Hoffungswertes« kann am besten durch das folgende Beispiel erklärt werden: In einer Lotterie mit 1000 Nummern werde eine Nummer gezogen. Der Besitzer dieser Nummer soll den Preis $A = 5000$ Kronen erhalten. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer bestimmten Nummer ist in diesem Fall $p = \frac{1}{1000}$. Als Hoffungswert einer Nummer wird dann das Produkt $H = p A = \frac{1}{1000} \cdot 5000 = 5$ Kronen bezeichnet. Es ist dies gleichzeitig der Einsatz, der gerechter Weise für das Erstehen der Gewinnhoffnung zu zahlen wäre. Als Hoffungswert eines Fehlers ist analog das Produkt εy aus seinem Absolutwert ε und dem Wahrscheinlichkeitsmaß y seines Eintreffens anzusehen.

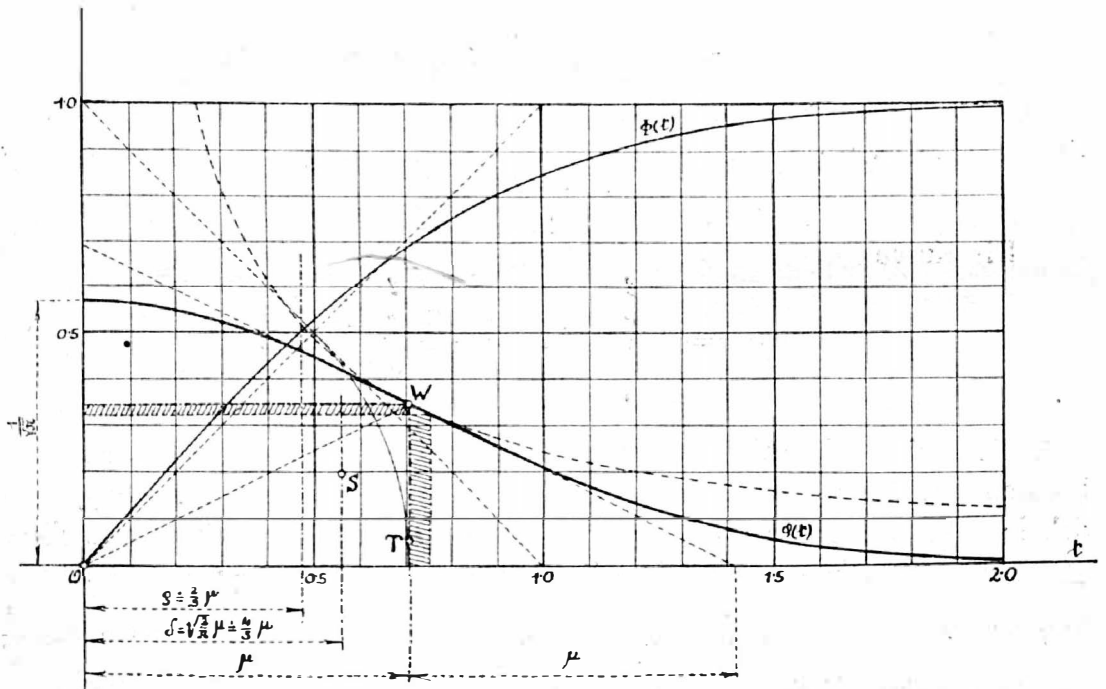


Abb. 4.

Der mittlere Fehler ist der Fehler von maximalem Hoffungswert.**) Es wurde gezeigt, daß der Differentialquotient y' dem Produkt εy proportional ist. (Siehe Gleichung 9.) Es muß daher der durch dieses Rechteck dargestellte Hoffungswert an derjenigen Stelle seinen Größtwert besitzen an der die Fehlerverteilungskurve am steilsten ist, also dort, wo der Wendepunkt (W) liegt. Dies ist auch aus Abb. 4 leicht zu ersehen. Die beiden schraffierten Flächenstreifen, welche die Zunahme beziehungsweise die Abnahme des Rechteckes εy bei einem kleinen Abszissenzuwachs an dieser Stelle darstellen, sind einander gleich, was

*) Wellisch, Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung. Wien und Leipzig 1909.

**) Wellisch, Über den mittleren Fehler. Zeitschrift für Vermessungswesen. 1909. S. 176 f.

sich geometrisch leicht nachweisen ließe. Die eingezeichnete gleichseitige Hyperbel, die den Ort der vierten Eckpunkte flächengleicher Rechtecke bildet, berührt die Fehlerverteilungskurve im Wendepunkt.

Nehmen wir an, es wäre eine gut definierte Strecke zu messen und es liegen bereits sehr viele Beobachtungen vor. Es soll nun noch eine Beobachtung gemacht werden und es setzt jemand einen Preis für das richtige Erraten des Fehlers dieser Beobachtung aus, natürlich bis auf eine Toleranz, die aber, was wesentlich ist, für alle Fehlerbeträge die gleiche sein muß. Dann wird es jedenfalls am vorteilhaftesten sein auf den Fehler »Null« zu wetten, denn dieser hat ja die größte Wahrscheinlichkeit. Nun werde das Spiel aber anders eingerichtet. Der Unternehmer möge für das richtige Erraten so viel Kronen anbieten als der Fehler der anzustellenden Beobachtung $\frac{1}{100000}$ mmm betragen wird. Der Fehler »Null« hat wohl die größte Wahrscheinlichkeit aber er trägt keinen Preis ein. Ein unendlich großer Fehler besitzt eine unendlich kleine Wahrscheinlichkeit und zwar ist diese von der Kleinheitsordnung ∞^2 . Sein Hoffnungswert ist demnach $0 \cdot \infty^2$. Am vorteilhaftesten wird es sein auf den mittleren Fehler zu wetten, der den größten Hoffnungswert besitzt. Bei sehr großer Zahl der Beobachtungen tragen auch die Fehler, deren Größe in der Nähe des mittleren Fehlers liegen am meisten zur Ungenauigkeit der Messung bei.

Die bisherigen Betrachtungen hatten insofern etwas theoretisches an sich, als die Kenntnis des wahren Wertes der zu messenden Größe bereits vorausgesetzt wurde. Dies trifft aber nur in den allerseltensten Fällen zu, da die Messung ja gewöhnlich den Zweck verfolgt, den Wert der unbekanntem Größe festzustellen. Ihr wahrer Wert wird allerdings niemals zu ermitteln sein. Liegen n von einander unabhängige Bestimmungen l_1, l_2, \dots, l_n vor, so ist, sofern wir von vorneherein zu jeder einzelnen dieser Bestimmungen das gleiche Vertrauen haben, das arithmetische Mittel der zweckmäßigste Wert, der der unbekanntem Größe zugeschrieben werden kann. Das ist eine alte Regel, die schon lange bekannt war, ehe noch fehlertheoretische, auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung basierende Betrachtungen angestellt wurden. Sie ist in verallgemeinerter Form 1709 bei Cotes, 1755 bei Simpson, 1760 bei Lambert feststellbar, während die erste fehlertheoretische Untersuchung erst 1773 von Lagrange angestellt wurde. Legendre spricht 1805 diese Regel als ein in der Praxis lange übliches und bewährtes Prinzip an und selbst Gauß bezeichnet sie als ein Axiom. Czuber sagt 1891 in seiner »Theorie der Beobachtungsfehler«, daß die Regel vom arithmetischen Mittel seit jeher als eine unanfechtbare Eingebung des menschlichen Verstandes gegolten hat. Man kann es geradezu der auf der Fehlertheorie basierenden Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ansehen, daß sie mit der Regel des arithmetischen Mittels im Einklang steht. Die Methode der kleinsten Quadrate stellt die Erweiterung der Regel vom arithmetischen Mittel dar.

Zwischen dem wahren Werte A der zu bestimmenden Größe und ihrem zweckmäßigsten oder wahrscheinlichsten Werte

$$a = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \dots \dots \dots (32)$$

besteht ein Unterschied

$$\xi = A - a, \dots \dots \dots (33)$$

der sogenannte »Fehler des arithmetischen Mittels«, der unbestimmt ist und unbestimmbar bleibt, über dessen Größe wir aber doch Vermutungen anstellen möchten. Es muß jetzt zwischen den wahren und scheinbaren Fehlern der einzelnen Beobachtungen unterschieden werden. So ist z. B. der wahre Fehler der i -ten Beobachtung

$$\varepsilon_i = A - l_i, \dots \dots \dots (34)$$

der scheinbare Fehler

$$v_i = a - l_i, \dots \dots \dots (35)$$

Die Genauigkeit der einzelnen Beobachtung ist wie früher gezeigt wurde von der Quadratsumme der wahren Fehler abhängig. Nun ist

$$\varepsilon_i = v_i + \xi \dots \dots \dots (36)$$

und da die Summe der scheinbaren Fehler

$$[v] = 0, \dots \dots \dots (37)$$

so ist

$$[\varepsilon] = n \xi \dots \dots \dots (38)$$

und

$$[\varepsilon \varepsilon] = [v v] + n \xi^2 \dots \dots \dots (39)$$

Berücksichtigt man die zuletzt gewonnene Beziehung, so erhält man nach Gl. (20) als Wahrscheinlichkeit der tatsächlich eingetroffenen Fehlerverteilung

$$\Omega = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} d\varepsilon \right)^n e^{-h^2[\varepsilon \varepsilon]} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} dv \right)^n e^{-h^2[v v]} \cdot e^{-n h^2 \xi^2}, \dots \dots (40)$$

soferne der wahre Wert der zu messenden Größe A , daher auch ξ als bekannt vorausgesetzt wird. Da aber A vollständig unbekannt ist, ξ daher, wenigstens theoretisch alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann, ist die Wahrscheinlichkeit des tatsächlich eingetroffenen Systems der scheinbaren Fehler dem additiven Prinzip zufolge

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega d\xi = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} dv \right)^n e^{-h^2[v v]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n h^2 \xi^2} d\xi = \frac{(d\varepsilon)^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^{n-1} e^{-h^2[v v]} \quad (41)$$

Wieder ist dem Genauigkeitsmaß h als Ursache der Fehlerverteilung jener Wert zuzuschreiben, der die Wahrscheinlichkeit P des tatsächlich eingetretenen Ereignisses zu einem Maximum macht. Daher ist

$$\frac{d}{dh} \left[h^{n-1} e^{-h^2[v v]} \right] = h^{n-2} \{ (n-1) - 2 h^2 [v v] \} e^{-h^2[v v]} = 0, \dots (42)$$

folglich bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Gl. (22) der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung

$$u = \frac{[\varepsilon \varepsilon]}{n} = \frac{1}{2 h^2} = \frac{[v v]}{n-1} \dots \dots \dots (43)$$

Der so gefundene Wert ist von der Zahl der Beobachtungen unabhängig; er bezieht sich auf die Genauigkeit des verwendeten Apparates, beziehungsweise der verwendeten Methode.

Die praktische Meßtechnik verlangt aber mehr als Kriterien der Genauigkeit des Apparates, sie verlangt ein Kriterium für die Genauigkeit der ganzen Arbeit, also des Messungsergebnisses. Nun ist aus Gleichung (40) zu ersehen, daß bei gegebenem System der scheinbaren Fehler die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Fehler ξ des arithmetischen Mittels durch die Gleichung

$$\Omega = k e^{-n h^2 \xi^2} = k e^{-H^2 \xi^2} \dots \dots \dots (44)$$

gegeben ist. Es ist demnach das Genauigkeitsmaß dieser Fehlerverteilung

$$H = h \sqrt{n}$$

und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v v]}{n(n-1)}} \dots \dots \dots (46)$$

Dieser Fehler, der ein Zeichen für den Grad der Verlässlichkeit des Messungsergebnisses bildet, soll immer mit dem Messungsergebnisse angegeben werden.

Es sei noch kurz eine Frage gestreift, die sicher an jeden, der sich mit Messungen befaßt, oftmals herangetreten ist. Das ist die Frage, ob und unter welchen Umständen man berechtigt ist, bei einer Messung Beobachtungen, die von dem arithmetischen Mittel sämtlicher Beobachtungen stark abweichen, auszuschließen. Im Schießwesen wird die analoge Frage als die »Theorie der Ausreißer« bezeichnet. Die Ansicht über die Berechtigung der Ausschließung einer Beobachtung einzig wegen des zu hohen Betrages ihrer Abweichung vom Mittel, hat im Laufe der Zeit sehr gewechselt.*)

Hagen sagt 1837: »Die Täuschung, die man durch Verschweigen von Messungen begeht, läßt sich ebensowenig entschuldigen, als wenn man Messungen fälschen oder fingieren wollte.«

In dem Bericht über die Gradmessung in Ostpreußen erklären Bessel und Baeyer 1838: »Wir haben jede gemachte Beobachtung, und zwar alle mit gleichem Gewichte, zu dem Resultate stimmen lassen, ohne das etwaige Zusammentreffen ungünstigerer Umstände mit der stärkeren Abweichung einer Beobachtung als einen Grund zu ihrer Ausschließung gelten zu lassen. Wir haben geglaubt nur durch die feste Beobachtung dieser Regel Willkür aus unseren Resultaten entfernen zu können.«

Hingegen spricht Bertrand 1888 die Meinung aus, daß »die Unterdrückung der als schlecht bezeichneten Beobachtungen die Zuverlässigkeit der Resultate um so mehr erhöhen wird, je mehr Beobachtungen man ausschließen wird«, und Czuber sagt in seiner »Theorie der Beobachtungsfehler«, 1891: »Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Ausschließung solcher Beobachtungen, deren Abweichung vom arithmetischen Mittel dem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze überschreitet und die vermutlich oder höchst wahrscheinlich minder gut sind, die Genauigkeit des Resultats erhöhen müßte, und zwar in um so höherem Grade, je enger man jene Grenzen zöge.«

Tatsächlich wurden schon vielfach Regeln für die Bedingungen, unter denen

*) Vergl. Wellisch, Theoretische und historische Betrachtungen über die Ausgleichsrechnung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen. 1907.

Beobachtungen auszuscheiden sind, »Ausreißerregeln« aufgestellt. Auch diese Regeln basieren auf dem Gauß'schen Fehlerverteilungsgesetze. Daß verschiedenartige Regeln nebeneinander bestehen zeigt schon, daß dieses eigenartige Problem einer befriedigenden Lösung bisher nicht zugeführt werden konnte. Hier mögen nur zwei der einfachsten dieser Ausscheidungsverfahren an der Hand von Figuren erläutert werden. Bei beiden Verfahren ist zunächst das Genauigkeitsmaß h oder der mittlere Fehler μ aus den Abweichungen sämtlicher Beobachtungen zu rechnen. Dadurch ist dann die Verteilung der Abweichungen der Beobachtungen gegen das Mittel aus allen Beobachtungen für sehr große Beobachtungszahlen gegeben und man kann die Kurve

$$\Phi(hv) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{-hv}^{+hv} e^{-h^2 v^2} dv \dots \dots \dots (47)$$

zeichnen. Zu diesem Zwecke wären bloß die Abszissen der einzelnen Punkte der Kurve $\Phi(t)$ in Abb. 4 bei ungeänderter Ordinate mit $\frac{1}{h}$ zu multiplizieren. Die Ordinate eines jeden Kurvenpunktes wäre, sofern unendlich viele Beobachtungen vorlägen, das Verhältnis der Zahl jener Beobachtungen, deren Abweichung von

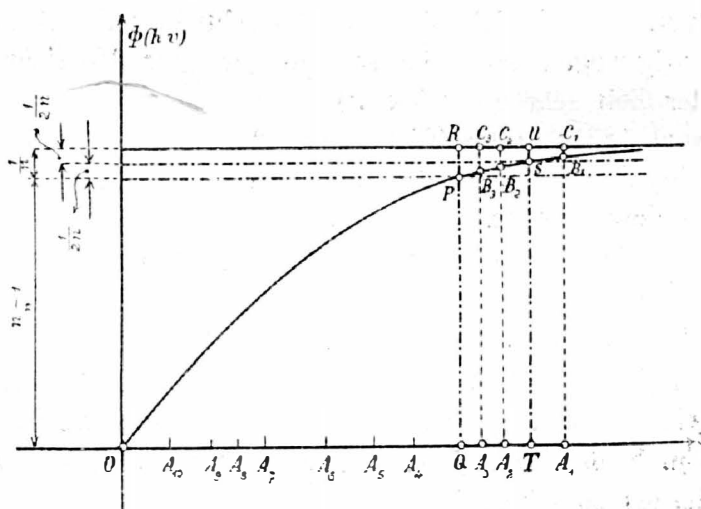


Abb. 5.

dem Mittel aller Beobachtungen kleiner ist als die Abszisse v des Punktes, zu der Gesamtzahl der Beobachtungen. Wird, sofern n Beobachtungen vorliegen, im Abstände $\frac{n-1}{n}$ eine Parallele zur Abszissenachse gezogen, die die Kurve $\Phi(hv)$ im Punkte P (Abb. 5) schneidet, so sollte bei einer dem Gauß'schen Gesetz entsprechenden Verteilung der Abweichungen nur eine einzige Beobachtung eine Abweichung vom Mittel besitzen, die größer ist als die Abszisse OQ des Punktes P . Besitzen in Wirklichkeit mehr als eine Beobachtung größere Abweichungen, so sind sie nach Mazzuoli mit Ausnahme jener unter ihnen, die die kleinste Abweichung besitzt, auszuscheiden. Auf die übrig bleibenden Beobachtungen wäre dasselbe Verfahren nach neuerlicher Berechnung des Genauigkeits-

maßes abermals anzuwenden; dieser Vorgang wäre eventuell so lange zu wiederholen bis keine Beobachtung mehr nach der gekennzeichneten Regel auszuscheiden ist.*)

Chauvenet hält einen in gewissem Sinne entgegengesetzten Vorgang ein. Wird die größte Abweichung betrachtet, so sollte sie bei einer dem Gauß'schen Gesetz entsprechenden Verteilung derart liegen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten noch größerer Abweichungen $\frac{1}{2n}$, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten kleinerer Abweichungen $1 - \frac{1}{2n}$ beträgt.**) Ist OA_1 die größte Abweichung, so ist durch A_1 eine Parallele zur Ordinatenachse zu ziehen, die die Kurve $\Phi(hv)$ in B_1 , ihre Asymptote in C_1 schneidet. Ist nun $B_1 C_1 < \frac{1}{2n} = US$, so ist die Beobachtung mit der Abweichung OA_1 auszuschneiden. Auch das Chauvenet'sche Verfahren wäre nach neuerlicher Berechnung des Genauigkeitsmaßes fortgesetzt auf die übrigbleibenden Beobachtungen anzuwenden. Sind in Abb. 5 $OA_1, OA_2, OA_3 \dots$ die Abweichungen der Beobachtungen »1«, »2«, »3« ..., so wäre nach dem Verfahren von Chauvenet nur »1« im ersten Gange auszuschneiden. Nach dem Verfahren von Mazzuoli würde hingegen außer der Beobachtung »1« noch die Beobachtung »2« gleich im ersten Gange auszuschneiden sein, die bei dem Chauvenet'schen Verfahren möglicherweise im zweiten Gange fallen würde. Das Verfahren von Mazzuoli ist daher jedenfalls das schneller zum Ziele führende; in den meisten Fällen erweist es sich auch als das strengere. Beide Ausscheidungsmethoden sind insofern einigermaßen willkürlich, als das eine einzig jenes äußerste Gebiet betrachtet, in dem eine und nur eine Abweichung liegen sollte, das andere hingegen einzig und allein der größten Abweichung ihr Augenmerk zuwendet. Immerhin bilden diese Verfahren oftmals Mittel die Genauigkeit der Resultate zu verschärfen.

In den vorliegenden Betrachtungen wurde nur eine Seite der Anwendung der Fehlertheorie in der Meßtechnik besprochen, die Anwendung bei direkten Messungen. Sie liefert hier die Kriterien für die Genauigkeit der verwendeten Apparate und der erzielten Ergebnisse. Bei Anwendung von Ausscheidungsregeln vermag sie die Genauigkeit der erzielten Ergebnisse auch um Weniges zu steigern. Der Hauptwert der Fehlertheorie für die Meßtechnik liegt aber darin, daß sie die wissenschaftliche Grundlage jenes Rechenverfahrens bildet, das bei überschüssiger Zahl indirekter Beobachtungen angewendet werden muß, um die Widersprüche zwischen den Ergebnissen der einzelnen Beobachtungen zu beseitigen. Dieses Verfahren ist die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die vor nicht viel mehr als einem Jahrhundert von Gauß erfunden wurde und heute einen eigenen Zweig der angewandten Mathematik bildet.

*) Vergl. Czuber, Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung. 1899. Wellisch, Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung. Wien und Leipzig, 1909. Cranz, Lehrbuch der Ballistik. Leipzig, 1910.

**) Vergl. ebenfalls Czuber, Wellisch, Cranz.