Beitrag zur Ausgleichungsrechnung

H. Barvik [1]

[1] *k. k. Bergkommissär in Brünn*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **14** (4), S. 49–53

1916

BibTEX:

```
@ARTICLE{Barvik_VGI_191604,
Title =  {Beitrag zur Ausgleichungsrechnung},
Author =  {Barvik, H.},
Journal =  {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages =  {49--53},
Number =  {4},
Year =  {1916},
Volume =  {14}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Baurat S. Wellisch.

Nr. 4. **Wien, 1. April 1916.** **XIV. Jahrgang.**

Beitrag zur Ausgleichungsrechnung.

Von **Ing. Dr. H. Barvík, k. k.** Bergkommissär in Brünn.

Die natürlichste Grundlage der Ausgleichung von Beobachtungsgrößen, welche mit unvermeidlichen Fehlern behaftet sind, bildet das arithmetische Mittel. Jordan behauptet aber, daß das arithmetische Mittel nur zur Ausgleichung von Beobachtungen einer Unbekannten genüge und ein allgemeineres Ausgleichungsprinzip gesucht werden müsse, wenn zur gleichzeitigen Bestimmung mehrerer Unbekannten Beobachtungen in überschüssiger Zahl vorhanden sind.[1]) Hiebei ist an die vermittelnden Beobachtungen in erster Linie gedacht. Da sowohl der Markscheider als auch der bergbehördliche Beamte, welcher anläßlich der Freifahrungen das Vermessungsoperat des ersteren zu überprüfen hat, mit der Ausgleichungsrechnung vertraut sein müssen, dürfte es statthaft sein, an dieser Stelle die Behauptung des berühmten Geodäten näher in Betracht zu ziehen.

Den vermittelnden Beobachtungen[2]) kann man bekanntlich die mathemathische Form:

$$F(x, y, z \ldots a, b, c \ldots) = o \quad \ldots \ldots (1)$$

verleihen, worin die Argumente $a, b, c \ldots$ fehlerfrei sind, $x, y, z, \ldots$ zu bestimmende Größen und o die mit unvermeidlichen Fehlern behaftete Beobachtungsgröße darstellen. Mit Hilfe des Taylor'schen Lehrsatzes gewinnt man aus Gleichung (1) bei Annahme von r-Beobachtungen und n-Unbekannten (x_j) das nachstehende System linearer Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^{j=n} (a_{ij}\, x_j) = o_i\,, \; (i = 1, 2, 3 \ldots r), \quad \ldots \ldots (2)$$

worin statt $a, b, c \ldots$ die Argumente (a_{ij}) eingeführt werden. Von den Fehlergleichungen

$$\sum_{j=i}^{j=n} (a_{ij}\, x_j) - o_i = v_i\,, \; (i = 1, 2, 3 \ldots r) \quad \ldots \ldots (3)$$

gelangt man durch die Annahme $[v\,v] =$ Min. nach einfacher Rechnung zu den Normalgleichungen:

[1]) Handbuch der Vermessungskunde von Dr. Jordan, bearb. von Eggert, 1910, I. Bd., S. 41.
[2]) Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie von Hartner-Doležal, 1910, S. 50 ff.

$$\sum_{j=i}^{j=n}([a_i a_j]\, x_j) = [a_i\, o]\;,\; (i = 1, 2, 3 \ldots r) \quad \ldots \ldots (4)$$

oder entwickelt:

$$\left.\begin{array}{l} [a_1 a_1]\, x_1 + [a_1 a_2]\, x_2 + \ldots + [a_1 a_n]\, x_n = [a_1\, o] \\ [a_2 a_1]\, x_1 + [a_2 a_2]\, x_2 + \ldots + [a_2 a_n]\, x_n = [a_2\, o] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a_n a_1]\, x_1 + [a_n a_2]\, x_2 + \ldots + [a_n a_n]\, x_n = [a_n\, o] \end{array}\right\} , \ldots (5)$$

deren Auflösung die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ in der Form:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

liefert.

Durch die Annahme $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$. erhält man einen speziellen Fall des Systems (2), Relationen mit nur einer Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 = o_1 \\ a_{21}\, x_1 = o_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{r1}\, x_1 = o_r \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Jordan lehrt nun, daß die Ausgleichung dieses Systems mit einer Unbekannten auch mit Hilfe des arithmetischen Mittels bewerkstelligt werden kann[3])[4]), und gelangt zu dem Ergebnis:

$$x_1 = \frac{a_{11}\, o_1 + a_{21}\, o_2 + \ldots + a_{r1}\, o_r}{a_{11}^2 + a_{21}^2 + \ldots + a_{r1}^2} \quad \ldots\ldots (8)$$

Es soll nun gezeigt werden, daß auf diesen speziellen Fall (7) das allgemeine System (2) zurückgeführt werden kann.

Denn hat man n-Unbekannte und $r > n$-Gleichungen, wie dies beim System (2) zutrifft, so läßt sich dieses System in $\binom{r}{n}$-Gruppen von n-Gleichungen gliedern und jede dieser Gruppen liefert einen Wert für die Unbekannte (x_i). Man erhält demnach für diese Unbekannte $\binom{r}{n}$-Werte, nämlich:

$$x_i = \frac{\Delta_1^{(i)}}{\Delta_1},\; x_i = \frac{\Delta_2^{(i)}}{\Delta_2},\; \ldots,\; x_i = \frac{\Delta_{\binom{r}{n}}^{(i)}}{\Delta_{\binom{r}{n}}} \quad \ldots\ldots (9)$$

Die Nenner erscheinen, wie man sich leicht überzeugen kann, als Funktionen der Argumente, sind sonach fehlerfrei; während die Zähler auch die Beobachtungsgrößen enthalten und infolge dessen mit Fehlern behaftet sind. Das ist aber die charakteristische Eigenschaft des Systems (7). Man kann somit ohne weiteres ansetzen:

$$x_i = \frac{\Delta_1^{(i)}\,\Delta_1 + \Delta_2^{(i)}\,\Delta_2 + \ldots + \Delta_{\binom{r}{n}}^{(i)}\,\Delta_{\binom{r}{n}}}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_{\binom{r}{n}}^2} \quad \ldots (10)$$

---

[3]) a. a. O. S. 45.

[4]) Die Ausgleichungsrechnung von Helmert, 1907, S. 87.

Damit ist aber das allgemeine System mit m e h r e r e n Unbekannten (2) mit Hilfe des Systems (7), also unter Zugrundelegung d e s a r i t h m e t i s c h e n M i t t e l s gelöst, o h n e e i n a l l g e m e i n e r e s A u s g l e i c h u n g s p r i n z i p s u c h e n z u m ü s s e n.*)

Die Durchführung des f o r m e l l e n Beweises der Identität der Relationen (10) mit jener von G a u ß (6) erfordert die Entfaltung eines komplizierten mathematischen Apparates, weshalb an dieser Stelle von derselben Abstand genommen wird. Desgleichen läßt sich beweisen, daß zwischen den Determinenten die merkwürdigen Relationen:

$$D = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdot \; + \Delta^2_{\binom{r}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

und

$$D_i = \Delta_1^{(i)} \Delta_1 + \Delta_2^{(i)} \Delta_2 + \cdot \; \cdot + \Delta^{(i)}_{\binom{r}{n}} \Delta_{\binom{r}{n}} \quad \ldots\ldots (12)$$

bestehen.

Zur Veranschaulichung der obigen Deduktionen wähle man einen Sonderfall: Für $n = 2$ und $r = 3$ geht das System (2) über in:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 &= o_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 &= o_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 &= o_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Der allgemein übliche Vorgang bei der Ausgleichung liefert für die Unbekannten in Gemäßheit der Beziehung (6) die expliziten Ausdrücke:

$$x_1 = \frac{(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2)(a_{11}\, o_1 + a_{21}\, o_2 + a_{31}\, o_3) - (a_{11}\, a_{12} + a_{21}\, a_{22} + a_{31}\, a_{32})(a_{12}\, o_1 + a_{22}\, o_2 + a_{32}\, o_3)}{[(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) - (a_{11}\, a_{12} + a_{21}\, a_{22} + a_{31}\, a_{32})^2] = D} \quad (14)$$

$$x_2 = \frac{(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2)(a_{12}\, o_1 + a_{22}\, o_2 + a_{32}\, o_3) - (a_{11}\, a_{12} + a_{21}\, a_{22} + a_{31}\, a_{32})(a_{11}\, o_1 + a_{21}\, o_2 + a_{31}\, o_3)}{D} \quad (15)$$

durch Applikation auf die Beziehung (9) ergibt sich anderseits:

$$x_1 = \frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta_1} = \frac{a_{22}\, o_1 - a_{12}\, o_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}}, \quad x_1 = \frac{\Delta_2^{(1)}}{\Delta_2} = \frac{a_{32}\, o_2 - a_{22}\, o_3}{a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}},$$

$$x_1 = \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_3} = \frac{a_{12}\, o_3 - a_{32}\, o_1}{a_{31}\, a_{12} - a_{11}\, a_{32}}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_1^{(2)}}{\Delta_1} = -\frac{a_{21}\, o_1 - a_{11}\, o_2}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2^{(2)}}{\Delta_2} = -\frac{a_{31}\, o_2 - a_{22}\, o_3}{a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta_3} = -\frac{a_{11}\, o_3 - a_{31}\, o_1}{a_{31}\, a_{12} - a_{11}\, a_{32}}$$

und schließlich gemäß Gleichung (10) die Gleichungen (16) und (17):

$$x_1 = \frac{(a_{22}\, o_1 - a_{12}\, o_2)(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}) + (a_{32}\, o_2 - a_{22}\, o_3)(a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}) + (a_{12}\, o_3 - a_{32}\, o_1)(a_{31}\, a_{12} - a_{11}\, a_{32})}{(a_{11}\, a_{22} - o_{21}\, a_{12})^2 + (a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22})^2 + (a_{31}\, a_{12} - a_{11}\, a_{32})^2}$$

$$x_2 = \frac{(a_{11}\, o_2 - a_{21}\, o_1)(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}) + (a_{21}\, o_3 - a_{31}\, o_2)(a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}) + (a_{31}\, o_1 - a_{11}\, o_3)(a_{31}\, a_{12} - a_{11}\, a_{32})}{(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})^2 + (a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22})^2 + \cdot\cdot + (a_{31}\, a_{12} - a_{11}\, a_{32})^2}$$

---

5) Vergleiche die in Determinantenform gebrachte allgemeine Behandlung dieser Aufgabe von J a c o b i in Crelles Journal 1841 und ihre Lösung von W e l l i s c h in «Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung» 1910, II. Bd., § 12.

Die Ausdrücke (14) und (16) resp. (15) und (17) sind identisch. Von dieser Identität kann man sich durch entsprechende Gleichsetzung überzeugen. Der Identitätsbeweis läßt sich aber auf eine interessante Weise, wobei die Verbesserungsverhältnisse in den Vordergrund treten, durchführen.

Die Fehlergleichungen des Systems (13) lauten:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 - o_1 = v_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 - o_2 = v_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 - o_3 = v_3 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Die aus der Gauß'schen Minimumbedingung $[v\,v] =$ Min. sich ergebenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 - o_1) + a_{21}(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - o_2) + a_{31}(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 - o_3) = 0 \\ a_{12}(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 - o_1) + a_{22}(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 - o_2) + a_{32}(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 - o_3) = 0 \end{array}\right\} (19)$$

gehen unter Berücksichtigung der Relationen (18) über in:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, v_1 + a_{21}\, v_2 + a_{31}\, v_3 = 0 \\ a_{12}\, v_1 + a_{22}\, v_2 + a_{32}\, v_3 = 0 \end{array}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

woraus sich ergibt:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{v_1}{v_3} = \dfrac{a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}} \\[2ex] \dfrac{v_2}{v_3} = \dfrac{a_{31}\, a_{12} - a_{32}\, a_{11}}{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Anderseits erhält man aus den Relationen (18) durch Division der ersten, resp. zweiten Gleichung durch die dritte und Umstellung:

$$\left.\begin{array}{l} \left(a_{11} - a_{31}\dfrac{v_1}{v_3}\right) x_1 + \left(a_{12} - a_{32}\dfrac{v_1}{v_3}\right) x_2 = o_1 - o_3\dfrac{v_1}{v_3} \\[2ex] \left(a_{21} - a_{31}\dfrac{v_2}{v_3}\right) x_1 + \left(a_{22} - a_{32}\dfrac{v_2}{v_3}\right) x_2 = o_2 - o_3\dfrac{v_2}{v_3} \end{array}\right\}, \; . \quad (22)$$

woraus sich die Unbekannten mit:

$$x_1 = \frac{(o_1\, a_{22} - o_2\, a_{12}) + (o_2\, a_{32} - o_3\, a_{22})\dfrac{v_1}{v_3} + (o_3\, a_{12} - o_1\, a_{32})\dfrac{v_2}{v_3}}{(a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}) + (a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31})\dfrac{v_1}{v_3} + (a_{31}\, a_{12} - a_{32}\, a_{11})\dfrac{v_2}{v_3}} \quad (23)$$

$$x_2 = \frac{(o_2\, a_{11} - o_1\, a_{21}) + (o_3\, a_{21} - o_2\, a_{31})\dfrac{v_1}{v_3} + (o_1\, a_{31} - o_3\, a_{11})\dfrac{v_2}{v_3}}{(a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}) + (a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31})\dfrac{v_1}{v_3} + (a_{31}\, a_{12} - a_{32}\, a_{11})\dfrac{v_2}{v_3}} \; . \quad (24)$$

ergeben. Die beiden Ausdrücke nehmen nach Einführung der bekannten Verbesserungsverhältnisse (21) die Gestalt (16) und (17) an. Es ist nebenbei hervorzuheben, daß die Verbesserungsverhältnisse (21) in diesem Falle von den Beobachtungsgrößen unabhängig sind.

Wie bereits sub (11) erwähnt, besteht im vorstehenden Sonderfall die Relation:

$$D = \triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2$$

oder

$$[a_1\, a_1]\,[a_2\, a_2] = [a_1\, a_2]^2 + \triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2, \quad . \; . \quad (25)$$

welche Formel »Zerlegung von Zahlen in die Summen von vier Quadraten« in der Zahlentheorie eine große Rolle spielt.

Durch die obigen Ausführungen findet die Behauptung des Spezialisten der Ausgleichungsrechnung Helmert[6]) »da man alle Ausgleichungsaufgaben in solche nach vermittelnden Beobachtungen umwandeln kann, so läßt sich alles auf das Prinzip des arithmetischen Mittels zurückführen« eine Bestätigung.

Was die praktische Anwendbarkeit anbelangt, so liefert die neue Formel (10), deren Bau, wie übrigens auch aus den Relationen (16) und (17) zu ersehen ist, sehr elegant ist, zumindest eine wertvolle Kontrolle der Berechnung der Unbekannten nach der Gauß'schen Methode.

Für die Algebra und die Zahlentheorie erschließen sie, wie bereits bei der Gleichung (25) angedeutet wurde, eine Reihe von Problemen, deren Gebiet durch Abstrahierung von der Ausgleichungsbedingung $[v\,v] =$ Min. und Akzeptierung anderer Voraussetzungen, z. B. $[v^p] =$ Min., beliebig ausgedehnt werden kann.

Messtechnik und Fehlertheorie.

Von Ing. Dr. Alfred Basch, k. k. Adjunkt der Normal-Eichungs-Kommission in Wien.

(Nach einem am 28. Jänner 1913 im Oesterreichischen Verbande des Vereines deutscher Ingenieure gehaltenen Vortrage.)

(Schluß.)

Die Kurve

$$\Phi(t) = 2\int_0^t \varphi(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (31)$$

stellt die Wahrscheinlichkeiten dar, daß der Absolutwert eines Fehlers unterhalb des Betrages t bleibt. Die Ordinaten dieser Kurve enthalten immer doppelt so viel Längeneinheiten, als Flächeneinheiten unter der Kurve $\varphi(t)$ bis zu dieser Ordinate liegen. Naturgemäß bildet die Gerade $y = 1$ eine Asymptote der Kurve $\Phi(t)$. Die Abszisse des Schnittpunktes der Kurve $\Phi(t)$ und der Geraden $y = \frac{1}{2}$ gibt den »wahrscheinlichen Fehler« $\varrho \doteq 0{\cdot}47694$.

Zur Kennzeichnung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Stellung der drei Fehlermaße liegt eine Analogie mit Glückspielen nahe. Die Bedeutung des »wahrscheinlichen Fehlers« ϱ ist leicht verständlich. Man kann 1 : 1 wetten daß sein Betrag von dem Absolutwerte eines Beobachtungsfehlers unter- oder überschritten wird. Bestimmt man ihn aber direkt aus der Fehlerreihe als »zentralen Wert«, so ist der erhaltene Betrag zu sehr von den zufälligen Werten der ihrer absoluten Größe nach in der Mitte liegenden Fehler abhängig. Der Begriff des »wahrscheinlichen Fehlers« wurde zuerst 1815 von Bessel aufgestellt. Als Genauigkeitskriterium erfreute er sich weder bei Theoretikern noch bei Praktikern großer Beliebtheit; wünschte ihn ja schon Gauß aus der Fehlertheorie und Aus-

---

[6]) Ausgleichungsrechnung S. 102.