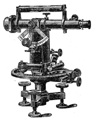
Paper-ID: VGI_191609



Über die Bestimmung der Lage unzugänglicher Punkte

Adolf Klingatsch [1]

[1] *Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **14** (6), S. 81–86

1916

BibTeX:

```
@ARTICLE{Klingatsch_VGI_191609,
Title = {{\"U}ber die Bestimmung der Lage unzug{\"a}nglicher Punkte},
Author = {Klingatsch, Adolf},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {81--86},
Number = {6},
Year = {1916},
Volume = {14}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Baurat S. Wellisch.

Nr. 6. **Wien, 1. Juni 1916.** XIV. Jahrgang.

Ueber die Bestimmung der Lage unzugänglicher Punkte.

Von **Prof. A. Klingatsch** in Graz.

Zwei in einem Plane (Karte) gegebene Punkte A, B (Fig. 1) sind gegenseitig nicht sichtbar und soll die Richtungsbestimmung durch einen Polygonzug oder eine Triangulierung für den vorliegenden Zweck nicht in Frage kommen.

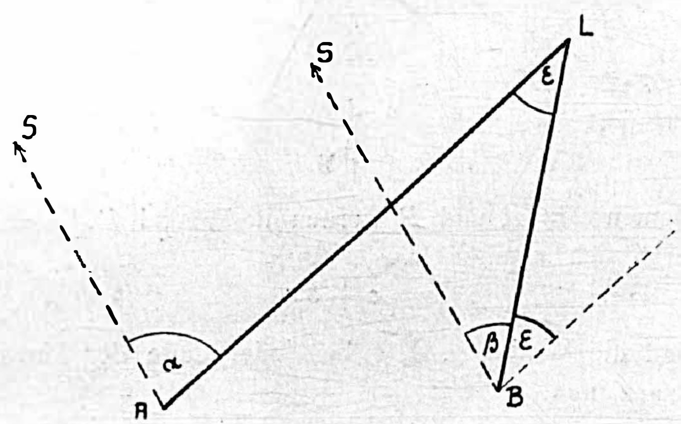


Fig. 1.

L sei ein von A und B aus sichtbarer, im Uebrigen ebenfalls für Aufstellungen nicht in Betracht kommender Punkt, der in der Folge als Leitpunkt bezeichnet werden soll.

Die nächste Aufgabe wäre die, den Winkel $BLA = \varepsilon$ zu finden.

Es werde vorausgesetzt, daß zwischen A und B telephonische Verbindung besteht. Die Beobachter in A und B stellen auf ein verabredetes gegebenes Signal den Längsfaden der Fernrohre ihrer Theotolite auf einen und denselben unendlich fernen Punkt S (denselben Sonnenrand, denselben Stern) ein, worauf die Horizontalkreise abgelesen werden. Jeder Beobachter vollführt sodann die Einstellung auf L, worauf wieder die Ablesungen an den Kreisen erfolgen. Dadurch sind die Winkel α, β (Fig. 1) bestimmt und es ist

$$\varepsilon = \alpha - \beta.$$

Die Einstellungen auf S geschehen wiederholt in beiden Kreislagen, ebenso wie jene auf L, die ersteren jedoch stets von A und B aus gleichzeitig. Man erhält dann ε frei von Instrumentenfehlern [1]).

Dies ist lediglich eine Vorarbeit, welche, wenn Sonnen- oder besser Sterneinstellungen möglich sind, durchgeführt wird. In dem letzteren Falle muß L durch ein Lichtsignal bezeichnet werden. Eine weitere Rechnung kommt bei den zunächst gegebenen Anwendungen nicht in Betracht.

Es wäre nun zu einer beliebigen anderen Zeit für einen von A und B aus einstellbaren Punkt P (Fig. 2) der Winkel x zu bestimmen. Nach Aufstellung

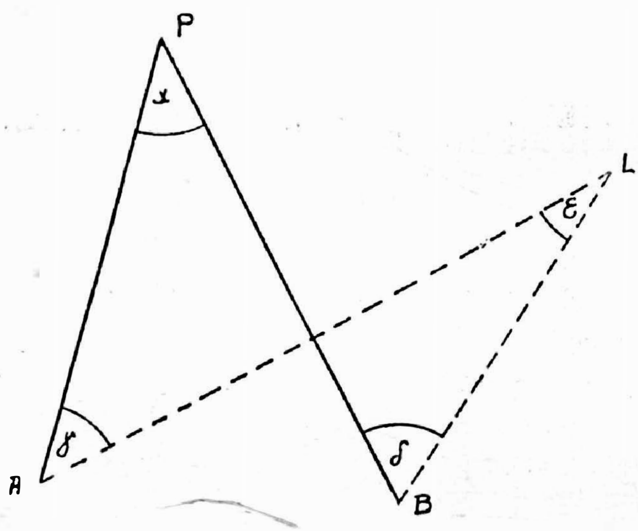


Fig. 2.

der beiden Instrumente in A und B werden die Winkel $PAL = \gamma$, $PBL = \delta$ gemessen, wodurch sich x mit

$$x = \varepsilon + \delta - \gamma$$

ergibt. Dabei sind die Winkel γ, δ, ε bei jeder Lage der Figur in dem angegebenen Sinne zu zählen.

Damit ist zunächst gezeigt, daß jederzeit die Messung eines Winkels x in einem unzugänglichen Punkte P erfolgen kann, soferne als Vorarbeit in einem den Sonnen- oder Sterneinstellungen günstigen Zeitpunkte vorher (oder nachher) die Bestimmung von ε in L geschehen ist.

Die Anwendung zu Punktbestimmungen ist nun naheliegend, wenn noch ein dritter gegebener Punkt herangezogen wird.

Es wären also A, B, C drei ihrer Lage nach in einem Plan (Karte) gegebene Punkte, deren gegenseitige Sichten, wegen der im Allgemeinen gedeckten Lage dieser Punkte und der größeren Entfernung von einander nicht möglich sind. Zwischen A, B, C besteht telephonische Verbindung.

---

[1]) Die Messungen durch nur einen Beobachter, würden Zeitbestimmungen und Uhrablesungen erfordern, da die Messungen in B auf den Zeitpunkt jener in A reduziert werden müßten. Da im Nachstehenden das Zusammenwirken mehrerer Beobachter vorausgesetzt ist, so ist die Benützung eines einzigen Instrumentes hier ausgeschlossen.

Als Vorarbeit wird von A, B der Winkel ε für den Leitpunkt L (Fig. 3) und ebenso von B und C der Winkel ε' für den von diesen beiden Punkten sichtbaren Leitpunkt L' bestimmt.

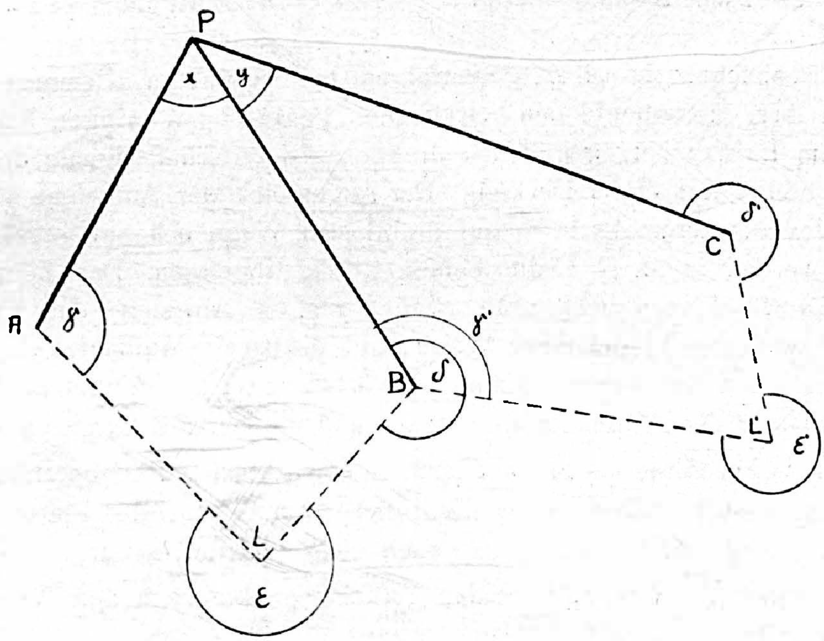


Fig 3.

Ist die Lage von P zu finden, so werden in A der Winkel $PAL = \gamma$, in B die Winkel $BPL = \delta$ und $BPL' = \gamma'$, endlich in C der Winkel $PCL' = \delta'$ gemessen, wobei natürlich L mit L' zusammenfallen kann.

Damit Ist P durch die nunmehr berechenbaren beiden Winkel x, y durch Rückwärtseinschneiden bestimmt, ohne daß in diesem Punkte Messungen oder Aufstellungen stattgefunden hätten. Die Lage im Plan oder in der Karte kann dann mit dem Einschneidetransporteur, oder durch Rechnung geschehen.

Ist P ein bewegliches Objekt, so kann zwischen A, B, C der Einstellungspunkt vereinbart werden. Die drei Beobachter verfolgen mit ihren Fernrohren den beweglichen Punkt, so daß sich derselbe im Momente des Signals im Schnittpunkt der Fäden befindet. Sodann werden die Horizontal- und Höhenkreise abgelesen, was in längstens einer halben Minute geschehen kann, so daß in ein bis zwei Minuten eine weitere Beobachtung angeschlossen werden kann. Schließlich sind noch die Leitpunkte einzustellen.

Die von P durchlaufene Bahn ist dann im Raum bestimmt. Der Grundriß kann in die Karte eingetragen werden. Für die praktische Durchführung ist ein größerer Horizontalabstand AP, BP zweckmäßig, da sich kleinere Höhenwinkel ergeben und auch die Verfolgung des bewegten Punktes mit dem Fernrohr leichter gelingt. Die Ausdehnung der von A, B, C zu bestimmenden Bahn des Punktes P ist dann von der Lage der ersteren zu dieser Bahn abhängig

Auch für die Positionsbestimmung von photogrammetrischen Aufnahmen aus Luftfahrzeugen kann bei beschränktem Bereich dieser Aufnahmen das Vorstehende unter Umständen angewendet werden.

Die drei Beobachter haben bereits früher die Winkel ε und ε' für die Leitpunkte L, L' bestimmt. Zwischen dem Beobachter im Luftfahrzeug und den Beobachtern in A, B, C besteht drahtlose Verständigung; in Ermanglung derselben können auch optische Signale übermittelt werden. Der Einstellungspunkt (Apparat) ist bekannt.

Die Beobachter in A, B, C verfolgen bei geöffneten Klemmen mit den Fernrohren ihrer Instrumente den betreffenden Punkt P und bringen bei Empfang der aus dem Luftfahrzeug gegebenen drahtlosen Bereitschaftssignale den Schnittpunkt der Fäden mit P zur Deckung. Der Augenblick der Aufnahme wird ebenfalls — allenfalls automatisch — auf drahtlosem Wege bekannt gegeben.

Nun werden in A, B, C die beiden Kreise abgelesen. Der Zeitpunkt für den Plattenwechsel im Luftfahrzeug genügt für die Ablesung der Kreise und die neue Einstellung. In derselben Weise wird die zweite Aufnahme eingemessen, wodurch die Lage der beiden Raumpunkte bestimmt ist. Vor und nach den Beobachtungen sind die Leitpunkte einzustellen und die Horizontalkreise abzulesen. [1])

Da — wie erwähnt — A, B, C sich in beträchtlicher Horizontaldistanz vom Luftfahrzeug befinden sollen, so werden diese Punkte auf der Platte im Allgemeinen nicht abgebildet werden, was auch nicht erforderlich ist.

Da nämlich die Lage der beiden Aufnahmspunkte nach dem Vorstehenden im Plan gefunden werden kann, und ebenso die Höhe über A, B, C bestimmt wurde, so genügt es, wenn bei jeder Aufnahme die Lage eines einzigen abgebildeten Punktes im Plan gegeben ist.

Wäre nämlich P' der Grundriß des einen Aufnahmsortes und F' jener Punkt, so ist im Plan die Linie $P'\,F'$ als Schnitt einer durch die Vertikale von P und den abgebildeten Punkt f gelegten Ebene mit dem Horizont (Planebene) gegeben.

Ist nun auf der Platte auch der Schnitt einer durch die optische Achse des Apparates gelegten Vertikalebene ersichtlich, so ist aus der Aufnahme auch der Winkel zwischen diesen beiden Vertikalebenen gegeben und somit der Grundriß der Achse des Aufnahmsapparates bekannt, deren Neigung mit dem Horizont im Augenblicke der Aufnahme durch den Apparat gegeben ist. Damit ist aber Alles bestimmt.

Es können auch bei neuen Punkteinschaltungen in bestehende Dreiecksnetze Fälle vorkommen, wo äußere zu messende Richtungen auf den gegebenen gegenseitig nicht sichtbaren Punkten A, B, C . . . aus dem Grunde nicht vorliegen, weil in keinem der gegebenen Punkte Anschlußmessungen an andere bereits gegebene Punkte zu gewinnen sind, während innere Richtungen in neuen Punkten aus irgendwelchen Gründen nicht meßbar sind.

In solchen Fällen kann das oben angegebene Verfahren mit Leitpunkten, welch' letztere eben bezüglich ihrer Lage nicht bekannt zu sein brauchen, aushelfen, nur muß in solchen Fällen die Bestimmung des Winkels ε in jedem

---

[1]) In Ermanglung von Theodoliten können auch Detaillierapparate mit Fernrohrdioptern, welche zur Höhenwinkelmessung eingerichtet sind, Verwendung finden, also die in Betracht kommenden Winkel graphisch gemessen werden.

Leitpunkt L, wegen der nunmehr größeren erforderichen Genauigkeit Rücksicht auf die Erdkrümmung hergeleitet werden.

Ist in Figur 4. S der von A und B gleichzeitig eingestellte Stern, bedeuten daher A, B die Zenitpunkte der beiden Beobachtungsorte also a, b die Zenit-

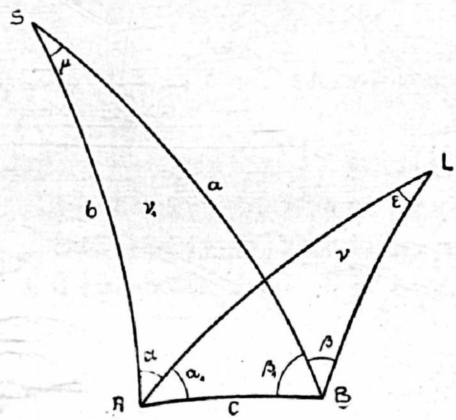


Fig. 4.

distanzen von S, so geben die beiden sphärischen Dreiecke $A\,B\,S$, $A\,B\,L$, wenn ν_1 und ν ihre resp. sphärischen Exzesse bedeuten, die Gleichungen

$$\alpha + \alpha_1 + \beta_1 + \mu = 180 + \nu_1$$
$$\beta + \beta_1 + \alpha_1 + \varepsilon = 180 + \nu,$$

woraus, da der sphärische Exzeß ν des Dreieckes $A\,B\,L$ selbst für ein solches erster Ordnung zu vernachlässigen sein wird, ε durch die Gleichung

$$\varepsilon = \alpha - \beta + (\mu - \nu_1)$$

bestimmt ist.

Da die Lage von A, B und somit auch die Horizontalentfernung dieser Punkte gegeben ist, so kann für eine mittlere Breite der entsprechende Krümmungshalbmesser des Bogens c bestimmt werden, während sich a, b aus den gemessenen Zenitdistanzen des Sternes ergeben.

Wegen

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \,.\, \cos \mu$$

folgt leicht

$$\sin \frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{c + (a - b)}{2} \,.\, \sin \frac{c - (a - b)}{2}}{\sin a \,.\, \sin b}}$$

und der sphärische Exzeß ν_1 des Dreieckes $A\,B\,S$ aus

$$\operatorname{tg} \frac{\nu_1}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s - a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s - b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s - c}{2}},$$

wo bekanntlich $s = \frac{a + b + c}{2}$ ist.

Da man S in kleinen Höhenwinkeln beobachten wird, um Triangulierungsinstrumente verwenden zu können, kann man mit $a \doteq b$ mit Rücksicht auf den kleinen Wert von c auch einfacher setzen

$$\mu'' = \frac{c''}{\sin a}, \quad \nu''_1 = 2\,(s - a)'' \operatorname{tg} \frac{s}{2}.$$

So erhält man beispielsweise für $\varphi = 47^0$, also $\log R = 6{\cdot}8047425$, mit $a \doteq b = 70^0$ und

	$\overline{AB} =$	1	3	5	8 *km*
	$\mu =$	34·4	103·2	172·1	175·5 „
	$\nu_1 =$	22·6	67·9	113·3	181·3 „
also	$\mu - \nu_1 =$	11·8	35·3	58·8	94·0 „

Diese Verbesserung bezieht sich lediglich auf die Bestimmung der Winkel ε an den Leitpunkten, während die Vierecke $ABLP$ (Fig. 2) als ebene angesehen werden können, da es sich doch nur um Einschaltungen von Netzpunkten niederer Ordnung handelt.

Die Feldarbeit wird natürlich von dieser Rechnung nicht weiter berührt, nur sind die gleichzeitigen Sterneinstellungen behufs Gewinnung der Zenitdistanzen im Schnittpunkt der Fäden, oder wenigstens in der Nähe des Querfadens vorzunehmen, und daher auf den Höhenkreisen abzulesen.

Im übrigen genügen zwei Beobachter, welche eben für die gleichzeitigen Sterneinstellungen nötig sind, während die in den einzelnen Standpunkten durchzuführenden Sätze natürlich auch von einem Beobachter erledigt werden können, sowie dies immer der Fall ist, wenn es sich um die Einstellung unveränderlicher dauernd sichtbarer Punkte handelt.

Die hier kurz angegebene Art der Punktbestimmung setzt eben genügend Hilfskräfte, Instrumente und zeitgemäße Verständigungsmittel voraus und dürfte sich dieselbe daher mehr für militärische als für ziviltechnische Zwecke eignen.

Legendre's Theorem.

Von **Johannes Frischauf** in Graz.

(Schluß.)

6. Die Bestimmung der Verhältnisse der Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln A, B, C wird aus der Gleichung

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

und den analogen, erhalten.

Mit Fehler vierter Ordnung nach a, b, c ist

$$\frac{a\,(1 - \frac{1}{6}a^2)}{b\,(1 - \frac{1}{6}b^2)} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A\,(1 + \frac{1}{6}a^2)}{\sin B\,(1 + \frac{1}{6}b^2)}$$