Kombiniertes Rückwärtseinschneiden

Koloman von Mateóczy-Fleischer [1]

[1] *kgl. ung. Obertrigonometer*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **14** (11), S. 163–166

1916

Mit $r = 0$ wird $g = 1$ und aus 5) ergibt sich die Gauß'sche Formel.

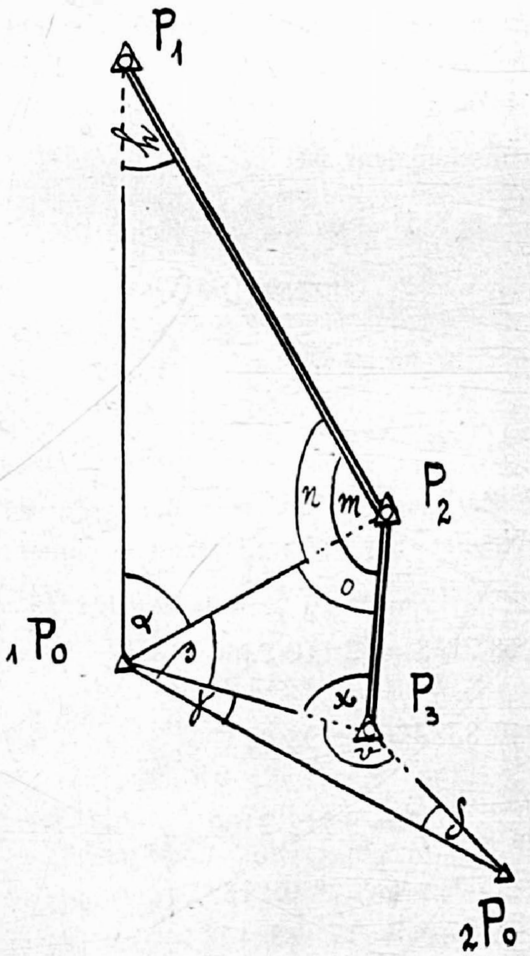
Wir können das Wesentliche dieser Deduktion in dem Folgenden zusammenfassen:

Man hat die Frage nach der Existenz eines Fehlergesetzes von der Frage: welche analytische Form ein Fehlergesetz überhaupt haben kann, zu trennen. Die erste Frage, wie jede Existenzfrage, läßt sich bloß durch die Erfahrung beantworten. Die zweite läßt sich dagegen a priori untersuchen und führt zu dem Ergebnis, daß die Gauß'sche Form die einzige ist, welche dem Stabilitätsprinzip entspricht, also die einzige, welche die Grundlage einer exakten Fehlertheorie bilden kann, gleichgültig, ob eine gesetzmäßige Fehlerwahrscheinlichkeit wirklich existiert, oder die Gesetzmäßigkeit nur eine unvollkommene ist und die analytische Theorie bloß zur Idealisierung der Erfahrungen dienen soll.

Kombiniertes Rückwärtseinschneiden.

Von **Koloman v. Mateóczy-Fleischer,** k. u. Obertrigonometer.

Unter diesem Titel hat Herr k. k. Agrar-Geometer Anton Tranquillini in den Heften Nr. 9 und 10 des Jahrganges XIII (1915) der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen die Lösung einer kombinierten Pothenot'schen Aufgabe abgeleitet und gerechnet.



Ausgehend von der allgemeinen Meinung, daß die Rechnungen der trigonometrischen Punkte einfach sein sollen und doch gute Resultate geben sollen, erlaube ich mir die beschriebene trigonometrische Aufgabe, das »Kombinierte Rückwärtseinschneiden«, auf kürzerem Wege zu lösen und mit einigen Bemerkungen niederzuschreiben. Die Aufgabe ist die folgende:

Gegeben sind die Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3 und die gemessenen Winkel α, β, γ und δ.

P_1:	$y_1 = +\,8724{\cdot}73$	$x_1 = -\,8622{\cdot}94$
P_2:	$y_2 = +\,7665{\cdot}47$	$x_2 = -\,6715{\cdot}25$
P_3:	$y_3 = +\,7745{\cdot}49$	$x_3 = -\,5796{\cdot}26$
	$\alpha = 60^0\ 46'\ 03''$	$\gamma = 12^0\ 08'\ 02''$
	$\beta = 45\ \ 41\ \ 54$	$\delta = 17\ \ 45\ \ 30$

Zuerst werden aus den gegebenen Koordinaten die Richtungswinkel und Seiten gerechnet, die zur weiteren Rechnung als Basis dienen.

$$y_2 - y_1 = -\,1059{\cdot}26$$
$$x_2 - x_1 = +\,1907{\cdot}69$$

$$\log \operatorname{tg} w'_{1,2} = \log \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 3{\cdot}025\,0026 - 3{\cdot}280\,5078 = 9{\cdot}744\,4948$$

$$w'_{1,2} = 330^0\ 57'\ 30'';$$

$$\log s_{1,2} = \log \frac{x_2 - x_1}{\cos w_{1,2}} = 3{\cdot}338\,8634$$

so auch:

$$y_3 - y_2 = +\ 80{\cdot}02$$
$$x_3 - x_2 = +\ 918{\cdot}99$$

$$\log \operatorname{tg} w_{2,3} = 1{\cdot}903\,1985 - 2{\cdot}963\,3108 = 8{\cdot}939\,8877$$
$$w_{2,3} = 4^0\ 58'\ 35''; \ \log s_{2,3} = 2{\cdot}964\,9509$$
$$w'_{2,1} - w'_{2,3} = m = 145^0\ 58'\ 55''.$$

Hier muß ich bemerken, daß die Seiten zwischen den trigonometrischen Punkten nur aus den größeren Katheten (hier $[x_2 - x_1]$ und $[x_3 - x_2]$) gerechnet werden dürfen, weil, aus der kleineren Kathete gerechnet, die in Rechnung kommenden gegenüberliegenden Winkel im Sinus große Differenzen haben. Dieser Unterschied der Seiten aus den beiden Katheten ist umso größer, je größer der Unterschied in den Katheten ist. Wenn man aus der kleineren Kathete die Seite rechnen will, so müßte man den in Rechnung kommenden Winkel viel schärfer rechnen; so gerechnet wird dann die Seite aus beiden Katheten gut stimmen.

Die Vereinfachung dieses kombinierten Rückwärtseinschneidens besteht darin, daß ich diese Aufgabe in ein einfaches Rückwärtseinschneiden und in einen Abschnitt teile.

Die bekannte Formel des Rückwärtseinschneidens ist:

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x + y}{2} \operatorname{tg} (45^0 - \varphi)$$

Hier ist $\dfrac{x + y}{2} = \dfrac{360^0 - (\alpha + \beta + m)}{2} = 180^0 - \dfrac{252^0\ 26'\ 52''}{2}$

$$\frac{x + y}{2} = 53^0\ 46'\ 34''$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dfrac{s_{2,3}}{\sin \beta}}{\dfrac{s_{1,2}}{\sin \alpha}}$$

Schneller geht die Rechnung, wenn man den größeren Quotient immer als Nenner nimmt, weil dann φ immer kleiner ist als 45^0.

$$\log \frac{s_{2,3}}{\sin \beta} = 2{\cdot}964\,9509 - 9{\cdot}854\,7143 = 3{\cdot}110\,2366$$

$$\log \frac{s_{1,2}}{\sin \alpha} = 3{\cdot}338\,8634 - 9{\cdot}940\,8377 = 3{\cdot}398\,0257$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log \frac{s_{2,3}}{\sin \beta} - \log \frac{s_{1,2}}{\sin \alpha} = 9{\cdot}712\,2109$$

$$\varphi = 27^0\ 16'\ 13''.$$
$$45^0 - \varphi = 17\ \ 43\ \ 47$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = 0{\cdot}135\ 1747$$

$$+ \log \operatorname{tg}(45^0 - \varphi) = 9{\cdot}504\ 7595$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = 9{\cdot}639\ 9342$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-y}{2} = 23^0\,34'\,44'' \\ \dfrac{x+y}{2} = 53\ \ 46\ \ 34 \end{array}\right\} \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 77^0\ 21'\ 18'' \\ y = 30\ \ 11\ \ 50 \end{array}$$

Durch Ergänzung auf 180⁰ erhält man die Winkel:

$$n = 89^0\ 02'\ 07'' \quad \text{und} \quad o = 56^0\ 56'\ 48''$$

$$_1w_{1,0} = w_{1,2} + y = 330^0\ 57'\ 30'' + 30^0\ 11'\ 50'' = 1^0\ 09'\ 20''$$

$$_1w_{3,0} = w_{3,2} - x = 184^0\ 58'\ 35'' - 77^0\ 21'\ 18'' = 107^0\ 37'\ 17''$$

$$\log {_1s_{1,0}} = \log \frac{s_{1,2} \cdot \sin n}{\sin \alpha} \quad \begin{array}{r} = 3{\cdot}338\ 8634 \\ -\ 9{\cdot}940\ 8377 \\ \hline 3{\cdot}398\ 0257 \\ +\ 9{\cdot}999\ 9384 \\ \hline \end{array}$$

$$\log {_1s_{1,0}} = 3{\cdot}397\ 9641$$

$$\log {_1s_{3,0}} = \log \frac{s_{2,3} \cdot \sin o}{\sin \beta} \quad \begin{array}{r} = 2{\cdot}964\ 9509 \\ -\ 9{\cdot}854\ 7143 \\ \hline 3{\cdot}110\ 2366 \\ +\ 9{\cdot}923\ 3286 \\ \hline \end{array}$$

$$\log {_1s_{3,0}} = 3{\cdot}033\ 5652$$

$$\log \triangle\, {_1y_0} = \log {_1s_{1,0}} \cdot \sin {_1w_{1,0}}; \qquad \log \triangle\, {_1x_0} = \log {_1s_{1,0}} \cdot \cos {_1w_{1,0}}$$

$$\begin{array}{rl} \log {_1s_{1,0}} & = 3{\cdot}397\ 9641 \\ + \log \sin {_1w_{1,0}} & = 8{\cdot}304\ 6388 \\ \hline \log \triangle\, {_1y_0} & = 1{\cdot}702\ 6029 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log {_1s_{3,0}} & = 3{\cdot}397\ 9641 \\ + \log \cos {_1w_{1,0}} & = 9{\cdot}999\ 9117 \\ \hline \log \triangle\, {_1x_0} & = 3{\cdot}397\ 8758 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \triangle\, {_1y_0} & = +\ \ 50{\cdot}42 \\ y_1 & = +\ 8724{\cdot}73 \\ \hline {_1y_0} & = +\ 8775{\cdot}15 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \triangle\, {_1x_0} & = +\ 2499{\cdot}63 \\ x_1 & = -\ 8622{\cdot}94 \\ \hline {_1x_0} & = -\ 6123{\cdot}31 \end{array}$$

Ebenso von P_3 gerechnet:

$$\log \triangle\, {_1y_0} = \log {_1s_{3,0}} \cdot \sin {_1w_{3,0}} \qquad \log \triangle\, {_1x_0} = \log {_1s_{3,0}} \cdot \cos {_1w_{3,0}}$$

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}033\ 5652 \\ 9{\cdot}979\ 1283 \\ \hline 3{\cdot}012\ 6935 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{\cdot}033\ 5652 \\ 9{\cdot}481\ 0493 \\ \hline 2{\cdot}514\ 6145 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \triangle\, {_1y_0} & = +\ 1029{\cdot}66 \\ y_3 & = +\ 7745{\cdot}49 \\ \hline {_1y_0} & = +\ 8775{\cdot}15 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \triangle\, {_1x_0} & = -\ \ 327{\cdot}05 \\ x_3 & = -\ 5796{\cdot}26 \\ \hline {_1x_0} & = -\ 6123{\cdot}31 \end{array}$$

Für den Punkt ${}_2P_0$ ist:

$$v = 180^0 - (\gamma + \delta) = 180^0 - 29^0\ 53'\ 32'' = 150^0\ 06'\ 28''$$

$$\log {}_2s_{3,0} = \log \frac{{}_1s_{3,0} \cdot \sin \gamma}{\sin \delta} = \begin{array}{r} 3{\cdot}033\ 5652 \\ -\ 9{\cdot}484\ 3038 \\ \hline 3{\cdot}549\ 2614 \\ +\ 9{\cdot}322\ 6262 \\ \hline \end{array}$$

$$\log {}_2s_{3,0} = 2{\cdot}871\ 8876$$

$${}_2w_{3,0} = {}_1w_{3,0} - v = 107^0\ 37'\ 17'' - 150^0\ 06'\ 28'' = 317^0\ 30'\ 49''$$

$$\log \Delta\, {}_2y_0 = \log {}_2s_{3,0} \cdot \sin {}_2w_{3,0};$$

$$\begin{array}{rl} \log {}_2s_{3,0} = & 2{\cdot}871\ 8876 \\ \log \sin {}_2w_{3,0} = & 9{\cdot}829\ 5707 \\ \hline \log \Delta\, {}_2y_0 = & 2{\cdot}701\ 4583 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \Delta\, {}_2y_0 = & -\ \ \ 502{\cdot}87 \\ y_3 = & +\ 7745{\cdot}49 \\ \hline {}_2y_0 = & +\ 7242{\cdot}62 \end{array}$$

$$\log \Delta\, {}_2x_0 = \log {}_2s_{3,0} \cdot \cos {}_2w_{3,0}$$

$$\begin{array}{rl} \log {}_2s_{3,0} = & 2{\cdot}871\ 8876 \\ \log \cos {}_2w_{3,0} = & 9{\cdot}867\ 7254 \\ \hline \log \Delta\, {}_2x_0 = & 2{\cdot}739\ 6130 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \Delta\, {}_2x_0 = & +\ \ \ 549{\cdot}05 \\ x_3 = & -\ 5796{\cdot}26 \\ \hline {}_2x_0 = & -\ 5247{\cdot}21 \end{array}$$

Die Koordinaten der neuen Punkte ${}_1P_0$ und ${}_2P_0$ stimmen also auf 1 *cm* mit den Koordinaten, welche Herr Anton Tranquillini gerechnet hat. Dieser Unterschied stammt davon, weil Herr Tranquillini bei der Rechnung der Seiten $s_{1,2}$ und $s_{2,3}$ das Mittel aus den Seitenrechnungen genommen hat, wie ich oben schon erwähnt habe, was nur dann richtige Resultate gibt, wenn die Seite aus der kleineren Kathete viel schärfer gerechnet wird.

Diese Aufgabe betrachtend, sieht man gleich, daß die Rechnung des Punktes ${}_2P_0$ eine sehr ungünstige ist, weil der Winkel δ nur 17° 45′ 30″ groß ist. Der Winkel δ müßte größer als 35 Grade sein, damit man die Koordinaten des Punktes ${}_2P_0$ für gut bestimmt annehmen kann.

Bei dem Winkel von 17° 45′ 30″ ist der Schnittpunkt der Visuren ${}_1P_0$—${}_2P_0$ und P_3—${}_2P_0$ durch den sehr schiefen Schnitt unsicher und es könnte ein kleiner Fehler bei der Visur ${}_1P_0$ — ${}_2P_0$ oder ${}_2P_0$ — P_3 oder ein kleiner Fehler in den Koordinaten des Punktes P_3 bei den Koordinaten des Punktes ${}_2P_0$ größere Fehler hervorbringen.

Über das Evidenzhalten polygonal verfaßter Neuvermessungsoperate.

Von k. k. Obergeometer I. Klasse **E. v. Nickerl** in Graz.

Die bisherige Entwicklung des Grundsteuerkatasters beweist, daß weniger das Neuvermessen, die Neuherstellung von Katasterplänen, als die andauernd gute Evidenzhaltung derselben besondere, bisher stets unterschätzte Schwierigkeiten bereitet.

Besonders eklatant beweisen das auch die Evidenzhaltungsergebnisse bei den in den lezten zwei Jahrzehnten geschaffenen Neuvermessungsoperaten. Der