

Paper-ID: VGI\_191709



## Numerische Ausgleichung bei der Lagebestimmung von Bindepunkten

Theodor Dokulil <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *a. o. Professor an der k. k. Technischen Hochschule in Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **15** (5), S. 65–69

1917

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Dokulil_VGI_191709,  
  Title = {Numerische Ausgleichung bei der Lagebestimmung von Bindepunkten},  
  Author = {Dokulil, Theodor},  
  Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {65--69},  
  Number = {5},  
  Year = {1917},  
  Volume = {15}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN.

ORGAN

DES

VEREINES DER ÖSTERR. K. K. VERMESSUNGSBEAMTEN.

Redaktion: Hofrat Prof. E. Doležal und Baurat Ing. S. Wellisch.

Nr. 5.

Wien, 1. Mai 1917.

XV. Jahrgang.

## Numerische Ausgleichung bei der Lagebestimmung von Bindepunkten.

Von Professor Dr., Theodor Dokulll.

Nach der Instruktion für Polygonal-(Theodolit-)Vermessungen hat die Festlegung eines wichtigen Bindepunktes dadurch zu erfolgen, daß man eine überschüssige Anzahl von Entfernungen dieses Punktes von anderen durch ihre Koordinaten gegebenen Punkten durch direkte Messung bestimmt, aus zwei dieser Messungsergebnisse Näherungskordinaten für den betreffenden Bindepunkt ableitet und die überschüssigen Messungswerte zu einem Ausgleichungsverfahren verwendet, welches bestimmte Koordinatenverbesserungen ergibt. In der Instruktion wird für diese Ausgleichung ein graphisches Verfahren angegeben und eingehend erläutert, dessen Ergebnisse gewiß in den meisten Fällen der Praxis einen hinreichenden Genauigkeitsgrad besitzen. Es kann jedoch in manchen Fällen, namentlich bei der Aufnahme besonders hochwertiger Grundstücke als wünschenswert erscheinen, auch diese Ausgleichung auf numerischem Wege auszuführen; es soll daher im Folgenden ein für diese Zwecke brauchbares numerisches Verfahren erörtert werden.

Zur Bestimmung des Bindepunktes  $B$  (Fig. 1) wurden seine Entfernungen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  von den durch ihre Koordinaten gegebenen Punkten  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  gemessen und aus zwei dieser Messungsergebnisse die Näherungskordinaten  $y_0'$  und  $x_0'$  nach dem gewöhnlichen Verfahren berechnet.

Mit Hilfe dieser Näherungskordinaten können die Seitenlängen  $s_1', s_2', s_3', \dots, s_n'$  nach der allgemeinen Gleichung

$$s_k' = \sqrt{(x_0' - x_k)^2 + (y_0' - y_k)^2} \quad \dots \dots \dots 1)$$

berechnet und die Unterschiede zwischen diesen rechnungsmäßigen Seitenlängen und ihren gemessenen Werten ermittelt werden. Man erhält mithin

$$\left. \begin{array}{l} s_1' - a_1 = w_1 \\ s_2' - a_2 = w_2 \\ \vdots \\ s_n' - a_n = w_n \end{array} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

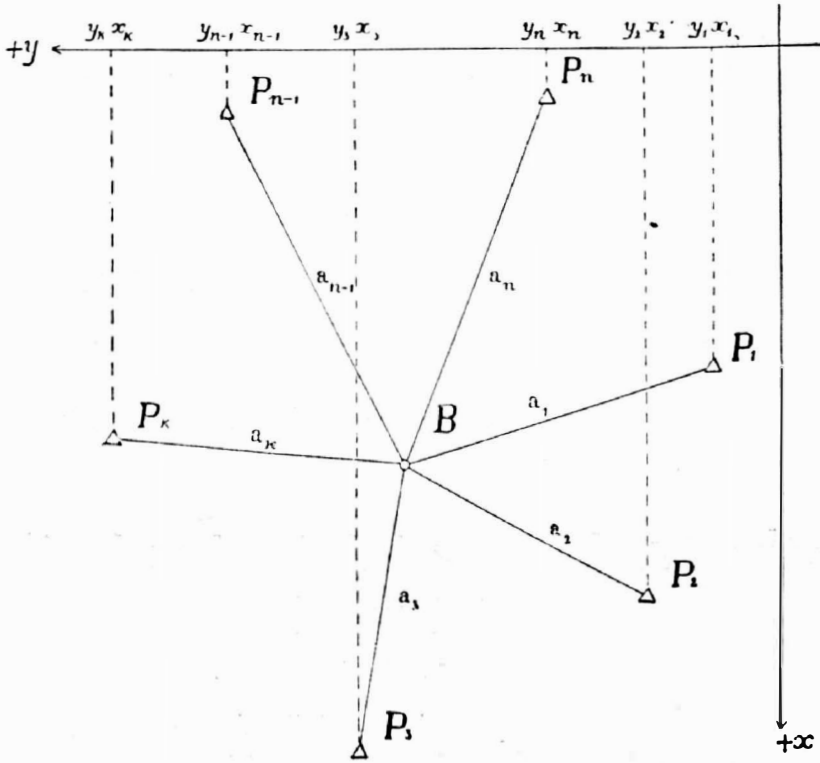


Fig. 1.

als Widersprüche zwischen den Resultaten der Rechnung und der Messung.

Durch die zu bestimmenden Koordinatenverbesserungen  $\Delta y_o'$  und  $\Delta x_o'$  werden die rechnungsmäßigen Seitenlängen  $s_k'$  bestimmte Veränderungen  $\Delta s_k'$  erfahren; durch Differentiation und entsprechende Transformation der Gleichung 1) ergibt sich

$$\Delta s_k' = \frac{x_o' - x_k}{s_k'} \cdot \Delta x_o' + \frac{y_o' - y_k}{s_k'} \cdot \Delta y_o'$$

Setzt man

$$\frac{x_o' - x_k}{s_k'} = \alpha_k \text{ und } \frac{y_o' - y_k}{s_k'} = \beta_k,$$

so erhält man

$$\Delta s_k' = \alpha_k \cdot \Delta x_o' + \beta_k \cdot \Delta y_o' \dots \dots \dots 3)$$

Diese Beziehung ergibt einen Zusammenhang zwischen den Koordinatenänderungen  $\Delta x_o'$  und  $\Delta y_o'$  und der zugehörigen Seitenänderung  $\Delta s_k'$ . In ihrem Baue gleicht sie der Gauß'schen Relation für die Richtungsänderung und kann daher als „Gleichung für die Seitenänderung“ bezeichnet werden. Die Koeffizienten  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  sind nach Ermittlung der Näherungskordinaten des Punktes B berechenbar und können, da sie in der Gleichung 3) die analoge Bedeutung wie die Richtungskoeffizienten in der Gauß'schen Relation besitzen, den Namen „Längenänderungskoeffizienten“ erhalten. Nach der Ausgleichung erhält man mit den wahrscheinlichsten Koordinaten des Bindepunktes die rechnungsmäßigen Seiten  $s_1, s_2, s_3, \dots \dots \dots s_n$ , welche sich von den gemessenen Werten dieser Seiten um die übrigbleibenden Beobachtungsfehler  $v_1, v_2, v_3, \dots \dots \dots v_n$  unterscheiden werden.

Es ist daher

$$\begin{aligned} s_k' - a_k &= w_k \\ s_k - a_k &= v_k \end{aligned}$$

Verbindet man diese beiden Beziehungen miteinander, so ergibt sich

$$s_k - s_k' = \Delta s_k' = v_k - w_k.$$

Setzt man für  $\Delta s_k'$  den durch die Gleichung 3) gegebenen Wert ein, so folgt

$$v_k = \alpha_k \cdot \Delta x_o' + \beta_k \cdot \Delta y_o' + w_k \dots \dots \dots 4)$$

Da diese Beziehung den Bau der Fehlergleichungen für vermittelnde Beobachtungen aufweist, ergibt sich die Möglichkeit, die Koordinatenverbesserungen  $\Delta x_o'$  und  $\Delta y_o'$  nach der Theorie der vermittelnden Beobachtungen mit Verwendung der Widersprüche  $w_1, w_2, w_3, \dots \dots \dots w_n$  zu bestimmen. Durch Spezialisierung der Gleichung 4) erhält man die Fehlergleichungen

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 \cdot \Delta x_o' + \beta_1 \cdot \Delta y_o' + w_1 \\ v_2 &= \alpha_2 \cdot \Delta x_o' + \beta_2 \cdot \Delta y_o' + w_2 \\ \vdots & \\ v_n &= \alpha_n \cdot \Delta x_o' + \beta_n \cdot \Delta y_o' + w_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

Die Koordinatenverbesserungen können mithin aus den Normalgleichungen

$$\left. \begin{aligned} [p \alpha \alpha] \cdot \Delta x_o' + [p \alpha \beta] \cdot \Delta y_o' + [p \alpha w] &= 0 \\ [p \alpha \beta] \cdot \Delta x_o' + [p \beta \beta] \cdot \Delta y_o' + [p \beta w] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6)$$

berechnet werden. Die Gewichte  $p$  sind hierbei, da die mittleren Fehler der gemessenen Seiten nach dem Quadratwurzelgesetze den Wurzeln aus den Seitenlängen proportional sind, den reziproken Werten dieser Seitenlängen proportional zu setzen. Es ist nämlich

$$m_k = \pm \mu \cdot \sqrt{a_k} \quad \text{und} \quad p_k = \frac{1}{m_k^2} = \frac{1}{\mu^2 \cdot a_k}.$$

Wurden alle Seiten mit dem gleichen Längenmesser gemessen, wie dies immer der Fall ist, so gilt für die Bestimmung der Gewichtszahlen die Proportion

$$p_1 : p_2 : p_3 : \dots \dots \dots : p_n = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3} : \dots \dots \dots : \frac{1}{a_n} \quad . \quad 7)$$

Werden die aus den Gleichungen 6) erhaltenen Werte  $\Delta x_o'$  und  $\Delta y_o'$  algebraisch zu den Näherungskordinaten addiert, so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Koordinaten des Bindepunktes und es können dann alle weiteren auf die Genauigkeit derselben Bezug habenden Berechnungen ausgeführt werden.

#### *Numerisches Beispiel.*

Die graphische Ausgleichung ist in der Instruktion für folgendes Beispiel ausgeführt. Zur Bestimmung eines Bindepunktes 83 wurden seine Entfernungen von drei durch ihre Koordinaten gegebenen Punkten 79, 80 und 81 gemessen. Die Koordinaten dieser drei Punkte, sowie die Resultate der Messung sind nachstehend gegeben.

## Koordinatenverzeichnis

Punkt	Koordinaten in m			
		Ordinate		Abszisse
79	—	18.106·82	—	111.426·07
80	—	18.026·01	—	111.415·90
81	—	17.997·75	—	111.479·36

## Seitenverzeichnis

Seite		Länge in m
von	nach	
79	83	75·42
80	83	72·13
81	83	58·23

Die Näherungskordinaten wurden mit Verwendung der Seiten  $a_1 = 79-83$  und  $a_2 = 80-83$  berechnet und es ergaben sich die Werte

$$y_0' = - 18.055·79 \text{ m}$$

$$x_0' = - 111.481·54 \text{ ,,}$$

Für die numerische Bestimmung der Koordinatenverbesserungen erhält man daher:

$$s_1' = \sqrt{(x_0' - x_{79})^2 + (y_0' - y_{79})^2} = 75·372 \text{ m} ; \tau_1 = s_1' - a_1 = - 0·048 \text{ m}$$

$$s_2' = \sqrt{(x_0' - x_{80})^2 + (y_0' - y_{80})^2} = 72·079 \text{ ,,} ; \tau_2 = s_2' - a_2 = - 0·051 \text{ ,,}$$

$$s_3' = \sqrt{(x_0' - x_{81})^2 + (y_0' - y_{81})^2} = 58·080 \text{ ,,} ; \tau_3 = s_3' - a_3 = - 0·150 \text{ ,,}$$

Es zeigt sich daher, daß infolge der bei der Berechnung der Näherungskordinaten sich ergebenden Abrundungen die Widersprüche  $\tau_1$  und  $\tau_2$  nicht Null sind; diese Widersprüche sind bei der graphischen Ausgleichung nicht berücksichtigt, während es bei dem numerischen Verfahren möglich ist, auch diese Widersprüche in die Rechnung einzubeziehen.

Man erhält weiters

$$\alpha_1 = \frac{x_0' - x_{79}}{s_1'} = + 0·735 \ 95, \beta_1 = \frac{y_0' - y_{79}}{s_1'} = + 0·67704$$

$$\alpha_2 = \frac{x_0' - x_{80}}{s_2'} = - 0·910 \ 67, \beta_2 = \frac{y_0' - y_{80}}{s_2'} = - 0·41316$$

$$\alpha_3 = \frac{x_0' - x_{81}}{s_3'} = - 0·037 \ 53, \beta_3 = \frac{y_0' - y_{81}}{s_3'} = - 0·99931$$

und

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3} = 13 : 14 : 17$$

Mit diesen Werten ergeben sich die Normalgleichungen

$$+ 18·675 \ 322 \Delta x_0' - 0·572 \ 287 \Delta y_0' + 1·205 \ 146 = 0$$

$$- 0·572 \ 287 \Delta x_0' + 25·325 \ 346 \Delta y_0' + 2·420 \ 764 = 0$$

und aus diesen die Koordinatenverbesserungen:

$$\Delta x_0' = - 0·067 \text{ m}, \Delta y_0' = - 0·097 \text{ m},$$

so dass man als wahrscheinlichste Koordination des Bindepunktes die Werte

$$y_0 = - 18.055·887 \text{ m}$$

$$x_0 = - 111.481·608 \text{ ,,}$$

erhält. Berechnet man mit diesen Koordinatenwerten die Seitenlängen, so erhält man:

$$\begin{aligned} s_1 &= 75 \cdot 356 \quad \text{und} \quad v_1 = s_1 - a_1 = -0 \cdot 064 \quad m \\ s_2 &= 72 \cdot 182 \quad \quad \quad v_2 = s_2 - a_2 = +0 \cdot 051 \quad ,, \\ s_3 &= 58 \cdot 180 \quad \quad \quad v_3 = s_3 - a_3 = -0 \cdot 050 \quad ,, \end{aligned}$$

wobei die übrigbleibenden Fehler  $v$  durch die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 \cdot \Delta x_o' + \beta_1 \cdot \Delta y_o' + w_1 \\ v_2 &= \alpha_2 \cdot \Delta x_o' + \beta_2 \cdot \Delta y_o' + w_2 \\ v_3 &= \alpha_3 \cdot \Delta x_o' + \beta_3 \cdot \Delta y_o' + w_3 \end{aligned}$$

kontrolliert werden können. Die Genauigkeit der Lage des Punktes ist durch die Größen

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{n-2}} = \pm 0 \cdot 363 \quad m$$

$m_x = m \cdot \sqrt{Q_{11}} = \pm 0 \cdot 083 \quad m$ ,  $m_y = m \cdot \sqrt{Q_{22}} = \pm 0 \cdot 072 \quad m$ ,  $M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \pm 0 \cdot 109 \quad m$   
charakterisiert, wobei  $[p v v] = 0 \cdot 132 \quad 425$  ist.

Durch das graphische Verfahren wurden folgende Werte erhalten:

$$\Delta y_o' = -0 \cdot 10 \quad m, \quad \Delta x_o' = -0 \cdot 01 \quad m$$

Es ergeben sich daher die Werte

$$\begin{aligned} y_o &= -18 \cdot 055 \cdot 89 \quad m \\ x_o &= -111 \cdot 481 \cdot 55 \quad ,, \end{aligned}$$

Verwendet man diese Koordinatenwerte zur Berechnung der endgültigen Seitenlängen, so bekommt man

$$\begin{aligned} s_1 &= 75 \cdot 312 \quad \text{und} \quad v_1 = s_1 - a_1 = -0 \cdot 108 \quad m \\ s_2 &= 72 \cdot 130 \quad \quad \quad v_2 = s_2 - a_2 = 0 \cdot 000 \quad ,, \\ s_3 &= 58 \cdot 181 \quad \quad \quad v_3 = s_3 - a_3 = -0 \cdot 049 \quad ,, \end{aligned}$$

sowie  $[p v v] = 0 \cdot 192449$ , wenn man die gleichen Gewichtungszahlen wie oben verwendet.

Der Vergleich der nach den beiden Methoden erhaltenen Resultate zeigt zunächst, daß das graphische Ausgleichungsverfahren in diesem speziellen Falle fast die gleichen Werte wie die numerische Rechnung ergibt, daß aber die Resultate des numerischen Verfahrens immerhin wahrscheinlicher sind, als diejenigen der graphischen Ausgleichung, da  $[p v v]$  im ersten Falle den kleineren Wert erhält. Die Lage der gegebenen Punkte in Bezug auf den festzulegenden Bindepunkt und daher auch die Form des fehlerzeigenden Dreieckes ist in dem behandelten Beispiele eine besonders günstige und die zur graphischen Ausgleichung notwendigen Konstruktionen können daher mit entsprechender Schärfe ausgeführt werden. In Fällen, bei denen die Lageverhältnisse nicht so günstig sind und daher die Konstruktion unsicher wird, werden sich auch die Verhältnisse zwischen der graphischen und der numerischen Ausgleichung sehr zu Gunsten der letzteren ändern und es wird sich dann die Anwendung dieses Verfahrens empfehlen. Unbedingt notwendig wird die numerische Behandlung werden, wenn man die genauesten Resultate erhalten will, wobei es allerdings erforderlich wird, daß auch die Elemente für die Lagebestimmung der gegebenen Punkte wahrscheinlichste sind, welche auf dem Wege der numerischen Rechnung erhalten wurden.